Mémoire déposé pour l'Habilitation à Diriger des Recherches.
SPÉCIALITÉ : Mathématiques.
Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
Institut de Mathématiques de Jussieu - UMR 7586.

ISOMORPHISME ENTRE ESPACES DE BANACH : COMPLEXITÉ ET LISTE DE GOWERS

Valentin Ferenczi

La soutenance a eu lieu le 2 juillet 2009 devant le jury composé de :

– Gilles GODEFROY (Université Pierre et Marie Curie - Paris 6)
– Richard HAYDON (Université d'Oxford - Royaume-Uni)
– Christian LE MERDY (Université de Franche-Comté)
– Alain LOUVEAU (Université Pierre et Marie Curie - Paris 6)
– Bernard MAUREY (Université Paris-Diderot - Paris 7)
– Stevo TODORCEVIC (Université Paris-Diderot - Paris 7)

au vu des rapports de :

– Timothy GOWERS (Université de Cambridge, Royaume Uni),
– Nigel KALTON (Université du Missouri, Columbia, États-Unis)
– Christian LE MERDY (Université de Franche-Comté).

São só dois lados
Da mesma viagem
O trem que chega
É o mesmo trem da partida
A hora do encontro
É também de despedida

Milton Nascimento - Fernando Brant,
Encontros e Despedidas

Remerciements

Timothy Gowers, Nigel Kalton, et Christian Le Merdy ont bien voulu être rapporteurs de cette thèse d'habilitation. Je les remercie chaleureusement pour le temps qu'ils ont consacré à cette tâche et pour l'attention qu'ils ont accordé à mes travaux. Christian Le Merdy a accepté également d'être membre du jury et je l'en remercie sincèrement. Quant à Timothy Gowers et Nigel Kalton, je les remercie aussi particulièrement pour le soutien qu'ils m'ont apporté pour mon entrée à l'Université de São Paulo.

Richard Haydon a accepté de faire le déplacement d'Angleterre pour faire partie de mon jury. Je le remercie très sincèrement de l'honneur qu'il me fait.

Bernard Maurey a accepté de faire partie du jury. Il me donne ainsi l'occasion de le remercier à nouveau pour la qualité de son encadrement comme directeur de thèse de doctorat. Le temps et mon expérience me confirment chaque jour à quel point son intelligence et sa disponibilité en on fait un directeur de thèse exceptionnel.

Gilles Godefroy, Alain Louveau et Stevo Todorcevic font également partie du jury. Je suis très honoré de leur présence à ma soutenance. Chacun d'entre eux me démontre qu'être un mathématicien de renom n'empêche pas d'être disponible et accessible. Je suis aussi reconnaissant à Alain Louveau et à Stevo Todorcevic de m'avoir incité, par leurs questions ou leurs réponses,
'a donner une couleur plus descriptive á mes recherches. Quant à Gilles Godefroy, il a toujours eu à coeur de partager avec moi sa connaissance intime aussi bien des espaces de Banach que des traditions carnavalesques. Non seulement je dois une de mes principales directions de recherche à l'une de ses questions, mais en plus, je suis très flatté de compter parmi les membres du jury un "Gilles" du patrimoine immatériel de l'humanité !

Les travaux en collaboration permettent souvent de réunir recherche et amitié. Je voudrais ainsi remercier Yves Dutrieux, Alain Louveau, Yolanda Moreno, Anya Pełczar, entre autres. Parmi mes coauteurs, deux personnes doivent recevoir un hommage particulier. Je dois à Elói Medina Galego une grande reconnaissance pour les travaux réalisés en commun et pour son aide à l'Université de São Paulo. Et je dois surtout remercier Christian Rosendal parce qu'il m'a énormément appris en théorie descriptive des ensembles, parce qu'il a eu la gentillesse de bien vouloir relire cette thèse ; mais surtout parce que la plupart des résultats présentés ici n'auraient pas vu le jour sans ses travaux et sa collaboration.

J'ai toujours eu la chance de travailler dans un ambiance très agréable et amicale. Je voudrais remercier tous les membres du Projet Analyse Fonctionnelle de l'Institut de Mathématiques de Jussieu ainsi que les participants des deux séminaires du jeudi et du groupe de travail du mardi après-midi. Je dois un grand merci à Olivier Guédon pour sa gentillesse à avoir accepté le rôle de mon "agent de liaison" administratif à Paris 6 lorsque j'en étais absent. Je voudrais remercier également les participants du Séminaire de Topologie ainsi que du naissant Séminaire d'Analyse fonctionnelle et Théorie descriptive des ensembles, de l'Institut de Mathématiques et Statistiques de l'Université de São Paulo.

Dans les diverses universités que j'ai fréquentées, l'enseignement a été source parfois de réflexion, parfois d'amusement, parfois de contrariété, mais jamais d'ennui. Que soient donc remerciés mes étudiants de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, ceux de l'Université de Toronto à Mississauga et ceux de l'Université de São Paulo.

Finalement, je tiens beaucoup à remercier mes proches, de part et d'autre de l'Atlantique, pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté pendant ma recherche et pendant la préparation de cette thèse.

Table des matières

Préliminaires

Publications des résultats de la thèse

Les résultats de cette thèse ont été obtenus dans les articles suivants, présentés chronologiquement.

1) V. Ferenczi, *Lipschitz homogeneous Banach spaces*, Quarterly J. Math. 54 (2003), no. 4, 415–419.
2) V. Ferenczi, A. M. Pelczar, et C. Rosendal, *On a question of Haskell P. Rosenthal concerning a characterization of c_0 and l_p*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), no. 3, 396–406.
3) V. Ferenczi et C. Rosendal, *On the number of non-isomorphic subspaces of a Banach space*, Studia Math. **168** (2005), no. 3, 203–216.
4) V. Ferenczi et C. Rosendal, *Ergodic Banach spaces*, Adv. Math. 195 (2005), no. 1, 259–282.
5) Y. Dutrieux et V. Ferenczi, *The Lipschitz-free Banach space of spaces C(K)*, Proceedings of the A.M.S.**134** (2006), 1039–1044.
6) V. Ferenczi, *On the number of permutatively inequivalent basic sequences in a Banach space*, Journal of Functional Analysis 238 (2006), 353–373.
7) V. Ferenczi, *Minimal subspaces and isomorphically homogeneous sequences in a Banach space*, Israel J. Math. 156 (2006), 125–140.
8) V. Ferenczi et E. M. Galego, *Some equivalence relations which are Borel reducible to isomorphism between separable Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics, 152 (2006), 61-82.
9) S. Dilworth, V. Ferenczi, D. Kutzarova, et E. Odell, *On strongly asymptotically ℓ_p spaces and minimality*, Journal of the London Math. Soc.75, 2 (2007), 409–419.
10) V. Ferenczi, *Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach space*, Advances in Mathematics 213,1 (2007), 462-488.
11) V. Ferenczi, *A Banach space dichotomy for quotients of subspaces*, Studia Mathematica 180 (2007), 111–131.
12) V. Ferenczi et E. M. Galego, *Some results about the Schroeder-Bernstein Property for separable Banach spaces*, Canadian Journal of Mathematics,

59 (2007), 63–84.
13) V. Ferenczi et E. M. Galego, *Even infinite dimensional Banach spaces*, Journal of Functional Analysis 253 (2007), 534-549.
14) V. Ferenczi et C. Rosendal, *Complexity and homogeneity in Banach spaces*, Banach Spaces and their Applications in Mathematics, Ed. Beata Randrianantoanina and Narcisse Randrianantoanina, 2007, Walter de Gruyter, Berlin, p. 83–110.
15) V. Ferenczi, A. Louveau, et C. Rosendal, *The complexity of classifying Banach spaces up to isomorphism*, Journal of the London Mathematical Society 79 (2) (2009), 323-345.
16) V. Ferenczi et C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces*, Journal of Functional Analysis 257 (2009), 149–193.
17) V. Ferenczi et E. M. Galego, *Countable groups of isometries on Banach spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, à paraître.
18) V. Ferenczi et C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces - examples*, prépublication.

Terminologie

Nous citerons les théorèmes de divers auteurs avec la date de publication de leur résultat dans un périodique, même si leur résultat peut être antérieur de plusieurs années à cette date. Nous pourrons faire une exception à cette règle pour les résultats les plus récents.

Nous utiliserons les notations et définitions usuelles de la théorie des espaces de Banach de dimension infinie, voir par exemple [77]. Nous rappelons ici les principales notions dont nous aurons besoin. Certaines définitions seront rappelées au moment propice. Nous indiquons aussi certaines notations ou usages qui sont spécifiques à cette thèse.

Nous nous intéressons principalement aux espaces de Banach de dimension infinie. Par conséquent, sauf mention du contraire, un *espace* sera toujours un espace de Banach de dimension infinie, et un *sous-espace* un sous-espace fermé de dimension infinie. Les espaces seront supposés réels. Sauf mention du contraire, les résultats de cette thèse se généralisent immédiatement au cas complexe.

Un espace de Banach X admet une *base de Schauder* (e_n) se tout $x \in X$ peut être écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$, où les x_n sont des scalaires. Cette base est *inconditionnelle* s'il existe une constante C telle que pour toute suite de scalaires $(\lambda_n)_n$ et toute suite (ϵ_n) de signes,

$$C^{-1}\|\sum_n x_n e_n\| \leqslant \|\sum_n \epsilon_n x_n e_n\| \leqslant C\|\sum_n x_n e_n\|.$$

Au contraire un espace est *indécomposable* s'il ne peut être écrit comme la somme cartésienne de deux sous-espace de dimension infinie.

Un espace X possède une *décomposition de dimension finie (FDD)* $(F_n)_n$ si (F_n) est une suite de sous-espaces de dimension finie telle que tout $x \in X$ puisse s'écrire de manière unique $x = \sum_n x_n$ où $x_n \in F_n$.

Une FDD est *inconditionnelle*, auquel cas c'est une *UFDD*, s'il existe une constante C telle que pour toute suite de vecteurs $x_n \in F_n$ et toute suite (ϵ_n) de signes, on ait $C^{-1}\|\sum_n x_n\| \leqslant \|\sum_n \epsilon_n x_n\| \leqslant C\|\sum_n x_n\|$.

Si X a une base de Schauder (e_n), et $x = \sum_n x_n e_n \in X$, le *support* de X (sur la base (e_n)) est le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par *supp* $x = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$. Si x a support fini, *la portée* (ou "range") de x, notée *range* x, est l'intervalle d'entiers $[\min \operatorname{supp} x, \max \operatorname{supp} x]$. Un *bloc* est un vecteur à support fini. On notera c_{00} l'ensemble des suites réelles qui valent 0 à partir d'un certain rang, c'est-à dire qui sont des suites de coordonnées de blocs sur la base (e_i) associée. Si E est une partie de $\mathbb{N}$ et $x = (x_i) \in c_{00}$, Ex désigne le bloc $\sum_{i \in E} x_i e_i$.

Deux blocs x et y sont dits *successifs* quand $\max \operatorname{supp} x < \min \operatorname{supp} y$, auquel cas on écrit $x < y$. Une *bloc base (ou bloc suite)* est une suite infinie de blocs successifs $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Un *bloc sous-espace* est un sous-espace engendré par une bloc suite.

Les *queues* de X (relativement à la base (e_n)) sont les sous-espaces engendrés par les sous-suites $(e_n)_{n \geqslant k}$ para $k \geqslant 0$.

Une *suite basique* dans un espace de Banach X est une suite (x_n) d'éléments de X qui est base du sous-espace qu'elle engendre, alors noté $[x_n]$.

Nous utiliserons les notations suivantes pour différentes relations entre espaces de Banach :

$X \simeq Y$: X et Y sont linéairement isomorphes, c'est-à dire qu'il existe une bijection linéaire bicontinue de X sur Y.

$X \simeq^K Y$: X et Y sont K-isomorphes, c'est-á dire qu'il existe un isomorphisme T de X sur Y tel que $\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant K$.

$X \sqsubseteq Y$: X *se plonge* dans Y, c'est-à dire que X est isomorphe à un sous-espace de Y.

$X \sqsubseteq^K Y$: X *se plonge avec constante* K dans Y, c'est-à dire que X est K-isomorphe à un sous-espace de Y.

X est *isométrique* à Y s'il existe une isométrie linéaire de X sur Y.

X se plonge *isométriquement* dans Y si X est isométrique à un sous-espace de Y.

X se plonge *presque isométriquement* dans Y si pour tout $\epsilon > 0$, X est $1 + \epsilon$-isomorphe à un sous-espace de Y.

Un sous-espace Y de X est *complémenté* dans X s'il existe une projection linéaire continue de X sur Y.

$X \sqsubseteq_C Y$: X *se plonge de manière complémentée* dans Y, c'est-à dire que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de Y.

$X \equiv Y$: X et Y sont en relation de *biplongement*, c'est-à dire que $X \sqsubseteq Y$ et $Y \sqsubseteq X$.

X et Y sont *comparables* si $X \sqsubseteq Y$ ou $Y \sqsubseteq X$. Dans le cas contraire ils sont *incomparables.*

X et Y sont *totalement incomparables* si aucun sous-espace de X n'est isomorphe à un sous-espace de Y.

$X \simeq_L$: X et Y sont *Lipschitz isomorphes*, c'est-à dire qu'il existe une bijection lipschitzienne de X sur Y dont l'inverse est aussi lipschitzienne.

X est *finiment représentable* dans Y si pour tout $\epsilon > 0$, tout sous-espace de dimension finie de X se plonge avec constante $1 + \epsilon$ dans Y.

X est *crûment finiment représentable* dans Y s'il existe $K \geqslant 1$ telle que tout sous-espace de dimension finie de X se plonge avec constante K dans Y.

Un espace de Banach X est *saturé* de sous-espaces avec la propriété P se tout sous-espace de X a un sous-espace qui vérifie P. De même si (e_n) est une base de Schauder, on dit que (e_n) (ou $[e_n]$) est *saturé* de bloc bases (resp. de bloc sous-espaces) avec la propriété P si toute bloc base (resp. bloc sous-espace) admet une bloc base (resp. bloc sous-espace) qui vérifie P.

On utilisera aussi les notations suivantes pour des relations entre bases de Schauder :

$(x_n) \sim (y_n)$, quand les deux suites sont *équivalentes*, c'est-à dire quand l'opérateur T défini par $T(x_n) = y_n$ s'étend en un isomorphisme linéaire de $[x_n]$ sur $[y_n]$.

$(x_n) \sim_C (y_n)$, quand les deux suites sont C-équivalentes, c'est-à dire quand l'opérateur défini ci-dessus satisfait $\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant C$.

$(x_n) \sim_p (y_n)$, quand les deux suites sont *permutativement équivalentes*, c'est-à dire quand (x_n) est équivalente à une permutation de (y_n).

Si R (resp. R') est une relation sur un ensemble E (resp. E'), le *produit* $R \otimes R'$ est défini sur $E \otimes E'$ par

$$((x, x')R \otimes R'(y, y')) \Leftrightarrow (xRy) \wedge (x'R'y').$$

Si X et Y sont deux ensembles munis de σ-algèbres de parties boréliennes, une fonction f de X dans Y est *borélienne* quand l'image réciproque par f de toute partie borélienne de Y est encore borélienne.

Pour la preuve des résultats de cette thèse, il sera utile d'utiliser les notions de blocs et bloc-bases dans un sens plus restreint que le sens classique. Pour les résultats généraux ou définitions concernant les bloc-bases, il sera indifférent, par des arguments de perturbation, d'utiliser le sens classique ou le sens spécifique à nos travaux. Par contre, certaines preuves utiliseront de manière essentielle la nouvelle définition qui suit, qui permet de se limiter à un ensemble dénombrable de blocs.

Soit E un espace de Banach à base de Schauder normalisée (e_n). On construit par induction un sous-corps dénombrable $\mathbf{F}$ de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et tel que pour tout

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

tel que $\lambda_i \in \mathbf{F}$ pour tout i, on ait $\|\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\| \in \mathbf{F}$. Ainsi toute normalisation d'une combinaison $\mathbf{F}$-linéaire de (e_n) reste une combinaison $\mathbf{F}$-linéaire. L'ensemble des combinaisons $\mathbf{F}$-linéaires de (e_n) est dense dans E, et l'ensemble des combinaisons $\mathbf{F}$-linéaires normalisées de (e_n) est dense dans la sphère unité $\mathcal{S}_E$. Dans ce contexte un *bloc* est un vecteur normalisé à support fini $x = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ où $\lambda_i \in \mathbf{F}$. Nous expliciterons les rares cas où l'on utilisera des blocs non normalisés. On appellera $\mathbf{D}$ l'ensemble des blocs dans ce sens.

Lorsqu'on s'intéressera à des bloc sous-espaces de (e_n), on supposera que l'on a choisi le même $\mathbf{F}$ de $\mathbb{R}$ pour toutes les bloc bases (x_n) de (e_n), et donc un vecteur de $[x_n]$ est un bloc de (x_n) si et seulement c'est un bloc de (e_n). L'ensemble $bb(e_n)$ des bloc bases de (e_n) est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{D}^{\mathbb{N}}$, où $\mathbf{D}$ est muni de la topologie discrète. L'ensemble $bb(e_n)$ devient ainsi Polonais, c'est-à dire séparable, métrisable complet.

Si $\Delta = (\delta_n)$ est une suite de réels strictement positifs, $\Delta > 0$, et $\mathbb{A} \subseteq bb(e_n)$, $\mathbb{A}_\Delta$ désigne l'ensemble $\mathbb{A}_\Delta = \{(y_n) \in bb(e_n) \mid \exists (x_n) \in bb(e_n) \; \forall n \; \|x_n - y_n\| < \delta_n\}$.

Introduction

Il est bien connu que le problème de classifier les espaces de Banach (même séparables) à isomorphisme près est extrêmement complexe. L'objet de cette thèse est d'exposer deux manières alternatives de s'attaquer à ce problème, premièrement par la recherche d'une classification "lâche" des espaces de Banach "à sous-espace près", ou deuxièmement par la détermination du niveau de complexité du problème de classification isomorphe, soit en général de tous les espaces de Banach séparables, soit des sous-espaces d'un espace donné.

La pratique montre qu'il est en général très difficile de déterminer si deux espaces de Banach donnés sont ou non isomorphes. Même pour des exemples classiques ce problème est difficile à résoudre. Par exemple ce n'est qu'en 1978, grâce aux travaux de Szankowski sur la propriété d'approximation [101], que l'on a su montrer que tous les espaces ℓ_p, $p \neq 2$, ont un sous-espace non isomorphe à ℓ_p.

Alors que les espaces de dimension finie, ou plus généralement les espaces de Hilbert (ou isomorphes à un espace de Hilbert) peuvent être classifiés à isomorphisme près par leur dimension, via l'existence d'une base de Hilbert pour tout espace de Hilbert, on ne peut espérer obtenir des invariants simples pour classifier les espaces de Banach à isomorphisme près. Nous verrons plus loin comment la théorie de classification des relations d'équivalence analytiques sur les espaces Polonais par leur complexité relative permet de donner un sens précis à cette affirmation. Par exemple, et pour effectuer une comparaison avec le domaine proche des $\mathbb{C}^*$-algèbres, on ne peut espérer avoir des invariants similaires à ceux de certaines classes de $\mathbb{C}^*$-algèbres simples qui sont caractérisées par leurs invariants de K-théorie, voir sur ce thème M. Rørdam [92], et la liste de problèmes ouverts de I. Farah [29].

Comme nous l'annoncions précédemment, il existe deux directions principales de recherche et d'un certain point de vue complémentaires qui permettent de reprendre le problème général de classification isomorphe des espaces de Banach sous des points de vue un peu différents et plus abordables.

Nous appellerons la première direction *le projet de Gowers*. Il s'agit de déterminer une liste de classes d'espaces "élémentaires" ou "caractéristiques" avec de "bonnes" propriétés, par exemple en termes d'opérateurs, et "inévitable" dans le sens où tout espace de Banach devrait contenir un sous-espace dans une des classes de la liste. C'est donc un projet de classification "à sous-espaces près" (d'après Gowers, "a loose classification of Banach spaces up to subspaces").

La deuxième direction est de déterminer la "complexité" d'un espace de Banach X donné, assimilé à la complexité de la relation d'isomorphisme entre les sous-espaces de X (au sens de la théorie de complexité relative des relations d'équivalence analytiques sur les espaces polonais, que nous définirons plus loin). Dans ce sens, ℓ_2 est évidemment un espace dont la complexité associée est la plus faible possible (puisque la relation d'isomorphisme associée est triviale) - et en fait le seul, d'après la solution du problème de l'espace homogène de Gowers et Komorowski - Tomczak-Jaegermann, que nous énoncerons plus loin. Dans l'autre direction, la complexité d'un espace séparable universel comme $C([0,1])$ s'identifie avec la complexité de l'isomorphisme entre tous les espaces de Banach séparables, et nous verrons que celle-ci est immense.

Bien sûr des résultats dans la première direction peuvent donner des informations sur la deuxième. Dans bien des cas les propriétés des espaces caractéristiques de la liste inévitable d'espaces donneront des informations sur la complexité de ces espaces, et donc on obtiendra une limite inférieure de la complexité d'un espace donné en fonction des types de sous-espaces caractéristiques qu'il contient. Inversement, plusieurs classes caractéristiques de la liste seront définies par des propriétés qui s'interprèteront de manière naturelle en termes de complexité de l'isomorphisme entre sous-espaces (ou éventuellement en termes de complexité des relations de plongement et biplongement isomorphes entre sous-espaces).

Projet de classification et trois questions de Gowers

Détaillons maintenant le projet de classification de Gowers "à sous-espaces près". C'est dans l'article fondateur "A infinite Ramsey theorem and some Banach space dichotomies", Annals of Mathematics, publié en 2002, mais dont des versions antérieures étaient disponibles dès le milieu des années 1990, que W.T. Gowers formula ce projet ; mais plusieurs résultats et questions classiques antérieures de la théorie des espaces de Banach peuvent être réinterprétés dans ce cadre. L'objectif est de déterminer une liste de classes "inévitables" d'espaces de Banach, c'est-à dire une liste telle que :

a) chaque classe est héréditaire, ou "pure" c'est-à dire, si un espace X appartient à l'une de ces classes, alors tout sous-espace de X appartient encore à cette classe, ou au moins, dans le cas où la définition de la classe est associée à une base de X, tout bloc sous-espace de X appartient à la même classe,

b) les classes sont "inévitables", dans le sens où tout espace de Banach contient un sous-espace dans une de ces classes,

c) les classes sont disjointes,

d) appartenir à une classe donne beaucoup d'informations sur les opérateurs qui peuvent être définis sur l'espace ou sur ses sous-espaces.

Bien sûr, l'idée de caractériser, à l'intérieur de structures données, certaines sous-structures "fondamentales" ou "élémentaires", qui sont plus simples ou plus régulières, n'est pas nouvelle en mathématiques. On peut penser aux groupes simples en théorie des groupes. Plus proche du domaine des espaces de Banach, on peut aussi penser aux algèbres de Von Neumann et aux facteurs compris dans tout algèbre de von Neumann, et à la classification de ces facteurs en type I, II, III puis sous-types ; voir, par exemple, O. Nielsen [85], et Sasyk -Törnquist [98], où ces différents types sont présentés dans un cadre de théorie descriptive. Cependant le cas des résultats de Gowers est différent, dans le sens où l'existence de facteur compris dans chaque algèbre de von Neumann ne requiert aucune dichotomie ou résultat combinatoire. Les questions difficiles dans cette théorie sont plutôt celles de l'existence d'exemples pour chacun des types de facteurs. Dans la théorie des espaces de Banach, par contre, on utilisera des dichotomies profondes de type Ramsey pour passer à une sous-structure qui est soit très riche, ou soit très pauvre par rapport à un certain critère ; typiquement, on trouvera par exemple un sous-espace sur lequel il existe soit beaucoup, soit peu d'opérateurs.

Observons que ce projet de classification prend son sens une fois que l'on connaît le résultat de Tsirelson en 1974 d'existence d'un espace qui ne contient pas de copie des espaces c_0 et $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$, voir [106]. Pour être concret, rappelons que l'espace de Tsirelson T peut être defini comme un espace à base (e_n) muni de la plus petite norme satisfaisant l'équation implicite

$$\|x\| = \max \|x\|_\infty \vee \frac{1}{2} \sup_{n<E_1<\cdots<E_n} \sum_{i=1}^{n} \|E_i x\|,$$

pour $x \in c_{00}$, ce qui peut être obtenu en définissant $\|.\|_T$ comme la limite d'une suite de normes définies par récurrence. Cette équation implicite impose que l'espace contienne asymptotiquement de nombreux sous-espaces de dimension *finie* de type ℓ_1, ce qui implique que ℓ_1 soit le seul espace du type c_0 ou ℓ_p qui puisse être contenu dans T ; mais de plus, le fait que $\|.\|_T$ soit minimale satisfaisant l'équation implique que ℓ_1 ne se plonge pas dans T.

Théorème 1 (Tsirelson, 1974) *Il existe un espace de Banach T qui ne contient pas de copie des espaces c_0 ou $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$.*

Si tout espace contenait une copie de c_0 ou ℓ_p, une liste formée par ces espaces, avec les propriétés d'opérateurs qui leur sont connues, donnerait une réponse définitive au projet de Gowers. Mais comme l'on connaît maintenant de nombreux exemples d'espaces, dont certains sont bien différents de T, qui ne contiennent pas de copie de c_0 ou $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$, on cherche donc une liste de classes, telle que la "meilleure" classe, ou classe la plus régulière, soit celle des espaces isomorphes à c_0 ou ℓ_p, et telle que les autres classes soient formées d'espaces qui ne contiennent pas de copie de c_0 ou ℓ_p.

Une conjecture plus faible que celle contredite par l'exemple de Tsirelson est celle de savoir si tout espace de Banach contient un sous-espace à base inconditionnelle. L'exemple de T n'y répond pas puisque sa base canonique est inconditionnelle. C'est le problème de la *suite basique inconditionnelle* mentionnée par Mazur dans les années 40. Il fut résolu par Gowers et Maurey dans un article du début des années 1990 [59] qui améliore considérablement le résultat de Tsirelson.

Théorème 2 (Gowers-Maurey, 1993) Problème de la suite basique inconditionnelle. *Il existe un espace de Banach GM qui ne contient pas de suite basique inconditionnelle.*

Suite à une observation de W.B. Johnson, Gowers et Maurey montrèrent que l'espace GM est même *héréditairement indécomposable*, ou HI, c'est-à dire qu'aucun de ses sous-espaces n'est décomposable (où un espace est dit décomposable quand il est isomorphe à une somme directe de deux sous-espaces de dimension infinie). En particulier, l'existence de ce premier exemple d'espace indécomposable répond au problème de décomposition de Lindenstrauss, 1970.

Théorème 3 (Gowers-Maurey, 1993) Problème de décomposition de Lindenstrauss. *L'espace GM est héréditairement indécomposable. En particulier il est indécomposable.*

La construction de GM utilise un procédé inductif similaire à celui de Tsirelson, plus un procédé de codage inspiré des travaux de Schlumprecht [99] et de Maurey-Rosenthal [82] qui rend bien compliquée la définition de la norme de GM. Après avoir obtenu la construction de l'espace GM, Gowers et Maurey démontrèrent que GM, et en fait tout espace HI, possède une autre propriété exotique : il n'est isomorphe à aucun sous-espace propre. Il donne donc une réponse négative au vieux problème de l'hyperplan de Banach. Cependant, Gowers avait entretemps résolu cette conjecture par une modification "inconditionnelle" de l'espace de Gowers-Maurey, que nous noterons G_u. La construction de G_u est très similaire à celle de GM, bien que sa base naturelle soit inconditionnelle, ce qui cependant n'affecte pas fondamentalement les techniques utilisées par Gowers et Maurey.

Théorème 4 (Gowers, puis Gowers-Maurey, 1993-1994) Problème de l'hyperplan de Banach. *Les espaces GM et G_u ne sont pas isomorphes à leurs sous-espaces propres.*

Nous allons voir maintenant que GM et G_u jouent aussi un rôle important dans le problème de classification de Gowers. Peu après son résultat avec Maurey, Gowers démontra qu'il est dans un sens naturel que le premier exemple GM d'espace sans suite basique inconditionnelle soit en fait HI. C'est la *(première) dichotomie* de Gowers :

Théorème 5 (Première dichotomie de Gowers, années 1990)
Tout espace de Banach contient un sous-espace héréditairement indécomposable ou un sous-espace à base inconditionnelle.

Ces deux propriétés sont héréditaires (sous la restriction de passer à des bloc sous-espaces dans le cas de l'inconditionnalité), visiblement incompatibles ; de plus la propriété HI impose de fortes limitations sur les opérateurs définis sur l'espace, qui ont été étudiées dans [59], puis [30], [31]. Par conséquent, la première dichotomie de Gowers peut être réinterprétée comme une première ébauche d'une liste de Gowers, comportant deux classes inévitables.

Dans [58] Gowers démontre un théorème general de type Ramsey pour les bloc-bases d'un espace de Banach à base donnée. Il en déduit une nouvelle preuve de la première dichotomie, ainsi qu'une autre dichotomie, que nous appellerons *deuxième dichotomie* de Gowers et que nous expliciterons un peu plus loin. Cela lui permet, en divisant le cas inconditionnel de la première dichotomie en sous-classes, d'obtenir une nouvelle liste inévitable, de quatre classes d'espaces de Banach, que nous pouvons formuler temporairement de la manière suivante.

Théorème 6 (Liste de Gowers, années 1990) *Tout espace de Banach possède un sous-espace qui est*
- *soit du type de l'espace de Gowers-Maurey GM,*
- *soit du type de l'espace de Gowers G_u,*
- *soit du type de l'espace de Tsirelson T,*
- *soit du type de c_0 et ℓ_p.*

Ainsi les exemples du type de Gowers-Maurey ainsi que leur ancêtre l'espace de Tsirelson ne sont pas seulement des contre-exemples à des questions classiques de la théorie des espaces de Banach, mais apparaissent aussi de manière naturelle comme exemples caractéristiques dans la théorie de classification de Gowers.

Donnons le détail des propriétés considérés dans le Théorème 6. Pour un espace à base, Gowers considère la propriété que les sous-espaces à supports disjoints sur cette base ne sont jamais isomorphes. Il est facile de montrer que cela implique que la base en question est inconditionnelle. D'autre part, il définit un espace comme étant *quasi-minimal* si deux sous-espaces quelconques admettent des sous-espaces isomorphes. Ce sont deux propriétés héréditaires, incompatibles, et :

Théorème 7 (Deuxième dichotomie de Gowers, années 1990) *Tout espace de Banach contient un sous-espace quasi-minimal, ou un sous-espace à base tel que les sous-espaces à supports disjoints ne soient jamais isomorphes.*

En combinant la première et la deuxième dichotomie, on devrait obtenir $2^2 = 4$ classes inévitables d'espaces de Banach. Cependant, les espaces HI sont trivialement quasi-minimaux. Cela réduit la liste issue des deux premières dichotomies à 3 classes. Mais Gowers introduit une nouvelle division, qui n'est pas une dichotomie à proprement parler, en utilisant la notion de *minimalité*, due à Rosenthal : un espace X est minimal si tout sous-espace de X contient une copie isomorphe de X. Ainsi on peut observer que la quasi-minimalité est une notion faible de minimalité. Gowers obtient donc deux sous-cas dans le cas quasi-minimal en distinguant i) le sous-cas d'un espace minimal ii) du sous-cas d'un espace *strictement* quasi-minimal, c'est à dire sans sous-espace minimal, dont l'exemple classique est l'espace de Tsirelson, pour finalement obtenir une liste de quatre classes.

Théorème 8 (Liste de Gowers, années 1990) *Tout espace de Banach possède un sous-espace Y qui satisfait l'une des propriétés suivantes, qui sont toutes possibles et mutuellement exclusives :*

(1) Y est héréditairement indécomposable, comme GM,

(2) Y a une base inconditionnelle telle que les sous-espaces à supports disjoints ne sont jamais isomorphes, comme G_u,

(3) Y a une base inconditionnelle et est strictement quasi-minimal, comme T,

(4) Y a une base inconditionnelle et est minimal, comme c_0 et ℓ_p.

Observons déjà que, comme Gowers lui-même le fait remarquer, ceci n'est qu'une première étape de son projet. En particulier, il serait naturel de raffiner la classes des espaces strictement quasi-minimaux, dont la définition n'utilise pas de vraie dichotomie. Comme l'écrit Gowers, "How might Theorem 7.7. [ici Théorème 8] be refined ? The obvious class to look at is (3) (...) Tsirelson's space ought to be an example of a typical space having a property a little stronger than (3) but not as strong as (4)."

De plus, l'existence d'espaces minimaux bien différents de c_0 et ℓ_p, comme par exemple le dual de l'espace de Tsirelson, ou l'espace de Schlumprecht S, voir [99], suggère de raffiner la liste par des sous-cas du cas (4), cas minimal, de manière à ce que l'un des sous-cas soit celui des espaces isomorphes à c_0 ou ℓ_p. Nous appellerons cette direction de raffinement de la liste de classes inévitables, la *première question de Gowers.*

Question 9 (Première question de Gowers) *Comment raffiner la liste de quatre classes inévitables qui apparaît dans le Théorème 8 ? En particulier, comment peut-on raffiner la classe des espaces à base inconditionnelle et strictement quasi-minimaux, et comment peut-on raffiner la classe des espaces minimaux à base inconditionnelle de manière à ce que l'une des sous-classes soit celle des espaces isomorphes à c_0 ou ℓ_p ?*

Nous montrerons trois nouvelles dichotomies, appelées troisième, quatrième, et cinquième dichotomie, qui permettent d'obtenir une nouvelle liste de Gowers avec 19 classes.

Nous étudierons aussi une autre question qui apparaît dans [58] et que nous reformulons ici. Gowers s'intéresse à un critère de Casazza qui implique que l'espace n'est isomorphe à aucun sous-espace propre. La question de Gowers est de savoir ce que l'on peut dire des espaces qui ne contiennent pas de sous-espaces satisfaisant le critère de Casazza. En réalité ce qui intéresse Gowers est une dichotomie relative à la propriété de ne pas être isomorphe à un de ses sous-espaces propres, le critère de Casazza n'étant qu'un exemple de propriété qui implique l'absence de tels isomorphismes. Et la deuxième dichotomie est un exemple d'une telle dichotomie, puisqu'elle distingue les espaces quasi-minimaux d'espaces qui satisfont le critère de Casazza. Mais on peut supposer qu'il existe une meilleure dichotomie pour la propriété de ne pas être isomorphe à ses sous-espaces propres (nous écrirons "pour le problème de l'hyperplan de Banach"). Comme l'écrit Gowers : "Notice that it is not at all clear that a strictly quasi-minimal space need be isomorphic to a proper subspace. In fact, it is almost certainly not even true. (A suggested counterexample, with a very sketchy argument about why it was a counterexample, was given in [56]), but so far nobody, the author included, has checked whether the details can be filled in.). In the appendix we give a very brief sketch of the construction of a strictly quasi-minimal space such that no subspace is isomorphic to a further proper subspace. This space is likely to be the "worst" quasi-minimal space in the sense that the only operators on the space and its subspaces are essentially those guaranteed to exist by quasi-minimality. One can then ask what can be said about a space not containing one of these "worst" subspaces and hope to divide (3) further."

Question 10 (Deuxième question de Gowers) *Quelle est la "bonne dichotomie" pour le problème de l'hyperplan de Banach ? En particulier, existe t'il une meilleure dichotomie que la deuxième dichotomie pour ce problème ?*

Cette question est liée à celle de savoir quand un espace peut être considéré comme "classique". Bien sûr les notions d'espaces "classiques" et d'espaces "exotiques" sont subjectives, et varient avec la connaissance que nous avons de divers exemples d'espaces de Banach. Par exemple, l'espace de Tsirelson, qui n'était à l'origine qu'un contre-exemple au problème de contenir une copie de c_0 ou ℓ_p, peut être aujourd'hui vu comme un espace classique : d'une part parce qu'il a été découvert il y a plus de trente ans et qu'il a été depuis amplement étudié, d'autre part parce que la définition de sa norme est relativement simple, et enfin parce qu'il satisfait diverses propriétés de régularité, telles que l'isomorphisme avec ses hyperplans ou son carré. A l'opposé, les espaces GM et G_u sont encore vus comme exotiques, pour être des exemples récents, dont la norme ne peut pas être définie en quelques lignes, et qui satisfont des propriétés telles que le non-isomorphisme avec leurs sous-espaces propres, leur carré, etc...

Dans cette thèse nous considérerons comme *classiques* les espaces à base de Schauder saturés de bloc sous-espaces isomorphes à un de leurs sous-espaces propres. C'est un acception encore très large de la notion, qui comprend les cas des espaces c_0, ℓ_p et de Tsirelson, mais nous verrons qu'elle restreint déjà considérablement la liste des exemples connus et correspond également aux exemples dont la norme est relativement simple à définir. Nous considérerons comme *exotiques* les espaces à base de Schauder dont aucun bloc sous-espace n'est isomorphe à un sous-espace propre. Ainsi tout espace de Banach contient un sous-espace exotique ou un sous-espace classique. En résumé, on peut donc interpréter la deuxième question de Gowers comme la recherche d'une dichotomie entre les espaces exotiques, réponses négatives au problème de l'hyperplan de Banach, et les espaces classiques ; ou encore, comme la recherche des propriétés que doivent satisfaire les espaces classiques. Nous verrons comment la quatrième dichotomie donne une réponse, probablement partielle, à cette question.

La deuxième grande direction de recherche concernant l'isomorphisme est celle de la *complexité*. Au lieu de trouver une méthode générale pour résoudre la question de savoir si deux espaces de Banach donnés sont isomorphes, on cherche à déterminer la complexité de ce problème, ou en d'autres termes la difficulté à le résoudre. Cette direction peut être reliée aux questions d"'homogénéité", dont la principale, le problème de l'espace homogène de Banach, fut résolue par Gowers et Komorowski - Tomczak-Jaegermann vers 1993, [70] et [56].

Théorème 11 (Gowers, Komorowski - Tomczak-Jaegermann, $\simeq$ 1993) *Tout espace de Banach homogène, c'est-à dire de dimension infinie et isomorphe à tous ses sous-espaces de dimension infinie, est isomorphe à l'espace de Hilbert séparable de dimension infinie.*

La preuve de ce théorème est basée sur la première dichotomie de Gowers, qui est conséquence du théorème de Gowers de type Ramsey pour les bloc-bases d'une base donnée, et sur un théorème de Komorowski et Tomczak-Jaegermann sur les sous-espaces "sans structure inconditionnelle" d'espaces à base inconditionnelle. Par le fait que les espaces HI sont fortement non homogènes, la première dichotomie de Gowers implique que tout espace homogène doit avoir une base inconditionnelle. Les résultats de Komorowski - Tomczak-Jaegermann impliquent alors que l'espace doit être isomorphe à ℓ_2.

La partie de la preuve du théorème de l'espace homogène fournie par le théorème de Komorowski et Tomczak-Jaegermann repose sur des techniques totalement différentes de celles du théorème de type Ramsey de Gowers, qui concerne les bloc sous-espaces. Ce sont des méthodes de construction de sous-espaces "irréguliers" ou "mal positionnés", c'est à dire avec décomposition de Schauder inconditionnelle de dimension finie mais sans base inconditionnelle. Par conséquent il est naturel de demander quels résultats d'homogénéité l'on peut obtenir en se limitant à des sous-espaces réguliers, comme par exemples les bloc sous-espaces d'un espace à base de Schauder. Dans cet esprit, on dira donc qu'une base de Schauder est *bloc homogène* quand tous ses bloc sous-espaces sont isomorphes.

De fait, certains résultats classiques caractérisent par exemple les espaces c_0 et ℓ_p par les propriétés de leurs bloc sous-espaces (théorème de Zippin [107]) ou de leurs sous-espaces engendrés par des blocs à supports disjoints (théorème de Lindenstrauss-Tzafriri [77]). La conjecture suivante est donc naturelle.

Conjecture 12 *Soit X un espace de Banach avec une base de Schauder bloc homogène. Alors X est isomorphe à c_0 ou l_p.*

Ceci généraliserait le théorème de Zippin (qui donne une réponse positive à ce problème si nous remplaçons l'isomorphisme par l'équivalence des bases correspondantes) et (via le fait que tout espace de Banach contient une suite basique et que c_0 et $\ell_p, p \neq 2$ ne sont pas homogènes) fournirait une démonstration peut-être plus naturelle du Théorème de l'espace homogène, dans le sens où elle n'utiliserait pas le théorème de Komorowski - Tomczak-Jaegermann, mais uniquement des propriétés de sous-espaces "réguliers".

Nous nous intéresserons également à d'autres questions naturelles d'homogénéité en considérant d'autres types de sous-espaces réguliers (sous-espaces à base, à base inconditionnelle, etc..) ou d'autres relations que l'isomorphisme (équivalence permutative des bases ou isomorphisme lipschitzien par exemple). En particulier, rappelons qu'il reste ouvert de savoir si deux espaces de Banach séparables qui sont Lipschitz isomorphes sont nécessairement linéairement isomorphes. Si la réponse est négative, il est naturel de se demander de quelle manière on peut étendre le théorème de l'espace homogène au cas de l'isomorphisme lipschitzien.

Conjecture 13 *Le seul espace qui est Lipschitz isomorphe à tous ses sous-espaces est ℓ_2.*

Notons aussi que les espaces minimaux selon la définition de Rosenthal, sont les espaces homogènes pour la relation $\equiv$ de biplongement. Donc la notion d'homogénéité peut être reliée à des définitions de classes d'espaces de Banach dont certaines appartiennent à la liste inévitable de Gowers.

Il existe une autre direction naturelle pour généraliser le théorème de l'espace homogène. Elle fut suggérée à C. Rosendal et à l'auteur par G. Godefroy :

Question 14 (G. Godefroy, 1999) *Soit X un espace de Banach non isomorphe à ℓ_2. Combien X doit-il contenir de sous-espaces non isomorphes ?*

Bien sûr on pourrait répondre à cette question en observant que tout espace de dimension infinie contient une infinité de sous-espaces non isomorphes ! Il suffit pour cela de considérer les sous-espaces de dimension finie, qui sont non isomorphes quand leurs dimensions diffèrent. Mais bien évidemment, cette réponse n'est guère intéressante, et donc d'une part, nous nous limiterons toujours dans cette thèse aux sous-espaces (fermés) de dimension infinie, et d'autre part nous chercherons à préciser de quel infini il s'agit, en termes de cardinalité ou en termes de "complexité".

Observons déjà que par le théorème de l'espace homogène, un espace non isomorphe à ℓ_2 doit contenir deux sous-espaces non isomorphes au moins. Et notons ici que la question en toute généralité reste ouverte, car nous ignorons s'il n'existe pas un espace avec exactement deux classes de sous-espaces de dimension infinie.

On peut reformuler la Question 14 de la manière suivante pour la rendre plus abordable.

Question 15 *Soit X un espace de Banach séparable qui contient "peu" de sous-espaces deux à deux non isomorphes. A quel point X doit il être "proche" de ℓ_2 ?*

Ces questions prennent leur sens dans le cadre de la classification des relations d'équivalence, en théorie descriptive, qui peut être vue comme une extension de la notion de cardinalité qui apparaît ci-dessus sous-entendue dans les expressions "combien" et "peu". On préférera donc parler de *complexité* (d'une relation d'équivalence) plutôt que de cardinalité (de l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation).

Complexité de l'isomorphisme

La question de la difficulté à (ou complexité de) décider si deux objets sont en une certaine relation ou non est centrale dans la *théorie de classification des relations d'équivalence boréliennes ou analytiques entre espaces Polonais.* La motivation de cette théorie vient du problème général de classifier une classe d'objets mathématiques par une autre, c'est à dire, étant donnée une classe $\mathcal{A}$ d'objets, par exemple, les espaces de Banach séparables, et une notion associée d'isomorphisme, on cherche à trouver des invariants pour les objets de $\mathcal{A}$ à isomorphisme près. De manière plus explicite, on voudrait associer à chaque objet de $\mathcal{A}$ un objet dans une autre catégorie $\mathcal{B}$, de façon à ce que deux objets de $\mathcal{A}$ soient isomorphes si et seulement si leurs images dans $\mathcal{B}$ le sont. Dans ce cas, on considèrera que l'on a classifié les éléments de $\mathcal{A}$ par les éléments de $\mathcal{B}$ à isomorphisme près. Par exemple, le theorème de Banach-Stone classifie les compacts métriques à homéomorphisme près par les espaces de Banach séparables à isométrie près.

En théorie descriptive des ensembles on a coutume de restreindre son attention aux classes d'objets que l'on peut voir comme des espaces *boréliens standards* et aux relations d'isomorphisme correspondantes. Un espace borélien standard est un espace muni d'une σ-algèbre qui s'identifie à la σ-algèbre des boréliens associée à une topologie polonaise (c'est-à dire séparable métrisable complète). On définit alors :

Définition 16 *Soient E et F des relations d'équivalence sur des espaces boréliens standard X et Y respectivement. On dit que E* est boréliennement réductible *à F s'il existe une fonction borélienne $f : X \to Y$ telle que*

$$xEy \Leftrightarrow f(x)Ff(y)$$

pour tous $x, y \in X$. On écrit alors que $E \leqslant_B F$ et l'on dit informellement que E est moins complexe que F. Si $E \leqslant_B F$ et $F \leqslant_B E$, alors E et F sont dites boréliennement biréductibles*, $E \sim_B F$, ou, informellement, de même complexité.*

Comme la plupart des relations naturelles d'isomorphisme sont analytiques ou même boréliennes, on s'intéressera presque exclusivement à ces sous-classes. Donc, si l'on considère deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'objets mathématiques, representées par des espaces Boréliens standard X et Y respectivement, et E et F les relations d'isomorphisme correspondantes sur X et Y, alors une réduction $\phi : X \to Y$ de

E à F peut être vue comme une classification des objets de $\mathcal{A}$ par les objets de $\mathcal{B}$. En résumé la théorie de la complexité des relations d'équivalence est l'étude des invariants qui peuvent être utilisés pour certains objets mathématiques.

Mentionnons une manière légèrement différente de voir la notion de réduction borélienne. Si $\phi : X \to Y$ est une réduction borélienne de E à F, alors on voit facilement que ϕ induit une injection $\hat{\phi} : X/E \to Y/F$ et par conséquent la cardinalité de X/E est inférieure à celle de Y/F. Si l'on n'exigeait pas que f soit borélienne, l'axiome du choix impliquerait que E est réductible à F exactement quand $|X/E| \leqslant |Y/F|$. Mais en imposant que f soit suffisamment régulière, ici borélienne, on peut en fait ainsi définir une notion de *cardinalité effective* pour les espaces quotients, qui raffine le concept classique de cardinalité de Cantor. Ainsi, par exemple, les cardinaux effectifs ne sont pas bien-ordonnés ni linéairement ordonnés [68].

Une grande partie de la théorie générale des relations d'équivalence analytiques concerne la structure de $\leqslant_B$, c'est-à dire, la hiérarchie sous cet ordre des relations d'équivalence analytiques, et la place dans cette hiérarchie des relations d'isomorphisme qui apparaissent de manière naturelle en analyse. On sait maintenant que $\leqslant_B$ est un ordre extrêmement complexe, mais, par ailleurs, que la plupart des problèmes de classification apparaissant de manière naturelle en analyse sont biréductibles avec un nombre relativement restreint de relations d'équivalence. Nous décrirons plus loin les principales de ces relations naturelles ou typiques. Nous verrons aussi que l'on peut définir un espace, noté SB, des espaces de Banach séparables, muni d'une structure borélienne pour lequel les relations naturelles entre espaces sont analytiques, si bien que l'isomorphisme linéaire, l'isométrie, etc... entre les espaces de Banach séparables entrent dans le cadre de la théorie des relations d'équivalence analytiques.

Mentionnons pour l'instant une de ces relations typiques, la relation E_0. C'est la relation d'égalité à pertubations finies près entre suites binaires, c'est-à dire, pour $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$xE_0y \Leftrightarrow \exists n \, \forall m \geqslant n \; x_m = y_m.$$

C'est la première relation naturelle avec un nombre continu de classes qui n'est pas boréliennement réductible à l'égalité entre réels, et elle apparaîtra de manière si récurrente dans les théorèmes concernant la complexité de l'isomorphisme entre espaces de Banach séparables, que nous donnons d'ores et déjà un nom aux espaces qui réduisent E_0 à l'isomorphisme entre leurs sous-espaces.

Définition 17 *Un espace de Banach séparable X est dit* ergodique *si la relation E_0 est boréliennement réductible à l'isomorphisme entre les sous-espaces de X.*

Un espace ergodique peut donc être vu comme un espace sur lequel l'isomorphisme possède déjà une certaine complexité. Un tel espace contient en particulier un nombre continu de sous-espaces non isomorphes, et de plus ceux-ci ne peuvent être classifiés "régulièrement" à isomorphisme près par des nombres réels. La conjecture qui motive notre recherche sur la complexité de l'isomorphisme, et qui étendrait fortement le théorème de l'espace homogène, est la suivante :

Conjecture 18 *Soit X un espace de Banach séparable non isomorphe à ℓ_2. Alors X est ergodique.*

Plus généralement, on peut se poser la question de la complexité de l'isomorphisme entre tous les espaces de Banach séparables, et nous verrons que cette complexité est la plus grande possible.

Enfin, dans une direction similaire, il existe une troisième question formulée par Gowers, Problème 7.9. dans [58]. Il s'agit de savoir quels sont les ensembles partiellement ordonnés qui peuvent être représentés "de manière stabilisée" comme ensemble des sous-espaces d'un espace donné partiellement ordonné par le plongement isomorphe.

Problème 19 (Troisième question de Gowers) *Etant donné un espace de Banach X, soit $\mathbb{P}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-espaces de X, partiellement ordonné par le plongement isomorphe. Pour quels ensembles partiellement ordonnés P existe-t'il un espace de Banach X tel que tout sous-espace Y de X contienne un autre sous-espace Z tel que $\mathbb{P}(Z) = P$?*

La relation qui apparaît dans le Problème 19 est celle du plongement isomorphe entre espaces de Banach séparables, ou, si l'on veut se restreindre à des relations d'équivalence, la relation de biplongement isomorphe entre espaces de Banach. Ainsi le cas où $\mathbb{P}(X)$ est un singleton est le cas minimal pour la relation de biplongement, et correspond au cas où X est minimal dans le sens classiquement défini par Rosenthal.

Gowers remarqua lui-même par un argument simple de diagonalisation que pour tout espace de Banach X, soit l'ensemble partiellement ordonné $\mathbb{P}(X)$ doit contenir un élément minimal, correspondant à un sous-espace minimal - et donc P est un singleton s'il est associé à un tel X, soit $\mathbb{P}(X)$ doit être non dénombrable.

La troisième question de Gowers est donc celle d'une dichotomie entre le cas homogène des espaces minimaux et un cas avec grand nombre de classes de biplongement. La formulation de la question de Gowers ne tient pas compte de la structure borélienne de SB, mais en étendant la question nous obtiendrons des réponses également dans ce cadre, et nous fournirons une telle dichotomie avec un cas non-homogène bien plus complexe que selon la remarque de diagonalisation de Gowers.

Une sous-direction de recherche sur le thème de la complexité rejoint celui des problèmes d'homogénéité. C'est celle de la recherche de théorèmes de dichotomie entre un cas homogène et un cas de grande complexité (souvent, correspondant à une réduction de E_0), mais pour d'autres relations naturelles entre espaces de Banach que l'isomorphisme, ou encore pour des classes spécifiques de sous-espaces. Par exemple, dans le cas des bloc sous-espaces d'un espace à base :

Conjecture 20 *Soit X un espace de Banach avec base de Schauder. Alors soit E_0 est boréliennement réductible à l'isomorphisme entre les bloc sous-espaces de X, soit X contient une copie de c_0 ou $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$.*

En résumé on cherchera donc dans la deuxième direction à trouver des théorèmes combinatoires du type Ramsey, de dichotomie entre un cas de grande complexité pour une relation, et un cas d'homogénéité pour cette relation ; et éventuellement, à résoudre le problème d'homogénéité associé.

Dans cette thèse nous développons le programme de recherche de Gowers. En montrant trois nouvelles dichotomies, appelées troisième, quatrième et cinquième dichotomies, nous raffinons la liste d'espaces de Gowers pour obtenir une nouvelle liste avec 19 types d'espaces élémentaires présents dans tout espace de Banach, répondant ainsi à la première question de Gowers. Nous utilisons la quatrième dichotomie pour obtenir une réponse à la deuxième question de Gowers, en montrant qu'un espace qui ne contient pas de solution négative au problème de l'hyperplan de Gowers doit satisfaire une forme séquentielle de minimalité. Par une étude approfondie de la troisième dichotomie, nous obtenons une réponse générale à la troisième question de Gowers, en montrant que les ensembles partiellement ordonnés de cette question sont soit triviaux soit extrêmement complexes.

Dans une seconde partie nous résolvons le problème de la complexité de l'isomorphisme entre espaces de Banach séparables. Nous montrons que cette complexité est analytique complète, c'est à dire maximum pour les relations analytiques. En ce qui concerne la complexité de l'isomorphisme entre sous-espaces d'un espace donné, nous étudions quelques exemples classiques, ainsi que la complexité des espaces dans chacune des classes de la nouvelle liste de Gowers, et nous montrons que les espaces non ergodiques satisfont des propriétés de régularité et d'homogénéité qui les rapprochent de l'espace de Hilbert. Enfin nous obtenons quelques résultats de dichotomie entre un cas homogène et un cas complexe, pour d'autres relations naturelles que l'isomorphisme entre espaces de Banach.

Nous exposons maintenant en détails les résultats annoncés. Nous les donnerons sans preuve, sauf pour les théorèmes les plus importants, pour lesquels une ébauche ou un plan de démonstration plus ou moins détaillé sera donné : ce sera le cas de la troisième dichotomie, qui sera étudiée en détails, et des quatrièmes et cinquièmes dichotomie, pour la première partie, et du calcul de la complexité de la relation d'isomorphisme entre tous les espaces séparables pour la deuxième partie.

Première partie

Projet de Gowers

Chapitre 1

Une dichotomie pour la minimalité

Dans ce chapitre, nous présentons la preuve de la troisième dichotomie, obtenue par Ferenczi et Rosendal en 2007 [47]. Sauf mention du contraire, les théorèmes et lemmes de ce chapitre sont des résultats de [47]. Nous mentionnerons aussi certains exemples dûs aux mêmes auteurs et qui apparaissent dans [48], prépublication de 2009.

Revenons aux résultats de Gowers, et à la liste de quatre classes d'espaces inévitables de Gowers. Notre point de départ est donc le Théorème 8. La preuve de ce théorème est basé sur le théorème de type Ramsey de Gowers, qui sera aussi la pierre angulaire de la preuve des trois nouvelles dichotomies, que nous obtiendrons soit comme application de ce théorème, soit comme application de sa version obtenue par J. Bagaria et J. Lopez-Abad [11], soit enfin comme application de techniques inspirées par ce résultat. Nous énonçons ce théorème dans une version "dénombrable" qui nous sera nécessaire, et nous expliquons aussi un principe de codage imaginé par J. Lopez-Abad [78].

1.1 Le jeu de Gowers

Soit $E = [e_n]$ donné. Nous définissons le jeu de Gowers, dans la version de Bagaria et Lopez-Abad. Les joueurs I et II jouent des blocs $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ et $y_0 < y_1 < y_2 < \dots$ de la manière suivante : le joueur I joue au k-ième coup du jeu un bloc x_k tel que $x_{k-1} < x_k$. En réponse, II soit choisit de passer, et donc ne joue rien au k-ième coup, soit joue un bloc $y_i \in [x_{l+1}, \dots, x_k]$, où l est le dernier coup où II ait joué un bloc.

$$\begin{array}{lllllllll} \textbf{I} & x_0 & \dots & x_{k_0} & & x_{k_0+1} & \dots & x_{k_1} & \\ \textbf{II} & & & & y_0 \in [x_0, \dots, x_{k_0}] & & & & y_1 \in [x_{k_0+1}, \dots, x_{k_1}] \end{array}$$

On peut donc voir I comme construisant une bloc base (x_i) dans ce jeu, alors que II choisit une bloc base (y_i) de (x_i) qui sera appelée *résultat* du jeu.

La version originale de Gowers de son jeu est légèrement différente : le joueur I y joue des bloc sous-espaces Y_i de dimension infinie de X, et le joueur II répond à chaque coup par un bloc vecteur y_i de Y_i.

Il est clair que si II a une stratégie gagnante dans le jeu de Gowers modifié par Bagaria et Lopez-Abad, alors il a une stratégie gagnante dans le jeu de Gowers originel ; mais en fait les deux jeux sont équivalents, comme cela fut observé par B. Velickovic (voir [11]). La version de Bagaria et Lopez-Abad peut paraître plus naturelle car elle restreint la cardinalité de l'ensemble des stratégies possibles du joueur I.

Dans l'énoncé suivant de [58] , $bb_G(e_i)$ est défini "classiquement"comme l'ensemble de *toutes* les bloc bases normalisées de (e_i), autrement dit formées de vecteurs qui ne sont pas nécessairement dans l'ensemble dénombrable $\mathbf{D}$ défini en fin de préliminaires, et muni de la topologie induite par le produit de la topologie de la norme sur $E = [e_i]$. Nous utilisons la notation $bb_G(e_i)$ pour différencier cet ensemble de l'ensemble $bb(e_i)$ défini en préliminaire.

Théorème 21 (Théorème de Gowers, années 1990) *Soit E un espace de Banach muni d'une base de Schauder (e_i) et soit $\mathbb{A} \subseteq bb_G(e_i)$ un ensemble analytique tel que tout $(x_i) \in bb_G(e_i)$ ait une bloc base (y_i) qui appartienne à $\mathbb{A}$. Alors pour tout $\Delta > 0$, il existe une bloc base $(v_i) \in bb_G(e_i)$ telle que II ait une stratégie pour jouer dans $\mathbb{A}_\Delta$ si I doit jouer des blocs de (v_i).*

Nous utiliserons un codage à l'aide de parties inévitables de la sphère unité d'un espace de Banach, utilisé par López-Abad dans [78]. Rappelons le principe et les principales applications de cette méthode.

Soit E un espace de Banach de dimension infinie, à base de Schauder, et qui ne contient pas de copie de c_0. D'après la solution d'Odell et Schlumprecht au problème de la distortion, [87], E a un bloc sous-espace $[x_n]$ dont la sphère unité admet deux sous-ensembles fermés F_0 et F_1 tels que $\mathrm{dist}(F_0, F_1) = \delta > 0$ et tels que toute bloc base (y_n) de (x_n) admette des bloc vecteurs u et v tels que $u \in F_0$ et $v \in F_1$. Dans ce cas on dira que F_0 et F_1 sont *des parties séparées, inévitables de* $\mathcal{S}_{[x_n]}$.

On peut alors utiliser les parties F_0 et F_1 pour coder des suites infinies de 0 et de 1 de la manière suivante. Si (z_n) est une bloc base de (x_n) telle que pour tout n, $z_n \in F_0 \cup F_1$, on pose $\varphi((z_n)) = \alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ où

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{si } z_n \in F_0\,; \\ 1, & \text{si } z_n \in F_1. \end{cases}$$

On peut alors utiliser les suites infinies de 0 et de 1 pour coder divers objets naturels, tels que les suites de vecteurs à support fini et coordonnées rationnelles, les isomorphismes d'un espace donné dans un autre, etc...

Du fait que F_0 et F_1 sont séparés, on obtient un codage suffisamment rigide pour pouvoir l'étendre aux bloc bases (v_n) telles que $\mathrm{dist}(v_n, F_0 \cup F_1) < \frac{\delta}{2}$, en définissant $\varphi((v_n)) = \beta \in 2^{\mathbb{N}}$, où

$$\beta_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathrm{dist}(v_n, F_0) < \frac{\delta}{2}\,; \\ 1, & \text{si } \mathrm{dist}(v_n, F_1) < \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Ainsi si (z_n) et (v_n) sont des bloc bases telles que $z_n \in F_0 \cup F_1$ et $\|v_n - z_n\| < \frac{\delta}{2}$ pour tout n, alors $\varphi((z_n)) = \varphi((v_n))$.

Il faut remarquer que ces codages sont *inévitables*, i.e., pour toute bloc base (y_n) de (x_n) et tout $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, il existe une bloc base (v_n) de (y_n) telle que $\varphi((v_n)) = \alpha$, *continus*, i.e., pour connaître un segment initial de α il suffit de connaître un segment initial de (v_n), et *stables par des petites perturbations*.

Donnons un exemple utile de l'utilisation de l'inévitabilité du codage. Soit $\mathbb{B}$ un ensemble de paires $((y_n), \alpha)$, où (y_n) est une bloc base de (x_n) et $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, tel que pour toute bloc base (z_n) de (x_n) il existe une bloc base (y_n) de (z_n) et un α telles que $((y_n), \alpha) \in \mathbb{B}$. Alors il est facile de vérifier que pour toute bloc base (z_n) de (x_n) il existe une bloc base (y_n) telle que pour tout n, $y_{2n+1} \in F_0 \cup F_1$ et $((y_{2n}), \varphi((y_{2n+1}))) \in \mathbb{B}$. Ainsi par exemple, si un espace X à base de Schauder est saturé de bloc sous-espaces isomorphes à un certain espace E, le théorème de Gowers et le procédé de codage nous permettent d'obtenir, quitte à passer à un bloc sous-espace $[x_n]$, une fonction **continue** sur $bb(x_n)$ qui associe à tout $(y_n) \in bb(x_n)$, en plus d'un sous-espace de $[y_n]$ isomorphe à A, un opérateur qui témoigne de cet isomorphisme.

Revenons maintenant au point de départ de notre recherche, le Théorème 8, conséquence du théorème de type Ramsey de Gowers, que nous exprimons ici en termes de bloc sous-espaces.

Théorème 22 (Gowers, années 1990) *Tout espace de Banach muni d'une base de Schauder contient un bloc sous-espace $Y = [y_n]$ qui satisfait l'une des propriétés suivantes, qui sont toutes possibles et mutuellement exclusives :*
(1) Y est héréditairement indécomposable,
(2) (y_n) est inconditionnelle et les sous-espaces de Y à supports disjoints ne sont jamais isomorphes,
(3) (y_n) est inconditionnelle et Y est strictement quasi-minimal,
(4) (y_n) est inconditionnelle et Y est minimal.

Comme nous l'avons écrit, la séparation entre les classes (3) et (4), c'est-à-dire entre les espaces minimaux et ceux qui sont strictement quasi-minimaux, n'est pas basée sur une "vraie" dichotomie, mais uniquement sur la définition des espaces strictement quasi-minimaux. Notre premier objectif est donc de raffiner le cas (3), strictement quasi-minimal, en démontrant la dichotomie qui semble manquer pour les espaces qui n'ont pas de sous-espace minimal.

Un premier pas dans cette direction a été entrepris par A. Pełczar en 2003. Elle a montré que tout espace strictement quasi-minimal contient un sous-espace avec la propriété additionnelle de ne pas contenir de suite *sous-symétrique* [90]. Nous avons obtenu un résultat plus fort en 2006 [35] en montrant que le même résultat est valable si l'on remplace l'hypothèse de saturation par des suites sous-symétriques (c'est à dire des suites basiques homogènes pour l'équivalence) par une hypothèse de saturation par des suites basiques *homogènes pour le plongement* (une suite basique (x_n) est homogène pour le plongement si $[x_n]$ se plonge dans tout sous-espace engendré par une sous-suite de (x_n)).

Une étape fondamentale des preuves de [90] et [35] est la notion d'*asymptoticité*, basée sur les *jeux asymptotiques*.

1.2 Jeux asymptotiques

La notion classique de jeu asymptotique est celle de jeu asymptotique fini. Un *jeu asymptotique de longueur* k dans un espace E à base est un jeu dans lequel I joue des entiers n_i et II des bloc-vecteurs x_i de supports inclus dans $[n_i, +\infty)$, et dont le résultat est la suite finie $(x_i)_{i \leqslant k}$ de longueur k. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcccccccc} \textbf{I} & n_0 & & n_1 & & \dots & n_k & \\ \textbf{II} & & x_0 \geqslant n_0 & & x_1 \geqslant n_1 & & \dots & x_k \geqslant n_k \end{array}$$

Jeu asymptotique de longueur $k \in \mathbb{N}$

On peut supposer que le joueur I choisit un entier n_i supérieur au support de x_{i-1}, pour $i \geqslant 1$, si bien que le résultat $(x_i)_i$ est une suite de blocs successifs. Classiquement les jeux asymptotiques ont été étudiées en 1995 par Maurey, V. Milman et Tomczak-Jaegermann pour définir une notion de structure asympotique [81]. Ainsi une base (y_n) est *asymptotique* dans $[x_n]$, ou est une *structure asymptotique* de $[x_n]$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\epsilon > 0$, le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu asymptotique de longueur k dans $[x_n]$ pour obtenir une suite $1 + \epsilon$-équivalente à $(y_1, \dots, y_k)$.

Dans ce contexte une base est *asymptotiquement* ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, si toute structure asymptotique dans cette base est équivalente à la base canonique de ℓ_p (ou c_0 si $p = +\infty$), ou, de manière équivalente [81], s'il existe une constante C telle que pour tout k, I a une stratégie gagnante dans le jeu asymptotique de longueur k pour que le résultat soit C-équivalent à la base canonique de ℓ_p^k.

Il existe aussi une notion plus forte de base asymptotiquement ℓ_p associée à l'exemple de l'espace de Tsirelson. Une base (x_n) est *asymptotiquement* ℓ_p dans cet autre contexte s'il existe $C \geqslant 1$ telle que pour toute suite finie de longueur k de bloc-vecteurs normalisés successifs (x_i) de supports inclus dans $[k, +\infty)$, la suite $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est C-équivalente à la base canonique de ℓ_p^k. Comme d'après [81], toute base asymptotiquement ℓ_p dans le sens des jeux asymptotiques contient une bloc-base qui est asymptotiquement ℓ_p dans le sens de l'espace de Tsirelson, et comme une grande partie de notre recherche concerne des propriétés à sous-espace près, il n'y aura pas d'inconvénient à la coexistence de ces deux notions d'asymptoticité ℓ_p. Ainsi nous utiliserons exclusivement dans cette thèse la notion associée à l'espace de Tsirelson, la plus forte, pour laquelle les bases associées seront appelées "asymptotiquement ℓ_p".

Dans [90] il est en fait nécessaire de considérer des jeux asymptotiques de longueur *infinie*, définies par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcccccccc} \textbf{I} & n_0 & & n_1 & & n_2 & & \ldots & \ldots \\ \textbf{II} & & x_0 \geqslant n_0 & & x_1 \geqslant n_1 & & x_2 \geqslant n_2 & \ldots & \ldots \end{array}$$

Jeu asymptotique infini

Le résultat d'un tel jeu est la bloc-base infinie (x_n). La preuve du théorème de Pełczar est basée sur le fait évident que si une suite basique (e_i) est sous-symétrique et (x_i) est une bloc-base de (e_i), alos II a une stratégie gagnante dans le jeu asymptotique infini dans $E = [e_i]$ pour que le résultat soit équivalent à (x_i) [90].

C. Rosendal a analysé les jeux asymptotiques infinis en 2006 dans [96] (une étude antérieure avait été faite par E. Odell et T. Schlumprecht en 2002 dans [89]), et montré que les conditions nécessaire les plus évidentes pour que II ait une stratégie pour jouer dans un ensemble donné sont aussi suffisantes. Plus précisément, considérons les définitions suivantes :

Définition 23 *Soit E un espace à base de Schauder (e_i). On dira qu'un sous-ensemble A de $bb(e_i)$ est* asymptotique *dans la base (e_i) si II a une stratégie gagnante dans le jeu asymptotique infini dans E pour que le résultat soit dans A.*

Ici il faut bien faire la différence entre un sous-ensemble asymptotique A de $bb(e_i)$ d'une part, qui suppose que (e_i) possède de nombreuses bloc-bases qui appartiennent à A, et qui est une notion liée aux jeux asymptotiques infinis, et une suite basique (y_n) asymptotique dans une base (e_i) d'autre part, qui n'implique pas que $E = [e_i]$ contienne une copie de $[y_n]$, et qui est liée aux jeux asymptotiques finis. Ainsi si A est l'ensemble des bloc-bases équivalents à une base donnée (y_n), et A est un sous-ensemble asymptotique de $bb(e_i)$, alors en particulier (y_n) est asymptotique dans (e_i), mais la réciproque est bien entendu fausse. Par exemple la base canonique de ℓ_1 est asymptotique dans l'espace de Tsirelson T mais T ne contient pas de copie de ℓ_1.

Définition 24 *Une bloc-base (x_i) est* étalée *par une suite croissante d'entiers (n_i) si $x_0 > n_0$ et pour tout i, il existe j tel que $x_i < n_j < n_{j+1} < x_{i+1}$.*

Un ensemble A est étendu *dans une base (e_n) si pour toute suite croissante d'entiers (n_i) il existe une bloc-base (x_i) dans A qui est étalée par (n_i).*

Si un ensemble A est étendu dans une base (e_n), on peut donc dire que l'on peut trouver des bloc-bases appartenant à A arbitrairement étalées sur la base, la mesure de l'étalement étant donnée par la suite croissante d'entiers arbitraires (n_i). On peut de manière équivalente formuler la propriété étendue d'un ensemble par la propriété suivante de suites d'intervalles successifs $(I_i)_i$: quelle que soit une telle suite $(I_i)_i$, il existe $(x_i)_i$ dans A telle que $I_0 < x_0$ et pour tout i, il existe j tel que $x_i < I_j < x_{i+1}$. Pour voir cela il suffit bien sûr de poser $I_i = [n_i, n_{i+1} - 1]$.

Il est alors clair que si un ensemble A est asymptotique dans une base (e_i) alors il est étendu dans cette base. En effet pour toute suite (m_i) il suffit de faire jouer au joueur I, $n_0 = m_0$ au premier coup, puis au coup i, $n_i = m_j$ où j est le plus petit j tel que $x_{i-1} < m_{j-1}$. La suite produite par une stratégie gagnante pour II dans le jeu asymptotique associé à A, en réponse à cette stratégie de I, est par construction dans A et étalée par (n_i).

Le résultat fondamental de Rosendal est que la réciproque de cette implication est vérifiée à une perturbation près.

Proposition 25 (Rosendal, 2006) *Soit (e_i) une base de Schauder et A un ensemble étendu dans (e_i). Alors pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble A_ϵ est asymptotique dans (e_i).*

Dans l'article de l'auteur [35], pour généraliser le résultat des suites sous-symétriques aux suites homogènes pour le plongement, il est nécessaire de définir des *jeux asymptotiques généralisés*. Un jeu asymptotique généralisé dans un espace E avec une base (e_i) est un jeu dans lequel I joue des entiers n_i et II des entiers m_i et des vecteurs x_i tels que supp $x_i \subseteq [n_1, m_1] \cup \ldots \cup [n_i, m_i]$, et le résultat est la suite (x_i), qui n'est plus nécessairement une bloc-base.

$$\begin{array}{llllll}
\textbf{I} & n_0 & & n_1 & & \ldots \\
\textbf{II} & & m_0, x_0, & & m_1, x_1, & \ldots \\
 & & \text{supp } x_0 \subset [n_0, m_0] & & \text{supp } x_1 \subset [n_0, m_0] \cup [n_1, m_1] &
\end{array}$$

Jeu asymptotique généralisé

On peut observer qu'au premier coup d'un tel jeu, le joueur II peut choisir, étant donné un entier n, un entier m_0 suffisamment grand pour lui permettre de choisir n'importe quels vecteurs supportés après n_0 comme n premiers vecteurs du résultat. Cela signifie que tout est décidé dès le premier coup pour un jeu asymptotique généralisé fini, et donc que seuls les jeux asymptotiques généralisés infinis ont un intérêt.

Pour les jeux asymptotiques généralisés, l'introduction des entiers m_i et des intervalles $[n_i, m_i]$ permet de de préserver à la fois une forme de compacité pour les parties initiales des suites jouées et une forme d'asymptoticité, tout en autorisant le joueur II à produire un résultat qui n'est pas forcément une bloc-base.

Les méthodes de Rosendal pour les jeux asymptotiques infinis s'étendent facilement au cadre des jeux asymptotiques généralisés, et motivent la définition d'une notion d'espace "à l'étroit" dans une base (e_n), qui sera reliée à la non-existence d'une stratégie gagnante pour I dans un jeu asymptotique généralisé, d'une manière parallèle à celle par laquelle les ensembles non étendus sont reliés aux ensembles non asymptotiques par la Proposition 25.

Définition 26 *Un espace Y est* à l'étroit *dans une suite basique (e_i) s'il existe une suite de parties successives $I_0 < I_1 < I_2 < \ldots$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tous sous-ensembles infinis $A \subseteq \mathbb{N}$, on ait*

$$Y \not\sqsubseteq [e_n \mid n \notin \bigcup_{i \in A} I_i].$$

On dit alors qu'une base est étroite *si tout sous-espace y est à l'étroit, et qu'un espace est* étroit *s'il possède une base étroite.*

En d'autres termes, Y est à l'étroit dans (e_i) quand tout plongement de Y dans $[e_i]$ a une image "de grande extension" par rapport aux sous-suites de la base (e_i). Dans cette définition, on peut clairement supposer que les parties I_i sont des intervalles formant une partition de $\mathbb{N}$. Cependant pour certaines définitions d'espaces étroits associées à certains choix des I_i, il sera utile de pouvoir choisir des parties I_i qui ne seront pas nécessairement des intervalles. Nous verrons aussi que la propriété étroite est sous-jacente à certaines propriétés déjà considérées par Gowers pour les espaces de Gowers-Maurey, ou par Casazza et Shura pour l'espace de Tsirelson.

Il est clair qu'un espace minimal à base de Schauder ne peut être à l'étroit dans lui-même et par conséquent ne peut être étroit. Inversement, du fait que les bloc-bases d'une base étroite sont de nouveau étroites, on déduit facilement :

Lemme 27 *Un espace étroit ne contient pas de sous-espace minimal.*

Il est aussi intéressant d'observer que toute suite basique incluse dans un espace étroit réflexif est à nouveau étroite.

On va montrer qu'essentiellement un bloc sous-espace $Y = [y_i]$ n'est pas à l'étroit dans (e_i) quand II a une stratégie gagnante dans le jeu asymptotique généralisé dans $[e_i]$ pour produire une suite équivalente à (y_i), Lemme 29 . Cela reliera la notion de base étroite aux méthodes de [35], et en étendant ces méthodes nous obtiendrons la dichotomie voulue pour les espaces minimaux :

Théorème 28 (Troisième dichotomie) *Soit E un espace de Banach sans sous-espace minimal. Alors E a un sous-espace étroit.*

Le Théorème 28 étend les théorèmes de [90] et de [35], puisqu'il est clair qu'un espace étroit ne peut pas contenir de bloc base sous-symétrique ou même homogène pour le plongement. En particulier il implique qu'un espace strictement quasi-minimal doit contenir un sous-espace étroit et quasi-minimal. On verra aussi que l'espace de Tsirelson, ainsi que ses p-convexications, est étroit.

1.3 Un jeu asymptotique généralisé

Nous donnons ici l'idée de la preuve de la troisième dichotomie. Soit $X = [x_n]$ et $Y = [y_n]$ deux espaces de Banach avec base de Schauder. On définit le jeu

$H_{Y,X}$ avec constante $C \geqslant 1$ entre deux joueurs I et II de la manière suivante : à chaque coup, I joue un entier naturel n_i, alors que II joue un bloc vecteur non nécessairement normalisé $u_i \in X$ et un entier naturel m_i tel que

$$u_i \in X[n_0, m_0] + \ldots + X[n_i, m_i],$$

où l'on écrit $X[k, m]$ pour signifier $[x_n]_{k \leqslant n \leqslant m}$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\mathbf{I} & n_0 & & n_1 & & n_2 & & n_3 & & \ldots \\
\mathbf{II} & & u_0, m_0 & & u_1, m_1 & & u_2, m_2 & & u_3, m_3 & \ldots
\end{array}$$

Jeu généralisé $H_{Y,X}$

On dit que la suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est le *résultat* du jeu, et que II gagne le jeu si $(u_i) \sim_C (y_i)$.

On voit donc que le jeu $H_{Y,X}$ avec constante $C \geqslant 1$ est un jeu généralisé asymptotique, joué dans X, pour obtenir une suite C-équivalente à la base donnée de Y. En d'autres termes, $H_{Y,X}$ est un jeu dans lequel II cherche à reproduire une copie de Y dans X, en suivant les règles explicitées ci-dessus.

Notons que $H_{Y,X}$ est un jeu ouvert, c'est à dire que l'ensemble des résultats pour lesquels I gagne le jeu est ouvert, et par conséquent déterminé, voir [67], c'est-à dire que ou I ou II possède une stratégie gagnante pour $H_{Y,X}$.

Si X est un espace avec base de Schauder (x_n), Y un espace de Banach, $I_0 < I_1 < I_2 < \ldots$ une suite de parties non vides de $\mathbb{N}$ et K une constante, on écrit

$$Y \sqsubseteq_K (X, I_i)$$

s'il existe une partie infinie $A \subseteq \mathbb{N}$ contenant 0 telle que

$$Y \sqsubseteq_K [x_n \mid n \notin \bigcup_{i \in A} I_i],$$

c'est-à dire, si l'espace Y se plonge avec constante K dans l'espace engendré par $(x_n)_{n \notin \bigcup_{i \in A} I_i}$. On écrit aussi

$$Y \sqsubseteq (X, I_i)$$

s'il existe une partie infinie $A \subseteq \mathbb{N}$ telle que $Y \sqsubseteq [x_n \mid n \notin \bigcup_{i \in A} I_i]$. Remarquons que dans le dernier cas on peut toujours supposer que $0 \in A$ en perturbant le plongement par un opérateur de rang fini.

Il est clair, pour les mêmes raisons que celles exposées lors de la discussion avant la Proposition 25, que si II a une stratégie gagnante dans le jeu $H_{Y,X}$ avec constante K, alors pour toute suite d'intervalles (I_i), $Y \sqsubseteq_K (X, I_i)$. Grâce à la détermination des jeux ouverts, le lemme suivant, similaire à la Proposition 25, et dont la preuve est basée sur la compacité de la sphère de $[x_n]_{n\in d}$ pour toute partie finie d de $\mathbb{N}$, montre que la réciproque est vraie à une perturbation près.

Lemme 29 *Soit X un espace de Banach à base (x_n), K, ϵ des constantes strictement positives, et Y un bloc sous-espace de X, tels qu'il existe une stratégie gagnante pour I dans le jeu $H_{Y,X}$ avec constante $K+\epsilon$. Alors il existe une suite successive d'intervalles (I_j) telle que*

$$Y \not\sqsubseteq_K (X, I_j).$$

Par une diagonalisation et par le lemme précédent, on obtient alors :

Corollaire 30 *Soit $E = [e_n]$ un espace de Banach tel que pour tout bloc sous-espace $Z \leqslant E$ et toute constante $C \geqslant 1$, il existe un bloc sous-espace $X \leqslant Z$ tel que pour tout bloc sous-espace $Y \leqslant X$, I ait une stratégie gagnante dans le jeu $H_{Y,X}$ avec constante C. Alors il existe un bloc sous-espace $X \leqslant E$ qui est étroit.*

Plus loin nous verrons que, quitte à passer à un sous-espace, chaque suite d'intervalles (I_j) qui apparaît associée à chaque Y dans la caractérisation de l'étroitesse de X en conclusion du Corollaire 30 peut être choisie de manière borélienne, et même continue, en fonction de Y.

1.4 Un jeu pour la minimalité

Pour L et M deux bloc sous-espaces de E, on définit le jeu infini $G_{L,M}$ avec constante $C \geqslant 1$ entre deux joueurs de la manière suivante. A chaque tour le joueur I choisit un sous-espace $E_i \subseteq L$ engendré par une bloc suite finie de L, un bloc vecteur normalisé $u_i \in E_0 + \ldots + E_i$, et un entier m_i. Au premier tour le joueur II joue un entier n_0, et à tous les tours suivants II joue un sous-espace F_i engendré par une bloc suite finie de M, un bloc vecteur (non nécessairement normalisé) $v_i \in F_0 + \ldots + F_i$ et un entier n_{i+1}. De plus, on demande que $n_i \leqslant E_i$ et $m_i \leqslant F_i$.

On a ainsi le diagramme suivant :

I	$n_0 \leqslant E_0 \subseteq L$ $u_0 \in E_0, m_0$		$n_1 \leqslant E_1 \subseteq L$ $u_1 \in E_0 + E_1, m_1$		$\ldots$
II n_0		$m_0 \leqslant F_0 \subseteq M$ $v_0 \in F_0, n_1$		$m_1 \leqslant F_1 \subseteq M$ $v_1 \in F_0 + F_1, n_2$	

Jeu généralisé $G_{L,M}$

Le *résultat* du jeu est la paire de suites infinies (u_i) et (v_i) et on dit que le joueur II gagne le jeu si $(u_i) \sim_C (v_i)$.

Le jeu $G_{L,M}$ peut donc être vu comme une version "2-dimensionnelle" d'un jeu asymptotique généralisé $H_{L,M}$: dans $G_{L,M}$, la suite (u_n), à laquelle la suite (v_n) construite par II doit être C-équivalente, est non pas fixée à l'avance, mais construite au fur et à mesure du jeu par I. Bien que ce jeu paraisse plus difficile à gagner par le joueur II, on a la relation suivante entre les jeux $G_{L,M}$ et $H_{L,M}$.

Lemme 31 *Soit E un espace à base de Schauder, X et Y des bloc sous-espaces de E. Si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu $H_{Y,X}$ avec constante C, alors II a une stratégie gagnante dans le jeu $G_{Y,X}$ avec constante C.*

Cette relation est une conséquence de la définition de ces jeux et du fait que si deux suites (w_i) et (y_i) sont C-équivalentes, et u_i et v_i sont définies par les mêmes coefficients sur respectivement (w_i) et (y_i), alors $(u_i) \sim_C (v_i)$.

1.5 La troisième dichotomie

On peut maintenant démontrer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 32 (Troisième dichotomie) *Soit E un espace de Banach avec une base (e_i). Alors E contient soit un bloc sous-espace minimal, soit un bloc sous-espace étroit.*

Preuve : Supposons que E n'ait pas de bloc-base étroite. D'après le Corollaire 30, on peut supposer que pour une certaine constante C et pour tout bloc sous-espace $X \leqslant E$, il existe un autre bloc sous-espace $Y \leqslant X$ tel que I n'ait pas de stratégie gagnante dans le jeu $H_{Y,X}$ avec constante C. D'après la détermination du jeu $H_{Y,X}$ qui est ouvert pour I, ceci implique que pour tout bloc sous-espace $X \leqslant E$ il existe un bloc sous-espace $Y \leqslant X$ tel que II ait une stratégie gagnante dans le jeu $H_{Y,X}$ avec constante C.

On définit un *état* comme une paire (a, b) avec $a, b \in (\mathbf{D'} \times \mathbb{F})^{<\omega}$, où $\mathbb{F}$ est l'ensemble des sous-espaces engendrés par des bloc suites finies et $\mathbf{D'}$ l'ensemble des blocs, non nécessairement normalisés, tels que $|a| = |b|$ ou $|a| = |b| + 1$. L'ensemble S des états est dénombrable, et correspond aux positions possibles d'un jeu $G_{L,M}$ après un nombre fini de coups, restreintes aux éléments qui affectent le résultat du jeu à partir de cette position (c'est-à dire que les entiers m_i et n_i sont oubliés).

Pour chaque état $s = (a, b)$ on définit le jeu $G_{L,M}(s)$ d'une manière similaire à $G_{L,M}$ selon que $|a| = |b|$ ou $|a| = |b| + 1$. Pour éviter que la notation ne devienne pesante, nous le définissons par deux exemples.

Si $a = (a_0, A_0, a_1, A_1)$, $b = (b_0, B_0, b_1, B_1)$, le jeu $G_{L,M}(s)$ commence par II qui joue un entier n_2, puis I qui joue (u_2, E_2, m_2) avec $n_2 \leqslant E_2 \subseteq L$ et $u_2 \in A_0 + A_1 + E_2$, puis II qui joue (v_2, F_2, n_3) avec $m_2 \leqslant F_2 \subseteq M$ et $v_2 \in B_0 + B_1 + F_2$, etc, et le résultat du jeu est la paire de suites infinies $(a_0, a_1, u_2, \ldots)$ et $(b_0, b_1, v_2, \ldots)$.

$$\begin{array}{llll}
\textbf{I} & & n_2 \leqslant E_2 \subseteq L & & \dots \\
& & u_2 \in A_0 + A_1 + E_2, m_2 & & \\
\textbf{II} & n_2 & & m_2 \leqslant F_2 \subseteq M & \dots \\
& & & v_2 \in B_0 + B_1 + F_2, n_3 &
\end{array}$$

Dans ce cas, le joueur II gagne le jeu $G_{L,M}(a,b)$ si les suites $(a_0, a_1, u_2, \dots)$ et $(b_0, b_1, v_2, \dots)$ sont C-équivalentes.

Si $a = (a_0, A_0, a_1, A_1)$, $b = (b_0, B_0)$, le jeu $G_{L,M}(s)$ commence par I qui joue un entier m_1, puis II qui joue (v_1, F_1, n_2) avec $m_1 \leqslant F_1 \subseteq M$ et $v_1 \in B_0 + F_1$, puis I qui joue (u_2, E_2, m_2) avec $n_2 \leqslant E_2 \subseteq L$ et $u_2 \in A_0 + A_1 + E_2$, etc, et le résultat du jeu est la paire de suites infinies $(a_0, a_1, u_2, \dots)$ et $(b_0, v_1, v_2, \dots)$.

$$\begin{array}{llll}
\textbf{I} & m_1 & & n_2 \leqslant E_2 \subseteq L \quad \dots \\
& & & u_2 \in A_0 + A_1 + E_2, m_2 \\
\textbf{II} & & m_1 \leqslant F_1 \subseteq M & \dots \\
& & v_1 \in B_0 + F_1, n_2 &
\end{array}$$

Dans ce cas, le joueur II gagne le jeu $G_{L,M}(a,b)$ si les suites $(a_0, a_1, u_2, \dots)$ et $(b_0, v_1, v_2, \dots)$ sont C-équivalentes.

Le lemme suivant est bien connu et s'obtient par une simple diagonalisation.

Lemme 33 *Soit N un ensemble dénombrable et soit $\mu \colon bb(E) \to \mathcal{P}(N)$ satisfaisant soit*

$$V \leqslant^* W \Rightarrow \mu(V) \subseteq \mu(W)$$

ou

$$V \leqslant^* W \Rightarrow \mu(V) \supseteq \mu(W).$$

Alors il existe un bloc sous-espace stabilisant $V_0 \leqslant E$, c'est-à dire tel que $\mu(V) = \mu(V_0)$ pour tout $V \leqslant^* V_0$.

On va utiliser ce lemme deux fois pour obtenir une double stabilisation, c'est à dire à la fois par rapport à L et à M, des stratégies gagnantes des jeux $G_{L,M}$.

Soit $\tau \colon bb(E) \to \mathcal{P}(S)$ défini par

$s \in \tau(M) \Leftrightarrow \exists L \leqslant M$ tel que II a une stratégie gagnante pour $G_{L,M}(s)$.

La nature asymptotique du jeu implique que $M' \leqslant^* M \Rightarrow \tau(M') \subseteq \tau(M)$, et donc par le Lemme 33 il existe $M_0 \leqslant E$ qui est stabilisant pour τ. On peut alors définir $\rho \colon bb(E) \to \mathcal{P}(S)$ par

$$s \in \rho(L) \Leftrightarrow \text{ II a une stratégie gagnante dans } G_{L,M_0}(s).$$

De même $L' \leqslant^* L \Rightarrow \rho(L') \supseteq \rho(L)$ et par conséquent il existe $L_0 \leqslant M_0$ stabilisant pour ρ. Finalement, il est facile de vérifier que $\rho(L_0) = \tau(L_0) = \tau(M_0)$.

Lemme 34 *Pour tout $M \leqslant L_0$, II a une stratégie gagnante pour le jeu $G_{L_0,M}$.*

Preuve : Soit M un bloc sous-espace de L_0. On commence par montrer que $(\emptyset, \emptyset) \in \tau(L_0)$. Pour voir cela, on remarque que comme $L_0 \leqslant E$, il existe $Y \leqslant L_0$ tel que II ait une stratégie gagnante pour H_{Y,L_0} et par conséquent, d'après le Lemme 31, également une stratégie gagnante pour G_{Y,L_0} avec constante C. Donc $(\emptyset, \emptyset) \in \tau(L_0)$.

Nous montrons alors que pour tous les états

$$((u_0, E_0, \ldots, u_i, E_i), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i)) \in \tau(L_0),$$

il existe n tel que pour tous $n \leqslant E \subseteq L_0$ et $u \in E_0 + \ldots + E_i + E$, on ait

$$((u_0, E_0, \ldots, u_i, E_i, u, E), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i)) \in \tau(L_0).$$

De même, nous montrons que pour tous les états

$$((u_0, E_0, \ldots, u_{i+1}, E_{i+1}), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i)) \in \tau(L_0)$$

et pour tout m il existe $m \leqslant F \subseteq M$ et $v \in F_0 + \ldots + F_i + F$ tels que

$$((u_0, E_0, \ldots, u_{i+1}, E_{i+1}), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i, v, F)) \in \tau(L_0).$$

Comme la condition qui définit le gain pour $G_{L_0,M}$ est fermée, ceci démontre que II a une stratégie gagnante pour $G_{L_0,M}$ (sauf pour les entiers m et n, $\tau(L_0)$ est en fait une "quasi-stratégie" gagnante pour II).

Supposons donc que

$$s = ((u_0, E_0, \ldots, u_i, E_i), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i)) \in \tau(L_0) = \rho(L_0),$$

alors II a une stratégie gagnante pour $G_{L_0,M_0}(s)$ et donc il existe n tel que pour tous $n \leqslant E \subseteq L_0$ et $u \in E_0 + \ldots + E_i + E$, II a une stratégie gagnante pour $G_{L_0,M_0}(s')$, où

$$s' = ((u_0, E_0, \ldots, u_i, E_i, u, E), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i)).$$

Donc $s' \in \rho(L_0) = \tau(L_0)$.

De manière similaire, si

$$s = ((u_0, E_0, \ldots, u_{i+1}, E_{i+1}), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i)) \in \tau(L_0) = \tau(M)$$

et m est donné, alors comme II a une stratégie gagnante pour $G_{L,M}(s)$ pour un certain $L \leqslant M$, il existe $m \leqslant F \subseteq M$ et $v \in F_0 + \ldots + F_i + F$ tels que II a une stratégie gagnante pour $G_{L,M}(s')$, où

$$s' = ((u_0, E_0, \ldots, u_{i+1}, E_{i+1}), (v_0, F_0, \ldots, v_i, F_i, v, F)).$$

Donc $s' \in \tau(M) = \tau(L_0)$. $\square$

Choisissons maintenant $Y = [y_i] \leqslant L_0$ tel que II ait une stratégie gagnante pour H_{Y,L_0}. On va montrer que tout bloc sous-espace M de L_0 contient une copie C^2-isomorphe de Y, ce qui implique que Y est $C^2 + \epsilon$-minimal pour tout $\epsilon > 0$.

Pour voir cela, remarquons que comme II a une stratégie gagnante pour H_{Y,L_0}, le joueur I a une stratégie dans $G_{L_0,M}$ pour produire une suite (u_i) qui est C-équivalente à la base (y_i). De plus, on peut exiger que I joue $m_i = 0$. A l'aide de sa stratégie gagnante pour $G_{L_0,M}$, II peut alors répondre en produisant une suite (v_i) dans M telle que $(v_i) \sim_C (u_i)$. Donc $(v_i) \sim_{C^2} (y_i)$ et $Y \sqsubseteq_{C^2} M$. $\square$

La partie de la preuve qui consiste en une double diagonalisation est exactement similaire à celles de Pełczar [90] et du résultat antérieur de l'auteur concernant les suites basiques homogènes pour le plongement [35]. C'est à notre connaissance dans l'article de Pełczar qu'apparaît pour la première fois cette méthode.

Notons qu'il est capital pour ce type de preuve que la propriété considérée soit fermée. Ainsi, plutôt que de définir un cadre topologique relativement simple et d'obtenir l'existence de stratégies gagnantes relatives à des propriétés complexes (par exemple analytiques, comme dans le théorème de Gowers), on doit utiliser ici des règles de jeu plus complexes, ainsi que des propriétés d'uniformisation, pour continuer à travailler avec une propriété fermée. Plus explicitement, il est capital dans ce jeu de caractériser le gain par une propriété *d'équivalence* de suites et non *d'isomorphisme* des espaces engendrés.

A cause de la troisième dichotomie que nous venons de montrer, il est donc naturel de s'attendre à ce que les exemples connus d'espaces à base de Schauder et sans sous-espace minimal, soient en fait étroits. Le tout premier exemple d'espace sans sous-espace minimal fut l'espace de Tsirelson, initialement construit pour ne pas contenir de copie de c_0 ou ℓ_p, et nous allons voir que sa base canonique (ou n'importe quelle autre base de Schauder, par reflexivité) est étroite. En fait l'espace de Tsirelson est étroit dans un sens plus fort, que nous allons définir maintenant, et que l'on peut vérifier, dans le cas de T, par une modification simple de la preuve classique qu'il ne contient pas de sous-espace minimal, qui est basée sur la théorie locale des espaces L_p (voir Casazza-Shura [21]).

1.6 Espaces étroits avec constantes

Soit E un espace à base de Schauder (e_n). Il existe un cas simple de suite (I_i) d'intervalles associée à un sous-espace Y qui caractérise le fait que Y est à l'étroit dans (e_n). Ce cas se produit quand pour tout entier naturel K, $Y \not\sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_K}$. Autrement dit, chaque intervalle I_K se charge de que pour Y évitant I_K, la constante de plongement soit pire que K. Pour qu'un espace Y se plonge en évitant un nombre infini d'intervalles, la constante de plongement devrait donc être infinie, c'est à dire qu'il n'y a en fait pas plongement de Y évitant un nombre infini d'intervalles.

On vérifie facilement que cette propriété peut être reformulée des manières suivantes.

Proposition 35 *Soit E un espace à base (e_n). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour toute bloc suite (y_n) il existe des intervalles $I_0 < I_1 < I_2 < \ldots$ tels que pour tout K,

$$[y_n]_{n \in I_K} \not\sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_K}.$$

(2) Pour tout espace Y, il existe des intervalles $I_0 < I_1 < I_2 < \cdots$ tels que pour tout K,

$$Y \not\sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_K}.$$

(3) Aucun espace ne se plonge uniformément dans les queues de E.

(4) Il n'existe pas de K et de sous-espace de E qui soit K-crûment finiment représentable dans toutes les queues de E.

Une base qui vérifie (1), (2), (3), (4) sera dite *étroite avec constantes*, et l'espace associé sera dit *étroit avec constantes*.

Il y a une grande différence entre le fait qu'aucun *sous-espace* de E ne soit K-crûment finiment représentable dans toutes les queues de E et le fait qu'aucun *espace* ne soit K-crûment finiment représentable dans toutes les queues de E. Alors que, comme nous allons le voir, la première propriété est vérifiée dans l'espace de Tsirelson, le théorème de Dvoretzky (voir e.g. [49]), affirme que ℓ_2 est toujours finiment représentable dans n'importe quel espace de Banach. Avant de passer à l'exemple de l'espace de Tsirelson, nous allons définir une forme d'espace étroit jumelle de la propriété d'être étroit avec constantes.

1.7 Espaces étroits par portée

On définit ici une autre forme d'espace étroit qui est liée non plus aux constantes de plongement mais aux supports des vecteurs engendrant chaque sous-espace, situation que l'on rencontre naturellement pour divers espaces du type de Gowers-Maurey. Rappelons que la portée d'un bloc x sur une base (e_n) est l'intervalle range $x = [\min \operatorname{supp} x, \max \operatorname{supp} x]$.

Fait 36 *Soit (e_n) une base de Schauder. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Deux bloc sous-espaces de portées disjointes sont toujours incomparables

(2) Pour tout (y_n) bloc base de (e_n) et $A \subseteq \mathbb{N}$ infini,

$$[y_n]_{n \in \mathbb{N}} \not\sqsubseteq [e_n \mid n \notin \bigcup_{i \in A} \operatorname{range} y_i].$$

Une suite basique (e_n) vérifiant (1)-(2) sera dite *étroite par portée*. De fait, d'après (2), (e_n) est étroite par portée si elle est étroite et pour toute bloc-base (y_n) de (e_n) la suite correspondante de parties I_i de $\mathbb{N}$ peut être donnée par $I_i = \text{range } y_i$.

Nous avons déjà parlé de l'espace de Gowers G_u, le premier exemple d'espace non isomorphe à ses hyperplans [54], dont la propriété caractéristique est plus forte que celle d'un espace étroit par portée. Nous en rappelons maintenant plusieurs formes équivalentes.

Fait 37 *Soit (e_n) une base de Schauder. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Deux bloc sous-espaces à supports disjoints ne sont jamais isomorphes.

(2) Deux bloc sous-espaces à supports disjoints sont toujours incomparables.

(3) Pour tout (y_n) bloc base de (e_n) et $A \subseteq \mathbb{N}$ infini,

$$[y_n]_{n\in\mathbb{N}} \not\sqsubseteq [e_n \mid n \notin \bigcup_{i\in A} \text{supp } y_i].$$

Une suite basique (e_n) vérifiant (1)-(3) sera dite *étroite par support*. De fait, d'après (2), (e_n) est étroite par support si elle est étroite et pour toute bloc-base (y_n) de (e_n) la suite correspondante de parties I_i de $\mathbb{N}$ peut être donnée par $I_i = \text{supp } y_i$.

Il est évident qu'une base étroite par support est en particulier étroite par portée. La réciproque est fausse, car il est facile de voir qu'une base étroite par support est nécessairement inconditionnelle, alors qu'il existe un espace HI qui est étroit par portée [48]. Cependant on ne semble pas connaître d'espace à base inconditionnelle étroite par portée qui ne soit pas en fait étroite par support.

Enfin historiquement, l'espace G_u fut construit par Gowers de manière à ce que sa base vérifie un critère de Casazza qui garantit que l'espace n'est pas isomorphe à ses sous-espaces propres, voir [54]. Il est immédiat de vérifer que ce critère s'applique aux bases étroites par portée, et donc un espace étroit par portée n'est pas isomorphe à ses sous-espaces propres.

Lemme 38 (Casazza, années 1990) *Soit X un espace à base de Schauder (e_n) tel que pour aucune bloc-base de (e_n), la suite des vecteurs impairs ne soit équivalente à la suite des vecteurs pairs. Alors X n'est isomorphe à aucun sous-espace propre.*

Corollaire 39 *Soit X un espace à base étroite par portée. Alors X n'est isomorphe à aucun sous-espace propre.*

1.8 Exemples d'espaces étroits

1.8.1 Exemples du type de Tsirelson

Rappelons qu'une base (e_n) est dite *fortement asymptotiquement ℓ_p*, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, [24], s'il existe une constante C et une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout n, toute famille de n vecteurs unitaires à supports disjoints sur $[e_k \mid k \geqslant f(n)]$ est C-équivalente à la base canonique de ℓ_p^n. C'est le cas de la base canonique de l'espace de Tsirelson, voir [21]. Nous donnons la preuve de la propriété suivante, afin de comprendre un peu plus concrètement l'exemple de Tsirelson d'espace étroit.

Proposition 40 *Soit E un espace de Banach avec une base (e_n) fortement asymptotiquement ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, et qui ne contient pas une copie de ℓ_p. Alors (e_n) est étroite avec constantes.*

Preuve : Supposons qu'un espace Y se plonge avec constante K dans toute queue de E. On peut supposer que Y est engendré par une bloc suite (y_n) de E et, puisque toute base fortement asymptotiquement ℓ_p est inconditionelle, (y_n) est inconditionnelle. D'après un résultat de W.B. Johnson [64] pour tout n il existe une constante $d(n)$ telle que $(y_0, \ldots, y_n)$ soit $2K$-équivalente à une suite de vecteurs dans le sous-espace engendré par $d(n)$ vecteurs à supports disjoints dans n'importe quelle queue de E, en particulier dans $[e_k \mid k \geqslant f(d(n))]$. Par conséquent $[y_0, \ldots, y_n]$ se $2KC$-plonge dans ℓ_p. Cela signifie que Y est crûment finiment représentable dans ℓ_p et par conséquent se plonge dans L_p, d'après Lindenstrauss et Pełczyński [75], et comme (y_n) est inconditionelle asymptotiquement ℓ_p, que Y contient une copie de ℓ_p : en effet si $p > 2$, cela se déduit du fait que Y ne peut contenir une copie de ℓ_2 et d'un résultat de Kadets et Pełczyński sur les sous-espaces de L_p ([2] Théorème 27) ; pour $1 \leqslant p < 2$ cela se déduit de résultats de Johnson ([2] Théorème 30), ou de Odell et Schlumprecht si $p = 1$ ([2] Proposition 31), et de Dor [27]. On peut trouver les détails de la dernière partie de cette preuve dans [24], Propositions 3 et 5. □

Corollaire 41 *L'espace de Tsirelson T et ses p-convexifications $T^{(p)}$, $1 < p < +\infty$, sont étroits avec constantes.*

La Proposition 40 ne s'étend pas au cas $p = +\infty$. En effet, le dual T^* de T, qui est fortement asymptotiquement ℓ_∞ et ne contient pas de copie de c_0, est minimal (et par conséquent ne contient pas de sous-espace étroit).

1.8.2 Exemples du type de l'espace G_u

Comme nous l'avons vu, la propriété caractéristique de G_u signifie que cet espace est étroit par support. Les techniques de construction de G_u permettent de montrer également que son dual est étroit par support [48]. Enfin il existe aussi un autre type d'espace étroit par support X_u, dû à Ferenczi - Rosendal et basé sur des techniques de Argyros, Deliyanni, Kutzarova et Manoussakis [6], qui a la propriété additionnelle d'être étroit avec constantes, voir [48].

1.8.3 Exemples HI

Après l'exemple de Gowers et Maurey, de nombreux exemples d'espaces HI avec des propriétés additionnelles ont été considérés. Citons parmi les exemples que nous intéresseront l'espace G de Gowers en 1994 [57], qui est HI et asymptotiquement inconditionnel, c'est-à dire qu'il existe une constante C telle que toute suite de n vecteurs successifs dont les supports sur sa base sont inclus dans $[n, +\infty)$ est C-inconditionnelle. Cet espace de Gowers fut vite oublié après la construction d'espaces avec une propriété bien plus forte, à savoir les espaces HI asymptotiquement ℓ_1 de Argyros et Deliyanni [5]. Cependant il est possible de montrer que l'espace G est étroit par portée [48], alors que nous en sommes pour l'instant incapables avec l'exemple originel GM de Gowers et Maurey. Par contre nous ne connaissons pas d'espaces HI qui soient étroits avec constantes.

Observons pour conclure que l'espace de Tsirelson est étroit par constantes mais n'est pas étroit par portée. Inversement l'espace G_u^* est étroit par portée mais n'est pas étroit avec constantes, et nous avons aussi l'exemple de X_u qui est à la fois étroit par portée et avec constantes [48]. S'il est facile de construire aussi un espace étroit qui n'est ni étroit avec constantes ni étroit par portée [47], il reste cependant ouvert de savoir si les deux formes d'étroitesse que nous avons définies sont les seules “à sous-espace près” :

Question 42 *Existe-t'il un espace étroit que ne contienne pas de sous-espace étroit par portée ni de sous-espace étroit avec constantes ?*

Chapitre 2

Première et deuxième questions de Gowers

Les résultats de ce chapitre sont encore une fois dûs à Ferenczi et Rosendal [47], sauf mention du contraire.

2.1 Quatrième dichotomie et deuxième question de Gowers

Dans le Théorème 28 on trouve une certaine relation entre les sous-espaces engendrés par des bloc-bases et les sous-espaces engendrés par des sous-suites d'une base. Ainsi par exemple, si la base est étroite, aucun espace ne peut se plonger dans tous les sous-espaces engendrés par des sous-suites de la base. Nous allons maintenant obtenir une nouvelle relation entre bloc-bases et sous-suites d'une base donnée, similaire à ce qui se passe dans le cas de l'espace de Tsirelson. Plus précisément, nous allons définir une forme faible de minimalité, associée aux sous-suites d'une base donnée et montrer qu'elle peut être opposée, par une dichotomie, aux espaces étroits par portée.

Définition 43 *On dit qu'une suite basique* (e_n) *est* sous-séquentiellement minimale *si tout sous-espace de* $[e_n]$ *contient une copie équivalente d'une sous-suite de* (e_n).

Il est bien clair qu'une base qui engendre un espace minimal est en particulier sous-séquentiellement minimale. L'espace T est l'exemple naturel d'espace à base sous-séquentiellement minimale et qui ne contienne pas de sous-espace minimal. En fait dans T on a la propriété bien plus forte que toute bloc-base normalisée est *paire - impaire*, c'est-à dire que la sous-suite des termes d'indice pair est équivalente à la sous-suite des termes d'indice impair. C'est le *principe de "blocking"*, que nous mentionnerons plus loin.

On obtient alors la dichotomie suivante :

Théorème 44 (Quatrième dichotomie) *Soit E une espace de Banach avec une base (e_n). Alors il existe une bloc base (x_n) de (e_n) qui vérifie l'une des propriétés suivantes, qui sont mutuellement exclusives et toutes les deux possibles.*
(1) La suite (x_n) est étroite par portée.
(2) La suite basique (x_n) est sous-séquentiellement minimale.

Afin de travailler avec des propriétés héréditaires et donc avec des dichotomies dans le sens de Gowers, on dira qu'une base est *séquentiellement minimale* quand elle est à la fois quasi-minimale et saturée de bloc-bases qui sont sous-séquentiellement minimales. On peut facilement voir le Théorème 44 comme un théorème de dichotomie entre les espaces étroits par portée et les espaces séquentiellement minimaux.

Pour la preuve du Théorème 44, nous aurons besoin d'une conséquence simple de la définition du jeu de Gowers, que nous donnons sans démonstration.

Lemme 45 *Soit E un espace à base et supposons que II ait une stratégie gagnante dans le jeu de Gowers dans E pour jouer dans un ensemble $\mathbb{B}$. Alors il existe un arbre non-vide T de bloc bases finies tel que $[T] \subseteq \mathbb{B}$ et tel que pour tous $(y_0, \ldots, y_m) \in T$ et toute bloc base (z_n) de E, il existe un bloc vecteur y_{m+1} de (z_n) tel que $(y_0, \ldots, y_m, y_{m+1}) \in T$.*

On démontre maintenant le Théorème 44. Donnons une idée de la preuve dans le cas plus simple d'une dichotomie pour la propriété de Casazza. Si un espace $E = [e_n]$ ne contient pas de sous-espace avec la propriété de Casazza, cela signifie qu'il est saturé de bloc-bases paires - impaires, et alors quitte à passer à un sous-espace, le théorème de Gowers fournit une stratégie gagnante pour II dans le jeu de Gowers pour produire une suite paire - impaire, et donc, un arbre associé T par le Lemme 45. Par dénombrabilité, on peut alors définir une suite (u_n) des vecteurs y_{2m+1} d'indice impair fournis par le Lemme 45. En appliquant ce lemme de manière répétée, on obtient que tout bloc sous-espace $X = [x_n]$ contient une bloc-base équivalente à une sous-suite de (u_n). En toute généralité si (u_n) n'est pas une bloc-base, ceci ne nous apprend rien, car on pourrait imaginer que (u_n) parcoure un sous-ensemble dense de la boule unité de X, auquel cas l'affirmation ci-dessus serait triviale. Mais le jeu de Gowers, via le Lemme 45, permet en fait de sélectionner (u_n) suffisamment "asymptotiquement" pour que celle-ci soit une bloc-base, si bien que le fait que toute bloc-base de E ait une bloc-base équivalente à une sous-suite de (u_n) n'est plus trivial.

Pour les questions de plongement associées au fait qu'un espace ne contienne pas de suite basique étroite par portée, l'idée de la preuve est la même que ci-dessus, avec l'ingrédient supplémentaire d'un codage par des ensembles inévitables. Nous donnons maintenant cette démonstration en détails, pour voir comment fonctionne le principe de codage en combinaison avec le théorème de type Ramsey de Gowers.

Preuve : On peut supposer que E ne contient pas de copie de c_0. D'après la solution du problème de la distorsion et en passant à un sous-espace, on peut supposer qu'il existe deux sous-ensembles F_0 et F_1 de la sphère unité de E qui sont inévitables et séparés, et tels que toute bloc-base ait des bloc vecteurs dans F_0 et dans F_1.

Supposons que (e_n) n'ait pas de bloc-base vérifiant (1). Alors pour toute bloc-base (x_n) il existe des bloc-bases (y_n) et (z_n) de (x_n) de portées disjointes et telles que $[y_n] \sqsubseteq [z_n]$.

On peut voir que toute bloc-base de (e_n) a une bloc-base dans le sous-ensemble suivant de bloc-bases normalisées de (e_n).

$$\mathbb{A} = \{(y_n) \mid \forall n\ y_{2n} \in F_0 \cup F_1\ \&\ \exists^\infty n\ y_{2n} \in F_0\ \&\ [y_{2n+1}]_{y_{2n} \in F_0} \sqsubseteq [y_{2n+1}]_{y_{2n} \in F_1}\}.$$

En effet soient (x_n) une bloc-base de (f_n) et (z_n) une bloc-base de (x_n) telles que $z_{3n} \in F_0$ et $z_{3n+1} \in F_1$. On peut construire une partie infinie $B \subseteq \mathbb{N}$ et une bloc-base (v_n) de (z_{3n+2}) telles que $[v_n]_{n \in B} \sqsubseteq [v_n]_{n \notin B}$. Soit $y_{2n+1} = v_n$, et $y_{2n} = z_i \in F_0$ pour $n \in B$ et $y_{2n} = z_i \in F_1$ pour $n \notin B$ tels que $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$. Alors $(y_n) \in \mathbb{A}$.

Soit maintenant $\Delta = (\delta_n)$ une suite de réels strictement positifs suffisamment petits. Comme $\mathbb{A}$ est analytique, il s'ensuit du théorème de type Ramsey de Gowers qu'il existe une bloc-base (x_n) de (f_n) pour laquelle II a une stratégie gagnante pour jouer dans $\mathbb{A}_\Delta$ chaque fois que I joue une bloc-base de (x_n). Nous allons maintenant construire une bloc-base (v_n) de (x_n) telle que tout sous-espace de $[v_n]$ contienne une suite équivalente à une sous-suite de (v_n), ce qui nous donnera le cas (2).

D'après le Lemme 45 il existe un arbre non vide T de bloc-bases finies de (x_n) tel que $[T] \subseteq \mathbb{A}_\Delta$ et pour tout $(u_0, \ldots, u_m) \in T$ e toutes bloc-bases (z_n) il y ait un bloc vecteur u_{m+1} de (z_n) tel que $(u_0, \ldots, u_m, u_{m+1}) \in T$. Puisque T est dénombrable, on peut construire inductivement une bloc-base (v_n) de (x_n) telle que pour toute $(u_0, \ldots, u_m) \in T$ il existe un v_n tel que $(u_0, \ldots, u_m, v_n) \in T$.

Nous affirmons que (v_n) vérifie les conditions voulues. En effet si (z_n) est une bloc-base de (v_n), on construit par récurrence une suite $(u_n) \in \mathbb{A}_\Delta$ de la manière suivante. A l'aide de la propriété d'extension de T, on peut construire une bloc-base infinie (h_n^0) de (z_n) qui appartient à $[T]$. Comme $[T] \subseteq \mathbb{A}_\Delta$, il y a un plus petit segment initial $(u_0, \ldots, u_{2k_0}) \in T$ de (h_n^0) tel que $d(u_{2k_0}, F_0) < \delta_{2k_0}$. Soit u_{2k_0+1} un terme de (v_n) tel que $(u_0, \ldots, u_{2k_0}, u_{2k_0+1}) \in T$.

En utilisant de nouveau la propriété d'extension de T, on trouve une bloc base infinie (h_n^1) de (z_n) telle que

$$(u_0, \ldots, u_{2k_0}, u_{2k_0+1})^\frown (h_n^1)_n \in [T].$$

Comme $[T] \subseteq \mathbb{A}_\Delta$, il existe un plus petit segment initial

$$(u_0, \ldots, u_{2k_0}, u_{2k_0+1}, \ldots, u_{2k_1}) \in T$$

de

$$(u_0, \ldots, u_{2k_0}, u_{2k_0+1})^\frown (h_n^1)_n$$

qui étend proprement $(u_0, \ldots, u_{2k_0}, u_{2k_0+1})$ et tel que $d(u_{2k_1}, F_0) < \delta_{2k_1}$. On choisit un terme u_{2k_1+1} de (v_n) tel que $(u_0, \ldots, u_{2k_1}, u_{2k_1+1}) \in T$. On continue le même procédé inductivement.

On obtient ainsi finalement une bloc-base $(u_n) \in \mathbb{A}_\Delta$ et des entiers $k_0 < k_1 < \ldots$ tels que $d(u_{2n}, F_0) < \delta_{2n}$ si et seulement si $n = k_i$ pour un certain i et tels que pour tout i, u_{2k_i+1} est un terme de (v_n). Soit maintenant $(w_n) \in \mathbb{A}$ telle que $\|w_n - u_n\| < \delta_n$. Alors, comme δ_n est suffisamment petit, on en déduit que $w_{2n} \in F_0$ si et seulement si $n = k_i$ pour un certain i, et $w_{2n} \in F_1$ sinon. De plus, comme $(w_n) \in \mathbb{A}$,

$$[w_{2k_i+1}]_{i \in \mathbb{N}} = [w_{2n+1}]_{w_{2n} \in F_0} \sqsubseteq [w_{2n+1}]_{w_{2n} \in F_1} = [w_{2n+1}]_{n \neq k_i}.$$

Donc, par choix de δ_n, on a

$$[u_{2k_i+1}]_{i \in \mathbb{N}} \sqsubseteq [w_{2k_i+1}]_{i \in \mathbb{N}} \sqsubseteq [w_{2n+1}]_{n \neq k_i} \sqsubseteq [u_{2n+1}]_{n \neq k_i}.$$

Comme $[u_{2n+1}]_{n \neq k_i}$ est un sous-espace de $[z_n]$ et (u_{2k_i+1}) une sous-suite de (v_n), ceci conclut la démonstration. $\square$

Observons qu'il est capital dans cette preuve que les coups possibles de II prescrits par une stratégie gagnante soient dans un ensemble dénombrable. Ceci peut expliquer pourquoi Gowers n'avait pas trouvé de réponse naturelle à sa deuxième question dans son article : "Suppose X is strictly quasi-minimal with an unconditional basis and suppose that for every subspace Y of X there are isomorphic subspaces W, Z of Y with W properly contained in Z. Then no subspace of X satisfies the criterion of Casazza (Lemma 7.4) so in some further subspace there is a winning strategy for P for producing sequences $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ such that the sequence of odd-numbered vectors is equivalent to the sequence of even-numbered ones. This, although a stronger property than quasi-minimality, is rather artificial, and it is not clear what of interest can be deduced of it."

De la quatrième dichotomie et du Corollaire 39 on déduit :

Corollaire 46 (Une réponse partielle à la 2ème question de Gowers) *Tout espace de Banach contient une solution négative au problème de l'hyperplan de Banach, ou un sous-espace séquentiellement minimal.*

Notons qu'il existe un domaine de recherche qui peut être relié au problème de l'hyperplan de Banach, si l'on se restreint aux espaces de Banach réels : c'est la théorie des *structures complexes* sur les espaces de Banach réels. Il est considéré dans [40] une notion d'espace *pair* - ou de *dimension infinie paire* - qui généralise la notion de dimension finie. Rappelons qu'un espace de Banach réel X *admet une structure complexe* s'il est $\mathbb{R}$-linéairement isomorphe à un espace complexe, ce qui revient à dire qu'il existe un opérateur sur X de carré $-Id$. On dit alors

Définition 47 (Ferenczi - Galego, 2007) *Un espace de Banach réel est pair s'il admet une structure complexe mais ses hyperplans n'admettent pas de structure complexe.*

On voit donc qu'un espace pair est *structurellement* différent de ses hyperplans, puisqu'il existe une propriété qui en témoigne, et en ce sens peut être vu comme une réponse plus structurelle au problème de l'hyperplan de Banach. Il est démontré dans [40] que les espaces pairs de dimension infinie existent :

Théorème 48 (Ferenczi - Galego, 2007) *Il existe des espaces de Banach réels de dimension infinie du type $C(K)$, ou à base inconditionnelle, ou HI, qui sont pairs et donc structurellement différents de leurs hyperplans.*

Notons qu'il ne semble pas exister de notion de parité similaire pour les espaces complexes, à moins peut-être de se baser sur l'existence ou non de structures quaternioniques sur de tels espaces.

2.2 Cinquième dichotomie

On définit maintenant une deuxième notion plus faible de minimalité.

Définition 49 *Un espace de Banach X est dit* localement minimal *quand il existe $K \geqslant 1$ tel que X soit K-crûment finiment représentable dans tous ses sous-espaces.*

Observons tout de suite que, comme d'après une observation de Casazza de 1986 [17], un espace minimal est toujours K-minimal pour un certain K, tous les espaces minimaux sont en particulier localement minimaux.

En dehors des espaces minimaux, on peut trouver des exemples d'espaces localement minimaux en utilisant les propriétés d'universalité des ℓ_∞^n. Par exemple, le dual de l'espace GM est saturé de copies uniformes de ℓ_∞^n, et par conséquent contient des copies uniformes dans tout sous-espace de n'importe quel espace de dimension finie. Dans ce sens, GM^* est ce que nous pouvons appeler *localement universel*. L'espace GM^* est donc localement minimal, sans pour autant être minimal puisqu'il est HI [32]. Il ne semble pas être connu d'exemple d'espace localement minimal qui ne soit pas ou minimal ou localement universel.

Nous énonçons maintenant la cinquième dichotomie, dont la preuve, que nous ne donnerons pas ici, est de nouveau basée sur une application du théorème de type Ramsey de Gowers et sur un codage à la Lopez-Abad.

Théorème 50 (Cinquième dichotomie) *Soit E un espace de Banach de dimension infinie avec une base de Schauder (e_n). Alors il existe une bloc-base (x_n) qui satisfait l'une des propriétés suivantes, qui sont mutuellement exclusives et chacune possible.*

1. (x_n) est étroite avec constantes,

2. $[x_n]$ est localement minimal.

La minimalité locale peut être reformulée en des termes plus proches de ceux de la théorie locale des espaces de Banach. Soit $\mathbb{F}_n$ l'espace métrique des espaces de Banach n-dimensionnels à isométrie près muni de la métrique de Banach-Mazur

$$d(X,Y) = \inf \big(\log(\|T\| \cdot \|T^{-1}\|) \bigm| T\colon X \to Y \text{ est un isomorphisme } \big).$$

Pour tout espace de Banach X, l'ensemble des Y de dimension n qui sont plongeables presque isométriquement dans X forment un sous-ensemble fermé $(X)_n$ de $\mathbb{F}_n$. Il est bien connu que cet ensemble $(X)_n$ n'est pas toujours stabilisable, i.e., il n'existe pas nécessairement de sous-espace $Y \subseteq X$ tel que pour tout sous-espace Z de Y, $(Z)_n = (Y)_n$. Si par contre X est équipé d'une base et pour tout bloc sous-espace Y on définit $\{Y\}_n$ l'ensemble des espaces de dimension n qui sont presque isométriquement plongeables dans toutes les queues de Y, alors on peut aisément stabiliser $\{Y\}_n$ sur un sous-espace. De telles considérations sont utilisées dans par Maurey, Milman et Tomczak-Jaegermann dans [81].

Le Théorème 50 donne une dichotomie pour quand on peut stabiliser l'ensemble $(X)_n$ *crûment*. Explicitement, X est localement minimal si et seulement si il existe K telle que pour tout sous-espace Y de X et tout n, $d_H\big((X)_n,(Y)_n\big) \leqslant K$, où d_H est la distance de Hausdorff. Donc par le Théorème 50, la structure locale se stabilise crûment sur un sous-espace si et seulement si l'espace n'est pas saturé de suites basiques étroites avec constantes.

On peut réinterpréter la Question 42 en utilisant les trois nouvelles dichotomies :

Question 51 *Un espace qui est à la fois localement et séquentiellement minimal doit-il contenir un sous-espace minimal ?*

Rappelons qu'un espace à base normalisée (e_n) est dit satisfaire le principe de "blocking" (appelé aussi "shift property" par Casazza et kalton dans [18]) si toute bloc-base normalisée est paire-impaire. On voit donc que le principe de blocking est une propriété totalement opposée au critère de Casazza et plus forte que la séquentialité minimale. Hormis les espaces c_0 et ℓ_p, les exemples classiques d'espaces qui satisfont le principe de blocking sont l'espace de Tsirelson, ses p-convexifications ($1 < p < +\infty$), et son dual. Le résultat suivant s'obtient par le même principe que le fait que le dual de l'espace de Tsirelson est minimal [21], mais laisse la Question 51 ouverte.

Proposition 52 *Tout espace qui à la fois est localement minimal et satisfait le principe de blocking est minimal.*

2.3 Une réponse à la première question de Gowers

Les résultats précédents montrent qu'il est intéressant de relier la cinquième dichotomie, qui oppose espaces localement minimaux et espaces étroits avec constantes, à la notion de base fortement asymptotiquement ℓ_p. En effet, d'après la Proposition 40, si une base est fortement asymptotiquement $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$, elle est toujours étroite par constantes, sauf si l'on est déjà, quitte à passer à un sous-espace, dans le cas d'un espace isomorphe à ℓ_p. Si par contre une base est fortement asymptotiquement ℓ_∞, alors l'espace associé est localement universel et donc localement minimal.

Or Tcaciuc a justement démontré une dichotomie entre le cas des espaces à base fortement asymptotiquement $\ell_p, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et une propriété opposée que nous appelerons *inhomogénéité uniforme.* Nous l'énonçons de la manière suivante, qui est légèrement différente de la formulation de Tcaciuc dans [105].

Théorème 53 (Dichotomie de Tcaciuc, 2007) *Tout espace de Banach contient un sous-espace Y qui vérifie l'une des deux propriétés suivantes, qui sont exclusives et toutes deux possibles :*
(1) Y est fortement asymptotiquement ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,
(2) Y est uniformément inhomogène, c'est-à dire

$$\forall M \geqslant 1 \; \exists n \in \mathbb{N}; \forall U_1, \ldots, U_{2n} \subseteq Y \; \exists x_i \in \mathcal{S}_{U_i} \; (x_{2i-1})_{i=1}^n \not\sim_M (x_{2i})_{i=1}^n,$$

où les U_i parcourent les sous-espaces de dimension infinie de Y.

La preuve de cette dichotomie est basée sur le même principe que la preuve par Maurey de la première dichotomie de Gowers [80]. Hormis c_0 et ℓ_p les exemples classiques d'espaces fortement asymptotiquement ℓ_p sont l'espace de Tsirelson et ses p-convexifications - le dual de T dans le cas $p = +\infty$. A l'opposé, parmi les espaces uniformément inhomogènes on compte l'espace de Schlumprecht S, l'espace G_u, ainsi que l'espace GM et plus généralement tout espace HI, voir [48].

Les six dichotomies et les principales relations entre les différentes propriétés qui y apparaissent sont alors résumées dans le tableau suivant.

Fort. as. ℓ_p	$**$ Dichotomie de Tcaciuc $**$	Unif. inhomog.
$\Downarrow$		$\Uparrow$
Base incond.	$**$ 1ère dichotomie $**$	Héréd. indéc.
$\Uparrow$		$\Downarrow$
Etroit par support	$**$ 2ème dichotomie $**$	Quasi minimal
$\Downarrow$		$\Uparrow$
Etroit par portée	$**$ 4ème dichotomie $**$	Seq. minimal
$\Downarrow$		$\Uparrow$
Etroit	$**$ 3ème dichotomie $**$	Minimal
$\Uparrow$		$\Downarrow$
Etroit avec constantes	$**$ 5ème dichotomie $**$	Loc. minimal

Tableau des relations entre les six dichotomies

Les cinquièmes et sixièmes dichotomies concernent des propriétés qui sont de nature locale et paraissent moins fondamentales que les quatre premières. Pour cette raison on dressera un tableau de classes inévitables d'espaces de Banach, en obtenant différents *types* d'espaces correspondants aux différents cas pour chacune des quatre premières dichotomies, et en obtenant différents *sous-types* en raffinant les types précédents à l'aide des deux dernières dichotomies.

En théorie on devrait donc obtenir $2^4 = 16$ types et $2^6 = 64$ sous-types, mais à cause des différentes relations qui existent entre les propriétés qui apparaissent dans les dichotomies, le tableau contient une liste de 6 types et 19 sous-types, voir page suivante.

Théorème 54 *Tout espace de Banach de dimension infinie contient un sous-espace d'un des types de la liste suivante.*

Type	*Propriétés*	*Exemples*
(1a)	*HI, étroit par portée et avec constantes*	*?*
(1b)	*HI, étroit par portée, localement minimal*	G^*
(2)	*HI, étroit, sequentiellement minimal*	*?*
(3a)	*étroit par support et avec constantes, uniformément inhomogène*	*?*
(3b)	*étroit par support, localement minimal, uniformément inhomogène*	G_u^*
(3c)	*étroit par support, fortement asymptotiquement* ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$	X_u
(3d)	*étroit par support, fortement asymptotiquement* ℓ_∞	X_u^*
(4)	*base inconditionnelle, quasi minimal, étroit par portée*	*?*
(5a)	*base inconditonnelle, étroit avec constantes, séquentiellement, minimal, uniformément inhomogène*	*?*
(5b)	*base inconditionnelle, étroit, séquentiellement et localement, minimal, uniformément inhomogène*	*?*
(5c)	*étroit avec constantes, séquentiellement minimal, fortement asymptotiquement* ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$	T, $T^{(p)}$
(5d)	*étroit, séquentiellement minimal, fortement asymptotiquement* ℓ_∞	*?*
(6a)	*base inconditionnelle, minimal, uniformément inhomogène*	S
(6b)	*minimal, réflexif, fortement asymptotiquement* ℓ_∞	T^*
(6c)	*isomorphe à* c_0 *ou* l_p, $1 \leqslant p < \infty$	c_0, ℓ_p

Il existe des exemples pour 8 des 19 classes inévitables d'espaces. La classe (2) est divisée en deux sous-classes et la classe (4) en quatre, que nous n'expliciterons pas ici car nous ne disposons pour l'instant pas d'exemples qui prouvent que ces classes ne soient pas vides. Rappelons que les espaces contenus dans chacune des 12 sous-classes de type (1)-(4) ne possèdent jamais de bloc sous-espaces isomorphes à un de leurs sous-espaces propres, et en ce sens nous considérons ces sous-classes comme “exotiques”. A l'opposé les espaces “classiques” et “purs” doivent appartenir à l'une des 7 sous-classes de type (5)-(6).

Un certain nombre d'exemples ont déjà été mentionnés. Parmi les exemples de type (6), minimaux, citons celui de l'espace de Schlumprecht S [99], espace à base muni de la plus petite norme satisfaisant l'équation implicite

$$\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup_{n, E_1 < \cdots < E_n} \log_2^{-1}(n+1) \sum_{i=1}^{n} \|E_i x\|,$$

et qui est complémentablement minimal, c'est-à dire que tout sous-espace de S contient une copie complémentée de S. Rappelons aussi que le dual T^* de l'espace de Tsirelson est minimal, ce qui peut être vu comme conséquence du Théorème 52. Notons que T^* n'est pas complémentablement minimal [21]. En fait et plus généralement, par un résultat de Dilworth, Ferenczi, Kutzarova et Odell [24], une base fortement asymptotiquement ℓ_p engendrant un espace complémentablement minimal est toujours équivalente à la base canonique de ℓ_p (ou c_0 dans le cas $p = +\infty$).

L'exemple X_u (et son dual X_u^*) est un nouvel exemple, qui peut être vu comme une version inconditionnelle d'un espace HI construit par Argyros, Deliyanni, Kutzarova e Manoussakis en 1998, [6], de la même manière que G_u est une version inconditionnelle de l'espace HI de Gowers et Maurey. Pour les détails de la construction nous renvoyons à [48].

Parmi les classes dont on ne sait pas encore si elles sont non vides, il est particulièrement important d'étudier les classes (2) et (4), qui combinent à la fois des propriétés de minimalité et d'étroitesse. Quant à la classe (5d), elle donnerait un exemple d'espace séquentiellement et localement minimal qui ne contient pas de sous-espace minimal (voir la Question 51). Certains duaux d'espaces de Tsirelson mixtes et partiellement modifiés, voir [6], sont des candidats naturels pour cette classe.

Pour conclure notons une direction de recherche initiée dans [37] : établir une liste d'espaces inévitables relative à une classification isomorphe des espaces de Banach à *quotients de sous-espaces près*. Ainsi dans [32], on appelle QHI les espaces, tels que GM, dont aucun quotient de sous-espace n'est décomposable. Il est alors tentant d'obtenir une version de la première dichotomie de Gowers pour les quotients de sous-espaces et les espaces QHI. Dans [37] on définit une propriété *QHI restreinte* (qui implique que l'espace soit HI, et, dans le cas réflexif, que son dual le soit également), et l'on montre :

Théorème 55 (Ferenczi, 2007) *Tout espace de Banach de dimension infinie contient un quotient de sous-espace qui soit a une base inconditionnelle, soit a la propriété QHI restreinte.*

La question d'établir une liste plus fournie d'espaces inévitables pour une classification des espaces de Banach à quotients de sous-espaces près reste ouverte.

Chapitre 3

Troisième question de Gowers et une réponse

Rappelons que pour un espace de Banach X, $\mathbb{P}(X)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-espaces de X, partiellement ordonné par le plongement isomorphe. La troisième question de Gowers est de savoir pour quels ensembles partiellement ordonnés P il existe un espace de Banach X tel que tout sous-espace Y de X contienne un sous-espace Z tel que $\mathbb{P}(Z) = P$.

Nous allons donner une réponse à cette question qui améliore considérablement l'observation de Gowers qu'un tel P est soit un singleton, soit non-dénombrable [58]. Pour cela, nous allons raffiner la notion d'espace étroit, en étudiant la régularité de la manière dont les suites de parties (I_i) dépendent du sous-espace Y dont elles déterminent le caractère étroit. Dans la suite nous considérons $bb(e_n)$ comme sous-espace de $\mathbf{D}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Comme dans les deux chapitres précédents, les résultats proviennent de [47].

Définition 56 *Une base (e_n) est dite* continûment étroite *s'il existe une fonction continue $f\colon bb(e_n) \to [\mathbb{N}]$ telle que pour tout bloc normalisé (x_n) de (e_n), si l'on pose $I_j = [f((x_n))_{2j}, f((x_n))_{2j+1}]$, alors*

$$[x_n] \not\sqsubseteq ([e_n], I_j),$$

Observons que toute base étroite avec constantes ou étroite par portée est continûment étroite. En effet nous avons dans ces deux cas des formules explicites pour le calcul de (I_i) en fonction de Y, dont on vérifie facilement qu'elles impliquent la continuité.

On peut raffiner la troisième dichotomie pour obtenir, dans le cas étroit, et quitte à passer á un sous-espace, une base continûment étroite. Pour cela, on utilise d'abord un théorème de "strategic uniformisation" de la stratégie gagnante du joueur I dans le jeu $H_{Y,X}$ qui apparaît dans le Corollaire 30 (voir le théorème (35.32) de [67]), pour montrer que la suite d'intervalles peut être obtenue boréliennement en fonction du sous-espace. Puis dans un deuxieme temps, on se base sur le théorème de type Ramsey de Gowers pour les ensembles analytiques de bloc-bases, que nous utiliserons dans le cas borélien, et sur un codage à la Lopez-Abad, afin d'obtenir que la suite d'intervalles dépende continûment du sous-espace :

Proposition 57 *Soit $E = [e_n]$ un espace étroit. Alors il existe un bloc sous-espace $X \leqslant E$ qui est continûment étroit.*

Revenant à la troisième question de Gowers :

Définition 58 *On définit un quasi-ordre $\subseteq^*$ et un ordre partiel $\subseteq_0$ sur l'espace $[\mathbb{N}]$ des parties infinies de $\mathbb{N}$ par :*

$$A \subseteq^* B \Leftrightarrow A \setminus B \text{ est fini}$$

et

$$A \subseteq_0 B \Leftrightarrow \Big(A = B \text{ ou } \exists n \in B \setminus A \colon\ A \subseteq B \cup [0, n[\Big).$$

L'ordre $\subseteq_0$ est un ordre partiel qui raffine le quasi-ordre $\subseteq^*$, explicitement, quand $A \subseteq^* B$ alors $A \subseteq_0 B$ si $B \not\subseteq^* A$ ou $A = B$ ou $A \triangle B$ a un plus grand élément qui appartient à B. Il n'est pas difficile de montrer que $\subseteq_0$ se plonge dans $\subseteq^*$, et $\subseteq^*$ se plonge aussi dans $\subseteq_0$ via un sélecteur pour la relation E_0.

Proposition 59 *Soit X un espace de Banach sans sous-espace minimal. Alors X contient un sous-espace avec une FDD (F_n) qui satisfait l'une des deux propriétés suivantes :*

(a) pour $A, B \subseteq \mathbb{N}$ infinies,

$$\sum_{n \in A} F_n \sqsubseteq \sum_{n \in B} F_n \Leftrightarrow A \subseteq^* B,$$

(b) pour $A, B \subseteq \mathbb{N}$ infinies,

$$\sum_{n \in A} F_n \sqsubseteq \sum_{n \in B} F_n \Leftrightarrow A \subseteq_0 B.$$

En particulier, $\subseteq^*$ se plonge dans $\mathbb{P}(X)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-espaces de X, partiellement ordonné par le plongement isomorphe.

Il serait ici plus agréable de n'utiliser que $\subseteq^*$, mais l'introduction de $\subseteq_0$ est nécessaire quand les espaces associés ne sont pas isomorphes à leurs sous-espaces propres. Ainsi (a) suppose que $\sum_{n \in A} F_n$ se plonge dans ses hyperplans pour tout A (par exemple quand X est l'espace de Tsirelson), et dans le cas contraire il faut utiliser (b).

On déduit alors de la Proposition 59 et de résultats classiques de théorie descriptive, [67] :

Théorème 60 *Soit X un espace de Banach de dimension infinie, et $\mathbb{P}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-espaces de X, partiellement ordonné par le plongement isomorphe. Soit P un ensemble partiellement ordonné tel que tout sous-espace Y de X contient un sous-espace Z tel que $\mathbb{P}(Z) = P$. Alors soit $|P| = 1$, soit $\subseteq^*$ se plonge dans P. Dans le deuxième cas*

(a) tout ordre partiel d'ordre au plus $\aleph_1$ se plonge dans P,

(b) tout ordre partiel fermé sur un Polonais se plonge dans P.

Deuxième partie

Complexité de relations entre espaces de Banach séparables

Chapitre 4

Le préordre $\leqslant_B$ entre relations d'équivalences

Rappelons la définition fondamentale de la théorie de complexité des relations d'équivalence.

Définition 61 *Soient E et F des relations d'équivalence sur les espaces Boréliens standard X et Y respectivement. On dit que E est* boréliennement réductible *à F s'il existe une fonction borélienne $f : X \to Y$ telle que*

$$xEy \Leftrightarrow f(x)Ff(y)$$

pours tous $x, y \in X$. On écrit alors que $E \leqslant_B F$ et l'on dit informellement que E est moins complexe que F. Si $E \leqslant_B F$ et $F \leqslant_B E$, alors E et F sont dites boréliennement biréductibles*, $E \sim_B F$, ou, informellement, de même complexité.*

Nous allons dresser un schéma des complexités relatives des relations d'équivalence les plus fondamentales (ou typiques, ou naturelles), puis positionner les relations usuelles entre espaces de Banach ou autres dans ce schéma.

4.1 Relations d'équivalence typiques

Les relations d'équivalence analytiques les plus simples sont celles qui admettent un nombre fini, voire dénombrable de classes. Les représentants de ces classes, à $\sim_B$ près, sont les relations d'égalité sur $1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$. Au delà des relations d'équivalence qui admettent seulement un nombre dénombrable de classes, la relation d'équivalence borélienne la plus simple est la relation $(\mathbb{R}, =)$ d'égalité entre nombre réels. En fait, par un résultat de Silver de 1980 [100], toute relation d'équivalence borélienne soit admet un nombre dénombrable de classes, auquel elle correspond simplement à une partition dénombrable de l'espace sous-jacent en sous-ensembles boréliens, soit $(\mathbb{R}, =)$ lui est boréliennement réductible et par conséquent possède un continuum de classes. Les relations d'équivalence qui sont réductibles à $(\mathbb{R}, =)$, appelées *smooth*, ou *classifiables* (par des réels) sont les relations qui admettent les nombres réels comme invariants complets.

Selon un résultat de Harrington, Kechris, et Louveau en 1990 [61], il existe parmi les relations d'équivalence boréliennes qui ne sont pas smooth une relation minimum (pour $\leqslant_B$), que l'on appelle E_0. C'est la relation d'égalité à pertubations finies près entre suites binaires, c'est-à dire, pour $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$xE_0y \Leftrightarrow \exists n \, \forall m \geqslant n \; x_m = y_m.$$

La relation E_0 est aussi caractérisée par le fait d'être maximum pour les relations d'équivalence boréliennes *hyperfinies*, c'est-à dire celles qui peuvent s'écrire come union croissante d'un nombre dénombrable de relations d'équivalence boréliennes à classes finies. Par exemple, toute action borélienne de $\mathbb{Z}$ engendre une relation d'orbite qui est hyperfinie.

Il existe une classe particulièrement intéressante de relations d'équivalence analytiques : les relations d'orbite associées à l'action continue d'un groupe polonais, c'est-à dire, un groupe topologique dont la topologie est polonaise ; ainsi à un groupe Polonais H agissant sur un Polonais X on associe la relation E_H sur X définie par

$$xE_Hy \Leftrightarrow \exists h \in H : y = h.x.$$

Cette classe recouvre la plupart des relations d'orbite étudiées en analyse. Pour chaque groupe polonais H, on peut montrer qu'il existe une relation qui est $\leqslant_B$-maximum parmi les relations d'orbite induites par H, et également qu'il existe une relation E_∞ qui est $\leqslant_B$-maximum parmi les relations d'orbite induites par l'action de groupes dénombrables. Elle est caractérisée comme le maximum des relations d'équivalence boréliennes dont toutes les classes sont dénombrables. Similairement, il existe un maximum E_G pour les relations d'orbites associées à l'action d'un groupe polonais.

Deux relations de complexités comprises entre E_∞ et E_G nous intéresseront également : la relation $=^+$ entre suites de nombres réels définie par, pour $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$(x_n)_n =^+ (y_n)_n \Leftarrow \{x_n\}_n = \{y_n\}_n,$$

c'est-à dire que ces suites définissent les mêmes ensembles de nombres réels, et la relation $\leqslant_B$-maximum E_{S_∞} d'orbite induite par les actions du groupe symétrique S_∞. La relation $=^+$ est visiblement induite par une action de S_∞, qui est un groupe polonais, et par conséquent E_{S_∞} réduit E_G. Par ailleurs, si E est une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables sur un espace Z, alors pour tout z dans Z, l'on peut énumérer la classe $[z]_E$ de z d'une façon qui dépend de z, ce qui réduit E à $=^+$. Donc $E_\infty \leqslant_B =^+$.

En 1997, Kechris et Louveau [69] ont découvert qu'il existe des relations d'équivalence analytiques qui ne sont pas réductibles à une relation d'orbite, ou de manière équivalente, à E_G. Il existe en fait une relation appelée E_1, qui est minimale parmi les relations d'équivalence boréliennes qui ne sont pas réductibles à une relation d'orbite, définie comme la relation d'égalité, à perturbation finie près, entre suites de nombres réels : c'est-à dire, pour $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$xE_1y \Leftrightarrow \exists n\ \forall m \geqslant n\ x_m = y_m.$$

La relation E_1 est jusqu'à présent la seule obstruction connue au fait qu'une relation d'équivalence borélienne soit réductible à une relation d'orbite. De manière similaire à E_0, E_1 n'est pas seulement caractérisée par une propriété de minimalité, mais aussi par le fait d'être maximum parmi les relations d'équivalence boréliennes *"hypersmooth"*, c'est-à dire que l'on peut écrire comme union d'une suite dénombrable de relations d'équivalence smooth.

Au delà de E_1 on trouve la relation $E_{\boldsymbol{K}_\sigma}$ maximum parmi toutes les relations d'équivalence $\boldsymbol{K}_\sigma$, c'est-à dire celles que l'on peut écrire come une union croissante d'ensembles compacts. On peut la définir par exemple sur l'espace $\prod_{n=1}^{\infty}\{1,\ldots,n\}$ par la formule :

$$xE_{\boldsymbol{K}_\sigma}y \Leftrightarrow \exists N\ \forall n\ |x_n - y_n| \leqslant N,$$

ou encore par une relation de croissance entre fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ [95]. Il n'est pas trop difficile de montrer que $E_\infty \leqslant_B E_{\mathbf{K}_\sigma}$, alors que, d'autre part, $=^+ \nleqslant_B E_{\mathbf{K}_\sigma}$.

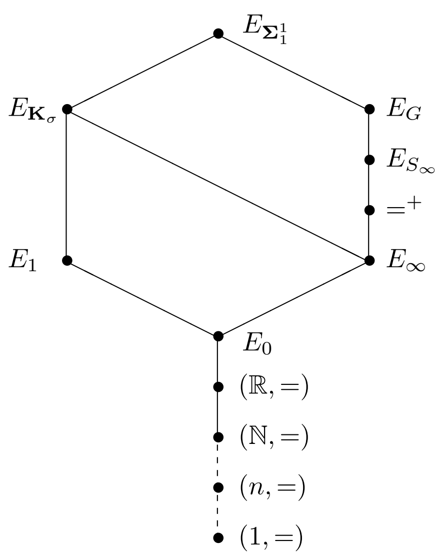

Diagramme simplifié de la complexité des relations d'équivalence analytiques.

Finalement la *relation d'équivalence analytique complète* $E_{\mathbf{\Sigma}_1^1}$ est la plus complexe de toutes les relations d'équivalence analytiques. Elle est définie formellement comme la relation maximum entre les relations d'équivalence analytiques et la preuve de son existence utilise certaines propriétés d'universalité des ensembles analytiques. Il en existe aussi des réalisations explicites, voir Louveau et Rosendal [79], ou, dans le cadre des relations entre espaces de Banach séparables, la suite de cette thèse.

4.2 Espaces boréliens standard

Comme la définition de l'ordre $\leqslant_B$ impose que la fonction f qui réalise la réduction d'une relation d'équivalence à une autre soit borélienne, la topologie des espaces considérés jouera un rôle via les parties boréliennes qu'elle engendre. On préfèrera donc parler d'espace borélien standard plutôt que d'espace Polonais : un *espace borélien standard* est un espace muni d'une σ-algèbre qui est la σ-algèbre des boréliens associés à une certaine topologie polonaise sur l'espace. Pour voir la classe des espaces de Banach séparables comme un espace borélien standard, on observe qu'à isométrie près ils peuvent tous être représentés comme des sous-espaces fermés d'un espace isométriquement universel et séparable, par exemple $C([0,1])$. Pour voir la classe des sous-espaces fermés de $C([0,1])$ comme un espace borélien standard, on désigne par $F(X)$ l'ensemble des sous-ensemble fermés (non vides) de $X = C([0,1])$ et l'on équipe $F(X)$ de la structure borélienne d'Effros, c'est-à dire la σ-algèbre engendrée par les ensembles de la forme

$$\{F \in F(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\},$$

où U parcourt les parties ouvertes de X. Muni de la structure borélienne d'Effros, $F(X)$ devient un espace borélien standard, voir [67]. On peut vérifier facilement que l'ensemble $\mathfrak{B}$ des sous-espaces *vectoriels* fermés de X forme un sous-ensemble borélien de $F(X)$. Ainsi $\mathfrak{B}$ est une partie borélienne de $F(X)$ et par conséquent elle-même est un un espace borélien standard : on l'appellera *l'espace borélien standard des espaces de Banach séparables.* De même SB désignera l'espace borélien standard des espaces de Banach séparables de dimension infinie.

Dans ce cadre il est alors facile de vérifier que l'isomorphisme linéaire est analytique, ainsi que d'autres relations naturelles entre espaces séparables : isométrie, plongement, isomorphisme Lipschitz, etc....

Dans de nombreux cas, on s'intéresse moins à la classe de tous les espaces de Banach séparables qu'à une certaine sous-classe borélienne d'espaces, par exemple celle des sous-espaces d'un espace donné. Mais il n'est pas compliqué de montrer que si $X \in SB$, alors $SB(X) = \{Y \in SB \mid Y \subseteq X\}$ est borélien, et on peut alors parler de la complexité de la relation d'isomorphisme restreinte à cet ensemble.

Si l'on s'intéresse à une relation entre sous-suites d'une base donnée $(e_n)_n$ d'un espace X, par exemple l'isomorphisme des sous-espaces engendrés par les sous-suites, ou encore l'équivalence de ces sous-suites, on identifie l'espace $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ des parties infinies de $\mathbb{N}$ avec l'ensemble des sous-suites de $(e_n)_n$. Le plongement associé de $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{B}(X)$ est borélien et par conséquent on peut aussi parler de la complexité de l'isomorphisme entre sous-espaces engendrés par des sous-suites de la base, ou de la complexité de l'équivalence entre ces sous-suites. De la même manière on peut utiliser l'espace topologique $bb(e_n)$ défini en préliminaire pour définir la complexité de l'isomorphisme entre bloc sous-espaces d'un espace X à base (e_n).

Il est alors naturel de se demander où se situe la complexité de divers problèmes de classification des espaces de Banach séparables (à isomorphisme linéaire près, à isométrie (linéaire) près, à isomorphisme lipschitzien près, à homémomorphisme uniforme près, etc...), dans la hiérarchie des relations d'équivalence analytiques. Par exemple, si l'on peut montrer que la relation d'isomorphisme est de grande complexité, alors l'on a donné un sens mathématique à l'impression que cette relation est très difficile à étudier.

En 2003, Gao and Kechris [51] ont montré que l'isométrie entre espaces métriques séparables complets est biréductible avec la relation d'orbite la plus complexe, E_G, et par conséquent la relation d'isométrie entre espaces de Banach séparables est au plus de cette complexité. En 2007, Melleray [83] a montré que l'isométrie sur SB est en fait boréliennement biréductible avec E_G. Ceci est en contraste avec le résultat de Louveau et Rosendal en 2005, selon lequel la relation de biplongement (linéaire) isométrique entre espaces de Banach séparables est une relation d'équivalence analytique complète [79].

Concernant la complexité de l'isomorphisme, des bornes inférieures ont successivement été obtenues par Bossard en 2002 (E_0, [13]), Rosendal en 2003 (E_1, [93]), et Ferenczi-Galego en 2006 (le produit $E_{\boldsymbol{K}_\sigma} \otimes =^+$, [38]). Nous reviendrons plus loin sur ces résultats et sur les espaces spécifiques qui sont utilisés dans leurs preuves. La complexité exacte de l'isomorphisme entre espaces de Banach séparables a finalement été déterminée en 2006 par Ferenczi, Louveau, et Rosendal [42]. Elle est la plus grande possible parmi les relations d'équivalence analytiques. Le chapitre suivant est consacré à ce résultat.

Chapitre 5

La complexité de l'isomorphisme

Dans ce chapitre on démontre le théorème suivant de Ferenczi, Louveau et Rosendal [42]. Sauf mention du contraire, les résultats de ce chapitre proviennent du même article.

Théorème 62 (Ferenczi–Louveau–Rosendal, 2006)
Les relations d'isomorphisme, d'isomorphisme lipschtizien, de biplongement isomorphe (complémenté), et de biplongement lipschitzien entre espaces de Banach séparables sont analytiques complètes, c'est-à dire, maxima parmi les relations d'équivalence analytiques pour l'ordre de réduction borélienne $\leqslant_B$. Il en est de même pour la relation d'équivalence permutative entre suites basiques inconditionnelles.

On obtient donc par le Théorème 62 de nouvelles réalisations naturelles de la relation analytique complète $E_{\Sigma_1^1}$. Auparavant, Louveau et Rosendal avaient obtenu des réalisations de cette relation comme certaines relations entre arbres, et en avaient déduit que le biplongement isométrique entre espaces de Banach était un exemple de relation analytique complète [79].

Avant de donner la preuve du Théorème 62 nous donnons un schéma de la position des principales relations entre espaces de Banach séparables sur l'échelle de la complexité des relations d'équivalence, ainsi que de quelques autres relations naturelles en analyse, voir au dos.

Observons pour commencer que l'on peut distinguer deux méthodes générales pour le problème de déterminer si deux espaces de Banach sont ou non isomorphes. S'ils sont équipés d'une structure plus riche, comme par exemple une base de Schauder, ce qui dans la pratique est presque toujours le cas, on peut montrer qu'ils sont isomorphes en montrant que leurs bases respectives sont liées d'une façon plus simple à analyser que l'isomorphisme. Par exemple, si ces bases sont équivalentes, les espaces associés sont isomorphes. Si par contre l'on cherche à montrer que deux espaces de Banach ne sont pas isomorphes, on cherchera plutôt des invariants qui prennent des valeurs différentes pour les deux espaces, comme par exemple le type, le cotype, l'indice de Szlenk, ou l'indice de plongement des espaces ℓ_p (c'est-à dire l'ensemble des p tels que ℓ_p se plonge dans l'espace). Nous nous inspirons de telles idées pour la preuve du Théorème 62. Notons que de telles considérations justifient également d'étudier la complexité de relations liées à l'isomorphisme pour déterminer quelles sont les réductions qui peuvent donner le resultat espéré. Par exemple, comme l'équivalence des bases de Schauder n'est que $E_{\mathbf{K}_\sigma}$, voir Rosendal [95], on ne peut espérer montrer que l'isomorphisme est $E_{\mathbf{\Sigma}_1^1}$, par une réduction à l'isomorphisme entre certains sous-espaces qui sont isomorphes si et seulement si certaines bases canoniques sont équivalentes. On va voir par contre que l'on peut montrer que l'isomorphisme est $E_{\mathbf{\Sigma}_1^1}$ par une réduction entre certains espaces qui sont isomorphes si et seulement si certaines bases canoniques sont *permutativement* équivalentes.

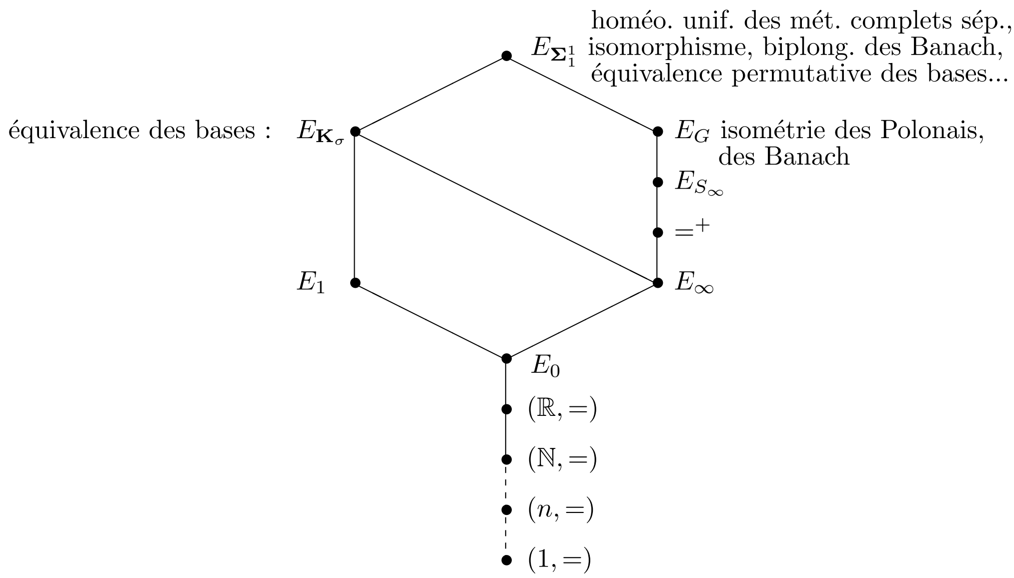

Diagramme simplifié de la complexité de certaines relations d'équivalence naturelles entre espaces de Banach séparables.

Pour prouver le Théorème 62, on combine des résultats de complétude de Louveau et Rosendal [79], publiés en 2005, avec une construction de S. Argyros et P. Dodos de la même époque [7]. La méthode d'Argyros–Dodos permet d'associer à tout ensemble analytique de bases de Schauder un espace séparable dont les suites basiques sont "essentiellement" ou du moins sont fortement reliées à celles de l'ensemble analytique. Les résultats de complétude de Louveau et Rosendal, d'autre part, montrent que certaines relations entre ensembles analytiques sont analytiques complètes. On peut alors associer ces relations analytiques complètes entre ensembles analytiques à des relations entre espaces de Banach séparables qui deviennent ainsi analytiques complètes. Nous allons d'abord appliquer cette méthode pour étudier la relation d'équivalence permutative entre bases de Schauder.

5.1 Un théorème de Louveau et Rosendal

Le résultat fondamental de Louveau et Rosendal [79] utilisé dans notre preuve est le suivant :

Lemme 63 (Louveau - Rosendal, 2005) *Soit $R \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ un quasiordre $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Alors il existe un arbre T sur $2 \times 2 \times \omega$ avec les propriétés suivantes*

1. $xRy \Leftrightarrow \exists \alpha \in \omega^\omega\ \forall n\ (x|_n, y|_n, \alpha|_n) \in T$,
2. *si* $(u, v, s) \in T$ *et* $s \leqslant t$, *alors* $(u, v, t) \in T$,
3. *pour tout* $(u, s) \in (2 \times \omega)^{<\omega}$, *on a* $(u, u, s) \in T$,
4. *si* $(u, v, s) \in T$ *et* $(v, w, t) \in T$, *alors* $(u, w, s + t) \in T$.

Ici, si s est une suite finie et $|s|$ désigne sa longueur, pour deux suites finies s et t, $s \leqslant t$ signifie que $|s| = |t|$ et pour tout $i < |s|, s(i) \leqslant t(i)$. Pour s, t de même longueur, on pose $(s + t)(i) = s(i) + t(i)$.

Soit $\mathfrak{T}$ la classe des arbres *normaux* non vides sur $2 \times \omega$, c'est à dire, des arbres T tels que $(\emptyset, \emptyset) \in T$ et tels que, dès que $(u, s) \in T$ et $s \leqslant t$, alors $(u, t) \in T$, et $\mathfrak{T}_{\mathrm{pr}}$ la classes des arbres normaux "pruned", c'est-à dire tels que toute suite de l'arbre admet une extension stricte dans l'arbre. Ces deux classes sont des espaces Polonais.

A chaque arbre normal (pruned) T on peut associer un ensemble analytique $A(T)$ qu'il code de la manière suivante :

$$A(T) = \{\alpha \in 2^\omega \mid \exists \beta \in \omega^\omega\ \forall n\ (\alpha|_n, \beta|_n) \in T\}.$$

D'autre part, il est bien connu que tout sous-ensemble analytique de 2^ω est de la forme $A(T)$ pour un certain T normal pruned. Nous avons donc bien un *codage* des analytiques par les arbres pruned. On définit alors les relations suivantes sur $\mathfrak{T}_{pr}$.

Définition 64 *Pour $S, T \in \mathfrak{T}_{pr}$ soit*

$$S \leqslant_{\mathbf{\Sigma}^1_1} T \Leftrightarrow \exists \alpha \in \omega^\omega\ \forall (u, s)\ \big((u, s) \in S \Rightarrow (u, s + \alpha|_{|s|}) \in T\big),$$
$$S \equiv_{\mathbf{\Sigma}^1_1} T \Leftrightarrow S \leqslant_{\mathbf{\Sigma}^1_1} T\ \&\ T \leqslant_{\mathbf{\Sigma}^1_1} S,$$
$$S \subseteq_{\mathbf{\Sigma}^1_1} T \Leftrightarrow A(S) \subseteq A(T),$$
$$S =_{\mathbf{\Sigma}^1_1} T \Leftrightarrow A(S) = A(T).$$

En particulier, notons que $S \leqslant_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$ implique $S \subseteq_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$, mais les deux relations ne sont bien sûr pas équivalentes en général. Louveau et Rosendal démontrent alors le résultat suivant.

Théorème 65 (Louveau - Rosendal, 2005) *Soit R une relation d'équivalence analytique sur un espace Polonais E et supposons qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathfrak{T} \to E$ telle que pour tous $S, T \in \mathfrak{T}_{pr}$,*
(i) $S \equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T \Rightarrow f(S)Rf(T)$
(ii)$S \not\equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T \Rightarrow f(S)\neg Rf(T)$.
Alors (E, R) est analytique complète.

Ce qui est intéressant dans ce théorème c'est que si l'on veut prouver qu'une certaine relation analytique R est analytique complète en trouvant une réduction à partir des arbres normaux et pruned, il suffit de montrer que si deux arbres codent le même ensemble analytique dans un sens fort, c'est à dire quand il existe un α uniforme qui réalise une translation entre les arbres, alors les images sont R-équivalentes, mais d'autre part, pour l'autre direction, il suffit de considérer des arbres qui codent réellement des ensembles analytiques différents et de montrer que leurs images ne sont pas R-équivalentes.

Ici nous allons construire à partir d'un arbre codant un sous-ensemble analytique de $]1, 2[$ un espace de Banach dont les seuls sous-espaces de type ℓ_p sont exactement ℓ_2 et les ℓ_p pour p dans l'ensemble analytique. Ainsi quand deux arbres ne seront pas $=_{\mathbf{\Sigma}_1^1}$-reliés, ils auront des sous-espaces ℓ_p différents et donc sont non-isomorphes. De plus la construction garantira que si deux arbres sont $\equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1}$-reliés, alors les espaces associés sont isomorphes.

5.2 Sommes ℓ_2-Baire de Argyros et Dodos

Soit T l'arbre $(2 \times \omega)^{<\omega}$. Une *demi-droite* $\mathfrak{d}$ de T est un ensemble de la forme $[t_0, \sigma) = \{t \in \mathsf{T} \mid t_0 \subseteq t \subseteq \sigma\}$ pour $t_0 \in \mathsf{T}$ e $\sigma \in (2 \times \omega)^{\omega}$. Deux noeuds s et t sont dits comparables si $s \subseteq t$ ou $t \subseteq s$, et incomparables dans le cas contraire. Deux demi-droites sont dites *incomparables* si leurs extrêmités sont incomparables.

Pour chaque demi-droite $\mathfrak{d} = [t_0, \sigma)$ de l'espace vectoriel $c_{00}(\mathsf{T})$ de base $(e_t)_{t \in \mathsf{T}}$, on définit une semi-norme $\| \cdot \|_{\mathfrak{d}}$ sur $c_{00}(\mathsf{T})$ par

$$\| \sum_{t \in \mathsf{T}} \lambda_t e_t \|_{\mathfrak{d}} = \|(\lambda_t)_{t \in \mathfrak{d}}\|_{p_\alpha},$$

où $\sigma = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in 2^\omega$ et $\beta \in \omega^\omega$, et $\alpha \mapsto p_\alpha$ est un homéomorphisme donné de 2^ω sur un sous-ensemble de $]1, 2[$.

Finalement, on définit une norme $\interleave \cdot \interleave$ sur $c_{00}(\mathsf{T})$ par

$$\interleave \sum_{t \in \mathsf{T}} \lambda_t e_t \interleave = \sup \Big\{ \Big(\sum_{i=1}^{l} \| \sum_{t \in \mathfrak{d}_i} \lambda_t e_t \|_{\mathfrak{d}_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Bigm| (\mathfrak{d}_i)_{i=1}^{l} \text{ demi-droites incomp. de } \mathsf{T} \Big\}$$

et l'on appelle $\mathcal{T}_2$ la complétion de $c_{00}(\mathsf{T})$ pour cette norme. L'espace $\mathcal{T}_2$ est défini et étudié dans [7], où il est appelé somme ℓ_2-Baire, et où il est noté que des normes similaires avaient déjà été définies par Bourgain [14] et Bossard [13].

Théorème 66 *La relation d'équivalence permutative entre bases de Schauder (inconditionelles) est une relation d'équivalence analytique complète.*

Ce résultat fournit une des représentations les plus simples de la relation analytique complète. En particulier cette relation est aussi complexe que l'isomorphisme - en fait, comme nous allons le voir, de même complexité - ce qui peut sembler contredire l'impression que l'équivalence permutative entre bases de Schauder est en pratique plus facile à étudier que l'isomorphisme entre espaces de Banach.

Pour montrer ce résultat, l'idée est d'utiliser le Théorème 65 à l'aide de la réduction ϕ définie par :

$$\phi : S \mapsto (e_t)_{t \in S}.$$

Si S et T sont normaux et pruned sur $2 \times \omega$ et tels que $S \equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$ soit témoigné par un certain $\alpha \in \omega^\omega$, c'est-à dire

$$\forall (u,s)\ \big((u,s) \in S \Rightarrow (u, s + \alpha|_{|s|}) \in T\big)$$

et

$$\forall (u,s)\ \big((u,s) \in T \Rightarrow (u, s + \alpha|_{|s|}) \in S\big),$$

alors, par la définition de la norme il est facile de vérifier que $e_{(u,s)} \mapsto e_{(u,s+\alpha|_{|s|})}$ définit un plongement isométrique de $[e_t]_{t\in S}$ dans $[e_t]_{t\in T}$ et aussi un plongement isométrique de $[e_t]_{t\in T}$ dans $[e_t]_{t\in S}$. En particulier, chacune des bases inconditionnelles $(e_t)_{t\in S}$ et $(e_t)_{t\in T}$ est équivalente à une sous-suite de l'autre et elles sont par conséquent permutativement équivalentes. Cela s'ensuit facilement du théorème de Schröder-Bernstein et semble avoir été observé en premier par Mityagin en 1970 [84].

Si d'autre part $S \not\equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$, on peut trouver $\alpha \in 2^\omega$ tels que $\alpha \in \mathrm{proj}[S] \setminus \mathrm{proj}[T]$. Soit $\beta \in \omega^\omega$ tel que $(\alpha, \beta) \in [S]$, alors $(e_{(\alpha|n,\beta|n)})_n$ est équivalente à la base de ℓ_{p_α}. Alors il n'y a pas de sous-suite de $(e_t)_{t\in T}$ équivalente à la base de ℓ_{p_α}. En effet si $(e_t)_{t\in A}$ est une sous-suite de $(e_t)_{t\in T}$, alors par le théorème de Ramsey on peut trouver $B \subseteq A$ telle que $B \subseteq \{(\gamma|n, \delta|n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour un certain $(\gamma, \delta) \in [T]$ ou les éléments de B sont deux à deux incomparables. Dans le premier cas, $(e_t)_{t\in B}$ est équivalente à une sous-suite de la base de ℓ_{p_γ} et donc, comme $p_\gamma \neq p_\alpha$, n'est pas équivalente à ℓ_{p_α}, et dans le deuxième cas, par construction de $\mathcal{T}_2$, $(e_t)_{t\in B}$ est équivalente à la base ℓ_2, qui n'est pas non plus équivalente à la base de ℓ_{p_α}. De ceci on déduit que si $S \not\equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$ alors $(e_t)_{t\in S} \not\approx_p (e_t)_{t\in T}$, et cela conclut la preuve que le Théorème 65 s'applique.

Le Théorème 66 peut être utilisé pour étudier l'homéomorphisme uniforme entre espaces séparables métriques complets. On peut ainsi montrer, mais nous n'en donnerons pas la preuve ici, que

Théorème 67 *La relation d'homéomorphisme uniforme entre espaces métriques complets séparables est analytique complète.*

Mais il reste ouvert de savoir si l'homéomorphisme uniforme entre espaces de Banach séparables est analytique complet.

5.3 Espaces interpolés de Davis, Figiel, Johnson et Pełczynski

Pour montrer que l'isomorphisme entre espaces de Banach séparables est analytique complet, la construction ci-dessus ne paraît pas convenir. Par exemple, d'après [7], l'espace $\mathcal{T}_2$ contient une copie de c_0 et par conséquent le contrôle que l'on a sur les sous-espaces présents dans $\mathcal{T}_2$ ne semble pas suffisant. Comme déjà entrepris par Argyros et Dodos dans [7], nous utiliserons donc une méthode similaire, mais avec un espace qui est une variation de $\mathcal{T}_2$ basé sur la méthode d'interpolation de Davis, Figiel, Johnson, et Pełczyński [22], afin d'éviter certains sous-espaces.

Si S est un sous-arbre pruned de T, et Z_S le sous-espace de $\mathcal{T}_2$ de base $(e_t)_{t\in S}$, on remplace donc Z_S par un interpolé $\Delta(Z_S, 2)$ qui élimine certains vecteurs dont le support est trop largement étalé entre les différentes branches, mais qui préserve la norme sur les branches. On utilisera les résultats suivants qui sont démontrés par Argyros et Dodos dans [7], Théorèmes 71 et 74, sans donner la définition de $\Delta(Z_S, 2)$.

Théorème 68 (Argyros et Dodos, 2007) *Soit S un sous-arbre "pruned" de T. Pour $\sigma \in [S]$, soit $\mathcal{X}_\sigma$ le sous-espace de $\Delta(Z_S, 2)$ de base $(e_t)_{t\subseteq\sigma}$ et P_σ la projection de $\Delta(Z_S, 2)$ sur $\mathcal{X}_\sigma$.*

1. *Pour tout $\sigma \in [S]$, $\mathcal{X}_\sigma$ est isomorphe à $X_\sigma \subseteq Z_S$.*
2. *Si $Y \subseteq \Delta(Z_S, 2)$ est un sous-espace tel que pour tous sous-espaces $Z \subseteq Y$ et $\sigma \in [S]$ la projection $P_\sigma : Z \to \mathcal{X}_\sigma$ n'est pas un plongement isomorphe, alors Y contient ℓ_2.*

De plus, $\Delta(Z_S, 2)$ est réflexif.

Théorème 69 *La relation d'isomorphisme entre espaces de Banach séparables est analytique complète.*

La preuve du Théorème 69 est essentiellement la même que celle du cas de l'équivalence permutative. La réduction est

$$S \mapsto \Delta(Z_S, 2)$$

pour tout sous-arbre pruned normal de S de T. D'après les résultats de Argyros et Dodos, si Y est un sous-espace de $\Delta(Z_T, 2)$ alors Y contient une copie de ℓ_2 ou une copie de ℓ_{p_α} où α est tel que $(\alpha, \beta) \in [T]$ pour un certain β. Par la même preuve que précédemment, si $S \equiv_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$, alors $\Delta(Z_S, 2)$ et $\Delta(Z_T, 2)$ sont donc isomorphes, via l'inconditionnalité et l'équivalence permutative des bases. Mais si $S \not\subseteq_{\mathbf{\Sigma}_1^1} T$, alors il existe $\alpha \in \mathrm{proj}[S] \setminus \mathrm{proj}[T]$ et l'on obtient que ℓ_{p_α} se plonge dans $\Delta(Z_S, 2)$ mais non dans $\Delta(Z_T, 2)$.

Les espaces considérés étant réflexifs, il s'ensuit de résultats classiques de théorie non-linéaire pour les espaces de Banach, que les espaces réalisant la réduction sont isomorphes si et seulement si ils ont Lipschitz isomorphes, ou encore s'ils sont en relation de biplongement ou autres relations citées ci-dessous (voir [12] chapitre 7 pour plus de détails).On a donc

Théorème 70 *Les relations d'isomorphisme lipschitzien, de biplongement isomorphe (complémenté), de biplongement lipschitzien, de biplongement lipschitzien (complémenté) sont analytiques complètes.*

Notons en particulier que l'isomorphisme et le biplongement isomorphe complémenté sont de même complexité, bien que par la solution de Gowers au problème de Schroeder-Bernstein pour les espaces de Banach dans les années 1990 [55], ces relations soient différentes. Observons le résultat suivant [39], qui donne une mesure de cette différence.

Théorème 71 (Ferenczi - Galego, 2007) *Il existe une famille de cardinalité 2^ω d'espaces de Banach séparables qui se plongent de manière complémentée les uns dans les autres mais sont deux à deux non isomorphes.*

En considérant les espaces de Banach comme des groupes abéliens, on déduit aussi du résultat principal de ce chapitre [42] :

Théorème 72 *La relation d'isomorphisme topologique entre groupes Polonais est analytique complète.*

Notons enfin qu'il existe aussi une théorie de classification des relations de quasiordre analytique par leur complexité relative. Des résultats similaires au Théorème 62 concernant les relations de plongement isomorphe, plongement isomorphe complémenté, plongement Lipschitzien, équivalence d'une suite basique avec une permutation d'une sous-suite d'un autre, etc... se déduisent alors immédiatement des mêmes méthodes : ces relations sont biréductibles à la relation de quasiordre analytique complète pour les quasiordres analytiques, voir [42].

Etant donné un espace de Banach séparable X qui n'est pas isomorphe à ℓ_2, la question demeure maintenant de savoir quelle est la complexité de l'isomorphisme (et éventuellement, du plongement isomorphe, etc...) entre les sous-espaces de X. Comme nous le verrons, cette question demeure ouverte même pour les espaces classiques : seules des bornes inférieures pour la complexité ont été obtenues jusqu'à présent, à l'exception de l'espace universel inconditionnel de Pełczynski, pour lequel les méthodes de [42] impliquent que la complexité est analytique complète.

Nous dirons qu'un espace de Banach séparable est *analytique complet* quand l'isomorphisme entre ses sous-espaces est analytique complet et donc reflète la complexité de l'isomorphisme entre tous les espaces de Banach séparables. Nous avons déjà défini un espace comme *ergodique* quand l'isomorphisme entre ses sous-espaces réduit la relation E_0, ce qui implique que ses sous-espaces ne soient pas classifiables à isomorphisme près par des nombres réels. On étend donc la Conjecture 18 mentionnée en introduction en posant la question suivante :

Question 73 *Soit X un espace de Banach séparable qui n'est pas isomorphe à ℓ_2. Est-ce que X est ergodique ? Est-ce que X est analytique complet ?*

Dans le chapitre suivant, nous donnons quelques réponses partielles dans la direction de la Question 73. Nous montrons que de nombreux espaces classiques sont ergodiques, et donnons une liste de propriétés de régularité que doivent satisfaire les espaces non-ergodiques.

Chapitre 6

Complexités d'espaces de Banach séparables

6.1 Quelques espaces classiques

Nous donnons une liste des bornes inférieures obtenues pour la complexité de divers espaces classiques. Evidemment, tout espace est de complexité au moins aussi grande que la complexité des espaces classiques qu'il contient. Rappelons que P désigne l'espace inconditionnel universel de Pełczyński.

L'espace G_u est ergodique. Cela fut observé par Bossard en 2002 [13], et s'obtient par une réduction à l'isomorphisme entre sous-suites de la base canonique, comme conséquence immédiate de la propriété caractéristique de G_u.

L'espace GM est ergodique. Plus généralement, des travaux de Rosendal [94] montrent que tout espace HI, et même tout espace exotique est ergodique.

La complexité de T est au moins E_1. Il en est de même pour la complexité de T^*. C'est un résultat de Rosendal de 2003, [93] basé sur l'étude faite par Casazza et Shura [21] des cas d'isomorphisme entre les sous-espaces engendrés par des sous-suites de la base.

La complexité de c_0 et $\ell_p, 1 \leqslant p < 2$ est au moins $E_{\boldsymbol{K}_\sigma}$. Pour cela Ferenczi et Galego ([38], 2006) réalisent une réduction de $E_{\boldsymbol{K}_\sigma}$ à l'isomorphisme entre sous-espaces de ℓ_p du type $(\sum \ell_{p_n}^{K_n})_{\ell_p}$ pour p_n, K_n bien choisis, c'est à dire de telle manière que de tels espaces soient isomorphes si et seulement si leurs bases canoniques soient équivalentes - et pour cela utilisent les méthodes de Casazza et Kalton concernant l'unicité des bases inconditionnelles à équivalence permutative près [19]. Ils procèdent de manière similaire pour c_0, à l'aide des résultats de Casazza et Kalton sur l'unicité de bases inconditionnelles de c_0-sommes, [20]. Notons que dans le cas $p > 2$ on ne connaît jusqu'à présent que $\aleph_1$ sous-espaces deux à deux non isomorphes [77].

La complexité de $L_p, 1 \leqslant p < 2$ est au moins $E_{\boldsymbol{K}_\sigma} \otimes =^+$. Ce cas s'obtient en ajoûtant aux sous-espaces du cas ℓ_p des sous-espaces du type $(\sum \ell_{p_i})\ell_p$ pour $p < p_i < 2$, voir Ferenczi - Galego ([38], 2006).

L'espace P de Pełczyński est analytique complet. Comme déjà mentionné précédemment, c'est une conséquence des techniques de [42].

La complexité de $\ell_2(X)$ est au moins $(\mathbb{N}, =)$ pour $X \not\simeq \ell_2$. Ce résultat est dû à R. Anisca [4] en 2004, quand X a cotype fini, comme conséquence de l'existence de sous-espaces à UFDD n-uniforme mais sans UFDD $n+1$-uniforme dans X - ses méthodes généralisent des résultats de Komorowski - Tomczak-Jaegermann [71]. Dans [46], Ferenczi et Rosendal observent que l'hypothèse de cotype fini n'est pas nécessaire.

Nous dressons un tableau des résultats de la liste ci-dessus. Plus loin nous ferons une étude plus systématique de ces résultats en recherchant la complexité des espaces de chacune des 19 classes du Théorème 54.

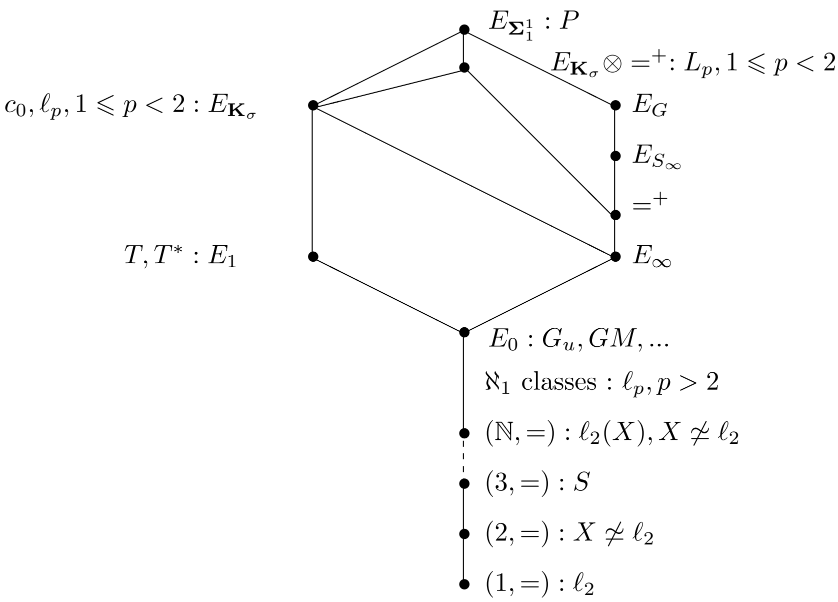

Diagramme des bornes inférieures de complexité des espaces de Banach classiques.

Notons que si X est muni d'une base et que l'on se restreint aux bloc sous-espaces de X, les espaces c_0 et ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, munis de leurs bases canoniques, deviennent les espaces homogènes naturels. Il reste ouvert de savoir si c_0 et ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$ sont les seuls espaces qui admettent une base bloc-homogène, c'est-à dire pour laquelle les bloc sous-espaces sont tous isomorphes entre eux. Il est facile de voir que les résultats représentés ci-dessus pour G_u, GM, P et T_u s'obtiennent en n'utilisant que des sous-espaces engendrés par des sous-suites de la base canonique. Observons d'ailleurs plus généralement que d'après Dilworth, Ferenczi, Kutzarova et Odell [24], pour tout espace X avec une base fortement asymptotiquement ℓ_p ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$), qui n'est pas équivalente à la base canonique de c_0 ou ℓ_p, E_0 est boréliennement réductible à l'isomorphisme entre les sous-espaces engendrés par des sous-suites de la base de X.

6.2 Espaces à base inconditionnelle

L'idée générale de cette section est que les espaces à base inconditionnelle qui ne sont pas ergodiques doivent satisfaire certaines propriétés algébriques (isomorphisme avec leur carré, avec leurs hyperplans, etc...). Ils sont en ce sens plus proches d'un espace de Hilbert qu'un espace de Banach séparable quelconque. En fait si l'on s'intéresse uniquement aux propriétés d'homogénéité des sous-espaces engendrés par des sous-suites, ou par des bloc bases d'une base donnée, on ne peut pas différencier les espaces isomorphes à c_0 ou ℓ_p des espaces isomorphes à ℓ_2. Il sera donc plus juste de dire que nous travaillons dans la direction suivante : un espace à base qui possède peu de bloc sous-espaces non isomorphes (par exemple s'ils sont classifiables par des réels à isomorphisme près), doit posséder des propriétés de régularité qui le rendent proches des espaces c_0 ou ℓ_p. Mais la conjecture générale, rappelons-le, est que les espaces non ergodiques doivent être en fait isomorphes à ℓ_2 !

Des résultats très similaires à ceux qui sont présentés ici, dans le contexte de la propriété de Schröder-Bernstein pour les espaces de Banach séparables, ont été développées par N.J. Kalton dans [66], mais les méthodes employés sont différentes. Nous utilisons ici le théorème de Baire, ce qui nous permet d'obtenir l'uniformité de certaines constantes d'isomorphisme.

Rappelons d'abord le résultat suivant de Rosendal [94].

Lemme 74 *Tout espace HI est ergodique.*

Plus généralement on peut montrer que tout espace exotique est ergodique. Notons alors qu'à cause de la première dichotomie de Gowers, tout espace non-ergodique doit être saturé de suites basiques inconditionnelles, ce qui justifie de se limiter à l'étude de bases inconditionnelles dans ce qui suit. Le résultat suivant est dû à Rosendal [94] et Ferenczi-Rosendal [45],[47] dans les années 2004-2006.

Théorème 75 *Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle (e_i). Alors E_0 se réduit à l'isomorphisme entre les espaces engendrés par des sous-suites de (e_i), ou X est uniformément isomorphe à $X \oplus Y$, pour tout Y engendré par une sous-suite finie ou infinie de la base - et en particulier isomorphe à son carré et à ses hyperplans - et, de plus, isomorphe à une somme directe infinie de copies uniformément isomorphes de lui-même.*

L'idée de la preuve est la suivante : on montre que si E_0 ne se réduit pas à la réduction induite sur $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ par l'isomorphisme, alors il existe une certaine classe d'isomorphisme qui est non-maigre, puis, par invariance par perturbations de dimension finie, que cette classe est comaigre. On utilise alors une caractérisation classique des ensembles comaigres de $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$, avec les propriétés de décomposition associées à l'existence d'une base inconditionnelle.

Ces résultats peuvent être étendus au cas des espaces avec décomposition inconditionnelle dans le même esprit que [66]. Ainsi par exemple, Ferenczi et Galego montrent que si X est un espace avec UFDD $\sum_{n=1}^{+\infty} E_n$ tel que l'isomorphisme entre ses sous-espaces soit classifiable par des nombres réels, il doit exister un $N \in \mathbb{N}$ et une suite infinie de parties disjointes $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[N, +\infty)$ telle que, si $Y = \sum_{n=N}^{+\infty} E_n$, alors $Y \simeq \sum_{k\in\mathbb{N}}(\sum_{i\in B_k} E_i)$, où $\sum_{i\in B_k} E_i$ est uniformément isomorphe à Y ; voir [39] pour les détails de la preuve et d'autres résultats.

En utilisant le cadre défini dans la première partie, on obtient un résultat semblable pour les bloc sous-espaces d'une base donnée (e_i) [45].

Théorème 76 (Ferenczi–Rosendal, 2005) *Soit X un espace de Banach avec une base inconditionelle. Alors E_0 est boréliennement réductible à l'isomorphisme entre bloc sous-espaces de X ou il existe un bloc sous-espace X_0 de X qui est uniformément isomorphe à $X_0 \oplus Y$ pour tous les bloc sous-espaces Y de X.*

Il est clair que X_0 est unique à isomorphisme près. Il est naturel de se demander si cette classe peut être choisie égale à celle de X, comme dans le Théorème 75. Il ne semble pas que ce soit le cas en général.

6.3 Plongement, biplongement et isomorphisme

Pour chacune des 19 classes de la nouvelle liste de Gowers, on peut se demander quelle est la complexité des relations de plongement, $\sqsubseteq$, biplongement, $\equiv$, et isomorphisme, $\cong$, sur un espace de la classe en question. Rappelons que la troisième question de Gowers demande quels quasiordres peuvent être réalisés comme l'ensemble $SB(X)$ des sous-espaces d'un espace de Banach séparable X partiellement ordonné par $\sqsubseteq$. Nous allons voir que les techniques de notre réponse à la troisième question de Gowers s'adaptent au cadre de la structure borélienne des espaces de Banach séparables.

Définition 77 *Si E est une relation d'équivalence analytique sur un espace Polonais $\mathcal{Z}$, et X est un espace de Banach séparable, on dit que X a une E-*antichaîne *s'il existe une fonction borélienne $f\colon \mathcal{Z} \to SB(X)$ telle que pour tous $x, y \in \mathcal{Z}$*

1. *si xEy, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont isomorphes,*
2. *si $x \not\!E\, y$, alors $f(x)$ sont $f(y)$ incomparables.*

Avoir une E-antichaîne implique en particulier que X a au moins autant de sous-espaces non isomorphes que E a de classes, et que E est boréliennement réductible à la relation d'isomorphisme entre sous-espaces de X ainsi qu'à la relation de biplongement. En particulier, si X possède une E_0-antichaîne alors X est ergodique.

Les techniques de la version continue de la troisième dichotomie, Proposition 57, permettent alors à Ferenczi et Rosendal de montrer dans leur article [47] :

Théorème 78 *Soit X un espace de Banach séparable. Alors X contient soit un sous-espace minimal, soit une E_0-antichaîne.*

On peut aussi s'intéresser à la complexité de $\sqsubseteq$, en cherchant les quasi-ordres qui se plongent boréliennement dans cette relation. Il est simple de voir que la relation $\subseteq_0$ définie lors de l'étude de la troisième question de Gowers se plonge boréliennement dans le quasiordre $\subseteq^*$ sur $[\mathbb{N}]$ d'inclusion à parties finies près, et donc le Théorème 60 implique que $\subseteq_0$ se plonge boréliennement dans $SB(X)$, dès que X ne contient pas sous-espace minimal. Par contre $\subseteq^*$ ne se plonge pas boréliennement dans $\subseteq_0$ et donc il n'est pas clair que l'on puisse étendre ce résultat à $\subseteq^*$. Par exemple il reste ouvert de savoir si $\subseteq^*$ se plonge boréliennement dans $SB(X)$ quand X est HI.

On déduit donc du Théorème 78, et de quelques autres résultats mentionnés précédemment, le résultat suivant. Notons que les espaces ℓ_p, $p > 2$, ainsi que l'espace de Schlumprecht S, classe (6a), restent à étudier dans ce contexte.

Théorème 79 *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie appartenant à l'un des types du Théorème 54. Alors chacune des relations de plongement $\sqsubseteq$, de biplongement $\equiv$, et d'isomorhisme $\cong$, respecte les bornes inférieures indiquées dans le tableau suivant.*

Type	$\cong$	$\equiv$	$\sqsubseteq$
(1)(2) HI, étroit	E_0	E_0	E_0*-antichaîne*, $\subseteq_0$
(3) étroit par support	E_0	E_0	E_0*-antichaîne*, $\subseteq_0$, *ens. borélien non-dénombrable d'espaces totalement incomparables*
(4)(5) étroit, quasiminimal, base inconditionnelle	E_0	E_0	E_0*- antichaîne*, $\subseteq_0$
(6a) minimal,	*2*	*t*	*t*
unif. inhomogène,		*r*	*r*
(6b) minimal,	E_0	*i*	*i*
réflexif, fort. as. ℓ_∞		*v*	*v*
(6c) : $\ell_p, 1 \leqslant p < 2$ *ou* c_0	E_{K_σ}	*i*	*i*
: $\ell_p, p > 2$	$\aleph_1$ *classes*	*a*	*a*
: ℓ_2	*trivial*	*l*	*l*

Bornes inférieures de complexité
pour l'isomorphisme $\cong$, le biplongement $\equiv$ et le plongement $\sqsubseteq$,
pour chacune des classes de la liste de Gowers.

Chapitre 7

Homogénéité et complexité

Rappelons le théorème de Gowers et Komorowski–Tomczak-Jaegermann, selon lequel tout espace de Banach homogène est isomorphe à ℓ_2, et la conjecture générale, non résolue, qui nous guide :

Conjecture 80 *Tout espace de Banach séparable est soit ergodique, soit isomorphe à ℓ_2.*

Nous présentons dans ce dernier chapitre quelques résultats dans la direction de cette conjecture et de problèmes d'homogénéité associés, obtenus en considérant d'autres relations que l'isomorphisme, comme l'équivalence permutative des bases associées ou l'isomorphisme lipschitzien, ce qui suppose dans certains cas de restreindre les sous-espaces considérés. Par exemple, si la relation considérée est l'équivalence permutative des bases, on se restreindra aux sous-espaces à base inconditionnelle, ou aux bloc sous-espaces d'un espace à base inconditionnelle donnée. Nous reviendrons aussi à la question de l'isomorphisme, en observant comment elle peut être éclairée par les résultats obtenus pour d'autres relations.

D'abord il est très facile d'étudier le cas de l'équivalence entre les bases. A l'aide du résultat de Zippin de 1966 sur les bases parfaitement homogènes, voir [77], on montre que E_0 se réduit à l'équivalence entre les bloc-bases normalisées de toute base normalisée qui n'est pas équivalentes à la base canonique de c_0 ou ℓ_p, voir [44]. Cependant l'on sait que l'équivalence est de basse complexité, E_{K_σ}, et donc il n'est pas surprenant que les résultats correspondants soient simples. On aura des résultats plus intéressants en étudiant l'équivalence permutative, qui est d'après le Théorème 62 de complexité maximum, comme l'isomorphisme.

7.1 Equivalence permutative

Notons que les bases homogènes pour l'équivalence permutative sont les permutations des bases homogènes pour l'équivalence : par un résultat de Bourgain, Casazza, Lindenstrauss et Tzafriri de 1985, toute suite basique inconditionnelle qui est permutativement équivalente à toutes ses sous-suites est équivalente à une permutation de suite basique sous-symétrique [16]. Ces auteurs en déduisent que si une base de Schauder est permutativement équivalente à toutes ses bloc-bases normalisées, alors elle est équivalente à la base canonique de c_0 ou $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$.

Si E_0 n'est pas boréliennement réductible à l'équivalence permutative entre les sous-suites de (x_n), un résultat de Rosendal de 2004 de affirme que (x_n) a une sous-suite sous-symétrique [94] - notons que l'exemple de la base canonique de $\ell_1 \oplus \ell_2$ montre qu'on ne peut pas espérer conclure que (x_n) soit elle-même sous-symétrique. Dans la direction de la complexité de cette relation entre les bloc-bases d'une base donnée, on montre alors, [34] :

Théorème 81 (Ferenczi, 2006) *Soit (e_n) une suite basique inconditionnelle. Alors E_0 est boréliennement réductible à l'équivalence permutative entre bloc-bases normalisées de (e_n) ou il existe $p \in [1, +\infty]$ tel que toute bloc-base normalisée de (e_n) admette une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_p (ou de c_0 si $p = +\infty$).*

Ce théorème utilise, en plus du résultat de Rosendal, le théorème de Krivine de représentabilité finie des espaces ℓ_p en 1974, voir e.g. [72], et un théorème de stabilisation des fonctions Lipschitz de Odell, Rosenthal et Schlumprecht de 1993, appliqué aux modèles étalés [86].

Si l'on considère la base canonique (e_n) de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_p^n)_q$ pour $1 \leqslant p \neq q \leqslant +\infty$, on peut montrer facilement que toute bloc-base de (e_n) est soit équivalente à la base de ℓ_q, soit permutativement équivalente à (e_n). En particulier il n'y a dans ce cas que deux classes d'équivalence permutative sur $bb(e_n)$ et donc le résultat du Théorème 81 semble proche d'être optimal.

Une classe encore plus vaste de sous-espaces est celle des sous-espaces engendrés par une suite normalisée de blocs à supports disjoints d'une base donnée, que nous supposerons inconditionnelle, pour assurer que n'importe quelle suite de blocs à supports disjoints soit basique. On notera $dsb(X)$ l'espace de ces suites.

Encore une fois le problème d'homogénéité associé est simple, car il est clair, à partir des résultats de Bourgain, Casazza, Lindenstrauss et Tzafriri [16], qu'une suite basique qui est permutativement équivalente à toute ses suites normalisées de blocs à supports disjoints doit être équivalente à la base canonique de c_0 ou ℓ_p.

Par contre on obtient des résultats plus intéressants dans la direction d'une dichotomie entre homogénéité et complexité. Ainsi le résultat suivant de [34] améliore le résultat obtenu avec les bloc-bases. Rappelons qu'une base admet une p-estimation supérieure s'il existe une constante C telle que toute base de blocs disjoints (x_n) satisfasse $\|\sum_n x_n\| \leqslant C(\sum_n \|x_n\|^p)^{1/p}$ (ou $\sup_n \|x_n\|$ si $p = +\infty$), et que ℓ_p est dit disjointement finiment représentable sur une base

(e_n) s'il existe $C \geqslant 1$ tel que pour tout n, il existe une suite finie de vecteurs à supports disjoints sur (e_n) qui soit C-équivalente à la base canonique de ℓ_p^n.

Théorème 82 (Ferenczi, 2006) *Soit X un espace de Banach avec base inconditionnelle normalisée (e_n), tel que E_0 n'est pas boréliennement réductible à l'équivalence permutative sur $dsb(X)$. Alors il existe un unique $p \in [1, +\infty]$ tel que ℓ_p soit disjointement finiment représentable sur X. Si $p = +\infty$ alors (e_n) est équivalent à la base canonique de c_0. Si $p < +\infty$ alors X satisfait une p-estimation supérieure et toute bloc-base normalisée de X admet une suite équivalente à la base canonique de ℓ_p.*

Il reste ouvert de savoir si l'on peut obtenir simplement que (e_n) doit être équivalente à la base canonique de c_0 ou ℓ_p en conclusion de ce théorème. Dans cette direction, notons deux conséquences du Théorème 82 en relation avec le dual de l'espace donné X, observées par l'auteur dans [34].

Théorème 83 *Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle (e_n) qui est "shrinking" et telle que E_0 ne soit boréliennement réductible à l'équivalence permutative ni sur $dsb(X)$ ni sur $dsb(X^*)$. Alors (e_n) est équivalente à la base canonique de c_0 ou $\ell_p, 1 < p < +\infty$.*

Théorème 84 *Soit X un espace de Banach à base inconditionnelle qui n'est pas isomorphe à ℓ_2. Alors X contient 2^ω sous-espaces ou 2^ω quotients munis de bases inconditionnelles normalisées qui sont deux à deux permutativement inéquivalentes.*

7.2 Isomorphisme

Les conjectures du cas de l'isomorphisme reste largement ouvertes, bien que les solutions obtenues pour l'équivalence permutative puissent nous informer sur ce que l'on peut espérer obtenir pour l'isomorphisme. Notons premièrement que les techniques de Gowers et Komorowski - Tomczak-Jaegermann permettent de démontrer qu'un espace de Banach qui est isomorphe à tous ses sous-espaces avec base de Schauder est hilbertien. Il reste cependant ouvert de savoir si un espace de Banach à base inconditionnelle et isomorphe à tous ses sous-espaces à base inconditionnelle doit être hilbertien.

Revenant à la question de savoir si un espace bloc-homogène doit être ou non isomorphe à c_0 ou ℓ_p, l'exemple de l'espace de Schlumprecht montre qu'une telle conjecture semble bien plus forte que le théorème correspondant de Bourgain, Casazza, Lindenstrauss et Tzafriri [16] pour l'équivalence permutative. En effet la preuve du résultat de [16] n'utilise que des bloc-bases à coefficients constants. Or, Kutzarova et Lin ont montré [74] que tous les bloc sous-espaces à coefficients constants de l'espace de Schlumprecht sont isomorphes à S. Donc on ne peut espérer montrer que tout espace bloc homogène est isomorphe à c_0 ou ℓ_p en ne considérant que les bloc-bases à coefficients constants.

On peut conjecturer que le Théorème 81 se généralise au cas de l'isomorphisme :

Conjecture 85 *Soit X un espace de Banach avec base (e_n). Alors E_0 est boréliennement réductible à l'isomorphisme entre les bloc sous-espaces de X, ou X contient une copie de c_0 ou ℓ_p.*

Rappelons enfin deux résultats classiques. Lindenstrauss et Tzafriri ont montré en 1971 que si tous les sous-espaces d'un espace X sont complémentés, alors X est Hilbertien [76]. Et si X a une base normalisée (e_n) telle que tous les sous-espaces engendrés par des suites de blocs à supports disjoints soient complémentés, alors (e_n) est équivalente à la base canonique de c_0 ou ℓ_p, voir [77]. Il serait tentant d'établir un lien entre les questions d'homogénéité évoquées plus haut et les questions de complémentation.

7.3 Isomorphisme lipschitzien

La question suivante est fondamentale dans la théorie non-linéaire des espaces de Banach.

Question 86 *Deux espaces de Banach séparables qui sont Lipschitz isomorphes sont-ils nécessairement linéairement isomorphes ?*

La définition et la conjecture suivantes sont naturelles, une fois connu le théorème de l'espace homogène :

Définition 87 *Un espace de Banach est dit* Lipschitz homogène *s'il est Lipschitz isomorphe à tous ses sous-espaces de dimension infinie.*

Conjecture 88 *Tout espace de Banach Lipschitz homogène est hilbertien.*

Notons qu'il est bien connu que deux espaces non-séparables Lipschitz isomorphes ne sont pas nécessairement linéairement isomorphes, voir Aharoni et Lindenstrauss [1]. De de nombreux exemples canoniques de cette situation sont fournis par Godefroy et Kalton dans [52], où le cas séparable est également étudié. En particulier, en utilisant le fait, prouvé dans [52], que certaines propriétés des espaces de Banach sont des invariants lipschitziens, et les méthodes de [70], on obtient [33],[28] :

Théorème 89 (Ferenczi 2003, Dutrieux-Ferenczi 2006) *Soit X un espace Lipschitz homogène non isomorphe à ℓ_2. Alors*

(a) aucun sous-espace de X n'a la propriété de Radon-Nikodym,

(b) aucun sous-espace de X n'a la propriété locale inconditionnelle de Gordon-Lewis,

(c) X est saturé de sous-espaces HI,

(d) tout sous-espace de X a la propriété d'approximation bornée,

(e) X a type $2-\epsilon$ et cotype $2+\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

Il est très difficile de concevoir un espace qui ait les propriétés (a)-(e), et encore plus d'imaginer qu'il puisse exister un tel espace qui soit Lispchitz homogène ! Cependant la Conjecture 88 reste ouverte.

7.4 Modèles étalés

Une notion fondamentale de la géométrie des espaces de Banach est celle de modèle étalé. Intuitivement, une suite basique semi-normalisée (x_i) engendre un *modèle étalé* si

$$\lim_{l_1<\ldots<l_k,\, l_1\to\infty} \|r_1 x_{l_1} + \ldots + r_k x_{l_k}\|$$

existe pour tout $r_1, \ldots, r_k$. Dans ce cas, on peut définir une suite basique 1-sous symétrique $(\tilde{x}_i)$ par la formule

$$\|r_1\tilde{x}_1 + \ldots + r_k\tilde{x}_k\| = \lim_{l_1<\ldots<l_k,\, l_1\to\infty} \|r_1 x_{l_1} + \ldots + r_k x_{l_k}\|,$$

et on dit que (x_i) engendre le *modèle étalé* $(\tilde{x}_i)$. Ainsi la suite $(\tilde{x}_i)$ est en liaison étroite avec l'espace $[x_i]$ mais pour autant $[x_i]$ ne contient pas nécessairement une copie de $[\tilde{x}_i]$.

Dans la théorie des modèles étalés on étudie l'équivalence et la domination de tels modèles, où une suite basique (f_i) *domine* une suite basique (e_i) s'il existe une constante K telle que pour tous $r_1, \ldots, r_n$

$$\|r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n\| \leqslant K\|r_1 f_1 + \ldots + r_n f_n\|.$$

L'un des problèmes les plus importants dans la théorie des modèles étalés est de savoir quels sont les ensembles de modèles étalés qui peuvent être engendrés par les suites basiques d'un espace donné, à équivalence près, et quelles sont les structures possibles de tels ensembles sous le quasi-ordre de domination. Par exemple, S. Argyros a posé le problème d'homogénéité suivant, voir [3] :

Question 90 (Argyros) *Soit X un espace de Banach dont tous les modèles étalés sont équivalents. Ces modèles étalés doivent-ils être équivalents à la base canonique de c_0 ou ℓ_p pour un certain $p \geqslant 1$?*

Une autre version de cette question avait aussi été formulée par Rosenthal sous la forme d'une question sur les caractérisations possibles des bases canoniques de c_0 et ℓ_p.

Question 91 (Rosenthal) *Soit (e_i) une suite basique telle que toute bloc-base normalisée a une sous-suite équivalente à (e_i). La suite (e_i) est-elle alors équivalente à la base canonique de ℓ_p ou c_0 ?*

Il est démontré par Ferenczi, Pełczar et Rosendal en 2004 qu'une réponse positive à la question d'Argyros conduit à une réponse positive à la question de Rosenthal [43].

Peu avant ce résultat, Androulakis, Odell, Schlumprecht et Tomczak-Jaegermann avaient démontré que la réponse à la question d'Argyros est positive si l'on suppose que les modèles étalés sont tous C-équivalents pour une constante C fixée [3]. Dans [43], Ferenczi, Pełczar et Rosendal montrent que la réponse à la question de Rosenthal était positive si l'on supposait l'uniformité, ou la continuité de la fonction qui extrait une sous-suite équivalente à la base initiale, ou encore si l'on suppose également la propriété de Rosenthal dans le dual. En 2006, B. Sari montre également que la réponse à la question d'Argyros est positive si l'on suppose que le dual aussi admet un unique modèle étalé à équivalence près [97].

On peut chercher également à produire des théorèmes de dichotomie pour la structure de l'ensemble des modèles étalés sous les relations d'équivalence ou de majoration. Notons qu'il existe des espaces qui contiennent un nombre fini, ou dénombrable infini, de modèles étalés [25]. Par exemple, $\ell_1 \oplus \ell_2$ en contient exactement 2.

Pour étudier la structure de l'ensemble des modèles étalés, on définit l'ensemble suivant.

Définition 92 *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit $\mathcal{S}_w$ l'ensemble des suites basiques (x_i) normalisées tendant faiblement vers 0 engendrant un modèle étalé $(\tilde{x}_i)$. Pour (x_i) et (y_i) dans $\mathcal{S}_w$, notons $(x_i) \preccurlyeq (y_i)$ si $(\tilde{x}_i)$ est dominée par $(\tilde{y}_i)$, et $(x_i) \approx (y_i)$ si $(\tilde{x}_i)$ et $(\tilde{y}_i)$ sont équivalentes.*

La relation $\preccurlyeq$ est donc un quasiordre $\mathcal{S}_w$. Il pourrait paraître plus naturel de travailler directement avec l'ensemble des modèles étalés, ou l'ensemble des modèles étalés à équivalence près, plutôt qu'avec les suites engendrant un modèle étalé. Mais en fait, ce dernier ensemble est facilement borélien standard quand X^* est separable, ce qui n'est pas nécessairement le cas des autres. Donc, $\mathcal{S}_w$ se prête aux méthodes de théorie descriptive, et le fait que la relation $\preccurlyeq$ est borélienne permet d'utiliser des méthodes beaucoup plus simples que dans le cas de l'isomorphisme.

En combinant des résultats de Sari [25] et Androulakis, Odell, Schlumprecht et Tomczak-Jaegermann [3] avec des théorèmes classiques de Harrington, Marker, et Shelah [63, 62] sur les quasiordres boréliens, on obtient [46] :

Théorème 93 (Ferenczi-Rosendal, 2007) *Soit X un espace de Banach space à dual séparable. Alors*
- *soit (i) $\mathcal{S}_w/\approx$ est dénombrable ou (ii) il existe une antichaîne de taille le continu dans $(\mathcal{S}_w, \preccurlyeq)$,*
- *soit (iii) il existe une antichaîne de taille le continu et une chaîne ω_1-croissante dans $(\mathcal{S}_w, \preccurlyeq)$, ou (iv) $(\mathcal{S}_w, \preccurlyeq)$ est inversement bien fondée avec un élément maximal et il existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tel qu'il n'y ait pas de α-chaînes décroissantes.*

Notons que P. Dodos [26] obtient le même résultat, avec un espace des suites basiques engendrant un modèle étalé défini de manière légèrement différente, ce qui lui permet d'éviter de supposer que X^* soit séparable.

Observons que par les résultats de Odell et Schlumprecht [88] il existe des espaces de Banach qui ne contiennent pas de modèle étalé équivalent à c_0 ou ℓ_p. La question suivante est alors une généralisation naturelle de la question d'Argyros :

Question 94 *Soit X un espace de Banach qui ne contient qu'un nombre dénombrable de modèles étalés à équivalence près. L'un de ces modèles étalés doit-il être équivalent à la base canonique de c_0 ou ℓ_p ?*

Par la première dichotomie du Théorème 93, une réponse positive à cette question impliquerait que tout espace séparable devrait contenir un modèle étalé équivalent à c_0 ou ℓ_p, ou alors un continuum de modéles étalés non équivalents. Ceci paraît être la conjecture naturelle pour les modèles étalés, similaire à la Conjecture 85 pour l'isomorphisme des bloc bases. Mais on pourrait aussi se demander dans quels cas l'on a une réduction de E_0 à l'équivalence des modèles étalés.

Conclusion

Nous allons conclure cette thèse en tentant de montrer de quelle manière elle suggère de nouvelles directions de recherche. Observons d'abord que nos résultats mènent à la recherche de nouveaux exemples d'espaces de Banach caractérisés par certaines propriétés de la liste inévitable de 19 classes d'espaces. En effet on ne dispose d'exemples que pour 7 classes et donc pour 12 classes la question reste ouverte. Cela suggère aussi de caractériser les espaces connus, comme par exemple l'espace de Tsirelson, par le plus grand nombre possibles de propriétés issues de dichotomies. De plus la liste fournit des éléments objectifs de classification d'espaces comme "classiques" ou "exotiques" : ici nous avons utilisé l'existence ou non d'isomorphisme avec un sous-espace propre mais d'autres points de vue, tels que l'existence d'un isomorphisme avec un carré, ou en termes de la complexité de l'isomorphisme entre les sous-espaces, sont envisageables.

Dans une deuxième direction, et puisque les espaces apparaissant de manière "naturelle" en théorie des espaces de Banach (les espaces ℓ_p, L_p, etc...) ont un comportement plus "régulier" que les autres, on peut se demander quelles propriétés raisonnablement explicites d'un espace peuvent garantir qu'il ait un comportement "classique". On a longtemps espéré que le fait de posséder une base inconditionnelle garantisse un tel comportement. Mais l'exemple G_u de Gowers montre qu'un espace à base inconditionnelle peut très bien n'admettre aucun isomorphisme avec ses hyperplans. Du point de vue de la complexité, on a aussi montré que l'espace universel à base inconditionnelle de Pełczyński était de complexité maximum, $E_{\mathbf{\Sigma}_1^1}$, et que ce résultat pouvait s'obtenir obtenir en étudiant l'équivalence permutative de bases canoniques, et donc encore une fois le fait de travailler avec des bases inconditionnelles ne limite pas la complexité d'un espace. Notons qu'il existe cependant certaines propriétés "exotiques" pour lesquelles on ne dispose pas encore d'exemples à base inconditionnelle, ce qui fournit une autre direction de recherche intéressante. Ainsi les contre-exemples connus au Problème de Schröder-Bernstein pour les espaces de Banach n'en possèdent pas, voir [55], [60]. De même, les exemples connus d'espaces de Banach réels qui possèdent plusieurs structures complexes à isomorphisme près n'ont pas de base inconditionnelle, voir par exemple [36], alors que d'après un résultat de Kalton, les espaces c_0, $\ell_p, 1 \leqslant p < +\infty$ et $L_p, 1 < p < +\infty$ ont une unique structure complexe à isomorphisme près, voir [41].

Si l'existence d'une base inconditionnelle ne semble pas un indice suffisant de comportement “classique”, on peut penser à chercher, pour des espaces de suites, c'est-à dire définis comme la complétion de $c_{00}(\mathbb{R})$ pour une certaine norme, des conditions sur la définition de la norme qui interdisent des phénomènes “exotiques”. On peut se rapprocher par exemple dans cette direction de la théorie des types de Krivine et Maurey [73], ou peut-être s'intéresser à la théorie des fonctions récursives. C'est une direction de recherche très ouverte et probablement difficile.

Bibliographie

[1] I. Aharoni and J. Lindenstrauss, *Uniform equivalence between Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 2, 281–283.

[2] D. Alspach and E. Odell, *L_p spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I*, 123–159, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[3] G. Androulakis, E. Odell, T. Schlumprecht, and N. Tomczak-Jaegermann, *On the structure of the spreading models of a Banach space*, Canad. J. Math. **57** (2005), no. 4, 673–707.

[4] R. Anisca, *Unconditional decompositions in subspaces of $\ell_2(X)$*, Positivity **8** (2004), no. 4, 423–441.

[5] S. Argyros and I. Deliyanni, *Examples of asymptotic ℓ_1 Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 973–995.

[6] S. Argyros, I. Deliyanni, D. Kutzarova and A. Manoussakis, *Modified mixed Tsirelson spaces*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 43–109.

[7] S. Argyros and P. Dodos, *Genericity and amalgamation of classes of Banach spaces*, Adv. Math. **209** (2007), 666-748.

[8] S. Argyros and V. Felouzis, *Interpolating hereditarily indecomposable Banach spaces*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 2, 243–294

[9] S. Argyros and A. Manoussakis, *An indecomposable and unconditionally saturated Banach space*, Studia Math. **159** (2003), no. 1, 1–32.

[10] S. Argyros and A. Tolias, *Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 170 (2004), no. 806, vi+114 pp.

[11] J. Bagaria and J. López-Abad, *Weakly Ramsey sets in Banach spaces*, Adv. Math. **160** (2001), no. 2, 133–174.

[12] Y. Benyamimi and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[13] B. Bossard, *A coding of separable Banach spaces. Analytic and coanalytic families of Banach spaces*, Fund. Math. **172** (2002), no. 2, 117–152.

[14] J. Bourgain, *On separable Banach spaces, universal for all separable reflexive spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 241–246.

[15] J. Bourgain, *Real isomorphic complex Banach spaces need not be complex isomorphic*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), no. 2, 221–226.

[16] J. Bourgain, P. Casazza, J. Lindenstrauss, and L. Tzafriri, *Banach spaces with a unique unconditional basis, up to permutation*, Memoirs of the A.M.S. **54** (1985), No 322.

[17] P. G. Casazza, *Finite dimensional decompositions in Banach spaces*, Contemp. Math, **52** (1986), 1-29.

[18] P.G. Casazza and N.J. Kalton, *Unconditional bases and unconditional finite-dimensional decompositions in Banach spaces*, Israel J. Math **95** (1996), 349–373.

[19] P. G. Casazza and N.J. Kalton, *Uniqueness of unconditional bases in Banach spaces*, Israel J. Math. **103** (1998), 141–175.

[20] P. G. Casazza and N.J. Kalton, *Uniqueness of unconditional bases in c_0-products*, Studia Math. **133** (1999), no. 3, 275–294.

[21] P.G. Casazza and T. Shura, *Tsirelson's space*, Lecture Notes in Mathematics, 1363. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[22] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, and A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 311-327.

[23] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in pure and applied mathematics, Longman Scientific and Technical Ed. (1993).

[24] S. Dilworth, V. Ferenczi, D. Kutzarova, and E. Odell, *On strongly asymptotically ℓ_p spaces and minimality*, Journal of the London Math. Soc.**75**, 2 (2007), 409–419.

[25] S. Dilworth, E. Odell and B. Sari, *Lattice structures and spreading models*, Israel J. Math. **161** (2007), 387–411.

[26] P. Dodos, *On antichains of spreading models of Banach spaces*, prépublication.

[27] L. K. Dor, *On projections in L_1*, Ann. of Math **102** (1975), 463–474.

[28] Y. Dutrieux and V. Ferenczi, *The Lipschitz-free Banach space of spaces C(K)*, Proceedings of the A.M.S.**134** (2006), 1039–1044.

[29] I. Farah, *Some problems about operator algebras with set-theoretic flavor*, prépublication, http ://www.math.yorku.ca// ifarah/Ftp/2008a11-problems.pdf.

[30] V. Ferenczi, *Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 338-344.

[31] V. Ferenczi, *Hereditarily finitely decomposable Banach spaces*, Studia Mathematica **123** (2) (1997), 135–149.

[32] V. Ferenczi, *Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces*, Canad. J. Math. **51** (1999), no. 3, 566–584.

[33] V. Ferenczi, *Lipschitz homogeneous Banach spaces*, Q. J. Math. **54** (2003), no. 4, 415–419.

[34] V. Ferenczi, *On the number of permutatively inequivalent basic sequences in a Banach space*, Journal of Functional Analysis **238** (2006), 353–373.

[35] V. Ferenczi, *Minimal subspaces and isomorphically homogeneous sequences in a Banach space*, Israel J. Math. **156** (2006), 125–140.

[36] V. Ferenczi, *Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach space*, Advances in Mathematics **213**,1 (2007), 462-488.

[37] V. Ferenczi, *A Banach space dichotomy for quotients of subspaces*, Studia Mathematica **180** (2007), 111–131.

[38] V. Ferenczi and E. M. Galego, *Some equivalence relations which are Borel reducible to isomorphism between separable Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics, **152** (2006), 61-82.

[39] V. Ferenczi and E. M. Galego, *Some results about the Schroeder-Bernstein Property for separable Banach spaces*, Canadian Journal of Mathematics, **59** (2007), 63–84.

[40] V. Ferenczi and E. M. Galego, *Even infinite dimensional Banach spaces*, Journal of Functional Analysis **253** (2007), 534-549.

[41] V. Ferenczi and E. M. Galego, *Countable groups of isometries on Banach spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, à paraître.

[42] V. Ferenczi, A. Louveau, and C. Rosendal, *The complexity of classifying Banach spaces up to isomorphism*, Journal of the London Math. Soc **79** (2009), no. 2, 323-345.

[43] V. Ferenczi, A. M. Pełczar, and C. Rosendal, *On a question of Haskell P. Rosenthal concerning a characterization of c_0 and l_p*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 396–406.

[44] V. Ferenczi and C. Rosendal, *On the number of non-isomorphic subspaces of a Banach space*, Studia Math. **168** (2005), no. 3, 203–216.

[45] V. Ferenczi and C. Rosendal, *Ergodic Banach spaces*, Adv. Math. **195** (2005), no. 1, 259–282.

[46] V. Ferenczi and C. Rosendal, *Complexity and homogeneity in Banach spaces*, Banach Spaces and their Applications in Mathematics, Ed. Beata Randrianantoanina and Narcisse Randrianantoanina, 2007, Walter de Gruyter, Berlin, p. 83–110.

[47] V. Ferenczi and C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces*, Journal of Functional Analysis **257** (2009), 149–193.

[48] V. Ferenczi and C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces - examples*, prépublication.

[49] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53–94.

[50] H. Friedman and L. Stanley. *A Borel reducibility theory for classes of countable structures.* J. Symbolic Logic **54** (1989), no. 3, 894–914.

[51] S. Gao and A. S. Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to isometry*, Mem. Amer. Math. Soc. Vol **161**, (2003).

[52] G. Godefroy and N. J. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), no. 1, 121–141.

[53] M. González, *On essentially incomparable Banach spaces*, Math. Z. **215** (1994), no. 4, 621–629.

[54] W. T. Gowers, *A solution to Banach's hyperplane problem*, Bulletin of the L.M.S. **26** (1994), 523–530.

[55] W. T. Gowers, *A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), no. 3, 297–304.

[56] W. T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 6, 1083–1093.

[57] W.T. Gowers, *A hereditarily indecomposable space with an asymptotic unconditional basis*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 112–120, Oper. Theory Adv. Appl., **77**, Birkhaüser, Basel, 1995.

[58] W. T. Gowers, *An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies*, Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 3, 797–833.

[59] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993),4, 851–874.

[60] W. T. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. **307** (1997), 543–568.

[61] L. A. Harrington, A. S. Kechris, and A. Louveau, *A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 4, 903–928.

[62] L. A. Harrington, D. Marker, and S. Shelah, *Borel orderings*, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), no. 1, 293–302.

[63] L. A. Harrington and S. Shelah, *Counting equivalence classes for co-κ-Souslin equivalence relations*, Logic Colloquium '80 (Prague, 1980), pp. 147–152, Stud. Logic Foundations Math., 108, North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.

[64] W.B. Johnson, *A reflexive Banach space which is not sufficiently Euclidean*, Studia. Math. **55** (1976), 201–205.

[65] N. J. Kalton, *An elementary example of a Banach space not isomorphic to its complex conjugate*, Canad. Math. Bull. **38** (1995), no. 2, 218–222.

[66] N. J. Kalton, *A remark on Banach spaces isomorphic to their squares*, Contemporary Mathematics, Volume **232** (1999).

[67] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, 1995. xviii+402 pp.

[68] A. S. Kechris, *New directions in descriptive set theory*, Bull. Symbolic Logic **5** (1999), no. 2, 161–174.

[69] A. S. Kechris and A. Louveau, *The classification of hypersmooth Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 215–242.

[70] R. A. Komorowski and N. Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces without local unconditional structure*, Israel J. Math. **89** (1995), no. 1-3, 205–226. *Erratum to "Banach spaces without local unconditional structure"*, Israel J. Math. **105** (1998), 85–92.

[71] R. A. Komorowski and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of* $l_2(X)$ *and* $\mathrm{Rad}(X)$ *without local unconditional structure*, Studia Math. **149** (2002), no. 1, 1–21.

[72] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 1, 1–29.

[73] J. L. Krivine and B. Maurey, *Espaces de Banach stables. (French) [Stable Banach spaces]*, Israel J. Math. **39** (1981), no. 4, 273–295.

[74] D. Kutzarova and P. Lin, *Remarks about Schlumprecht's space*, Proc. A.M.S **128** (2000), 2059–2068.

[75] J. Lindenstrauss and A. Pełczynski, *Absolutely summing operators in* L_p*-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1988), 275–328.

[76] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. **9** (1971), 263–269.

[77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin. 1979.

[78] J. Lopez-Abad, *Coding into Ramsey sets*, Math. Ann.**332** (2005), no. 4, 775–794.

[79] A. Louveau and C. Rosendal, *Complete analytic equivalence relations*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 4839–4866.

[80] B. Maurey, *A note on Gowers' dichotomy theorem*, Convex Geometric Analysis, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge 1998, 149–157.

[81] B. Maurey, V. Milman, and N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic infinite-dimensional theory of Banach spaces*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 149–175, Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkhauser, Basel, 1995.

[82] B. Maurey and H. P. Rosenthal, *Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequences*, Studia Math. **61** (1977), 77–98.

[83] J. Melleray, *Computing the complexity of the relation of isometry between separable Banach spaces*, MLQ Math. Log. Q. **53** (2007), no. 2, 128–131.

[84] B.S. Mityagin, *Equivalence of bases in Hilbert scales*, (Russian) Studia Math. **37** (1970), 111–137.

[85] O.A. Nielsen, *Direct integral theory*, Lecture Notes in Pure et Applied Mathematics, 61. Marcel Dekker, Inc., New York, 1980. ix+165 pp.

[86] E. Odell, H. Rosenthal and T. Schlumprecht, *On weakly null FDDs in Banach spaces*, Israel J. Math. **84** (1993), no. 3, 333–351.

[87] E. Odell and T. Schlumprecht, *The distortion problem*, Acta Math. **173** (1994), no. 2, 259–281.

[88] E. Odell and T. Schlumprecht, *On the richness of the set of p's in Krivine's theore,*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992-1994), Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkhauser, Basel (1995), 177-198.

[89] E. Odell and T. Schlumprecht, *Trees and branches in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 10, 4085–4108.

[90] A. M. Pełczar, *Subsymmetric sequences and minimal spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003) 3, 765-771.

[91] A. Pełczyński, *Universal bases*, Studia Math. **32** (1969), 247–268.

[92] M. Rørdam, Classification of nuclear, simple C^*-algebras. *Classification of nuclear C^*-algebras. Entropy in operator algebras*, 1–145, Encyclopaedia Math. Sci., 126, Springer, Berlin, 2002.

[93] C. Rosendal, *Etude descriptive de l'isomorphisme dans la classe des espaces de Banach*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6 (2003).

[94] C. Rosendal, *Incomparable, non-isomorphic and minimal Banach spaces*, Fund. Math. **183** (2004) 3, 253–274.

[95] C. Rosendal, *Cofinal families of Borel equivalence relations and quasiorders*, J. Symbolic Logic **70**, 4 (2005), 1325–1340.

[96] C. Rosendal, *Infinite asymptotic games*, Annales de l'Institut Fourier, à paraître.

[97] B. Sari, *On Banach spaces with few spreading models*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 5, 1339–1345.

[98] R. Sasyk and A. Törnquist, *The classification problem for von Neumann factors*, Journal of Functional Analysis **256** (2009), 2710–2724.

[99] T. Schlumprecht, *An arbitrarily distortable Banach space.* Israel J. Math. **76** (1991), no. 1-2, 81–95.

[100] J. H. Silver, *Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations*, Ann. Math. Logic **18** (1980), no. 1, 1–28.

[101] A. Szankowski, *Subspaces without the approximation property*, Israel J. Math **30** (1978), no. 1-2, 123–129.

[102] S. Szarek, *On the existence and uniqueness of complex structure and spaces with "few" operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), no. 1, 339–353.

[103] S. Szarek, *A superreflexive Banach space which does not admit complex structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 3, 437–444.

[104] W. Szlenk, *The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. **30** (1968), 53–61.

[105] A. Tcaciuc, *On the existence of asymptotic-ℓ_p structures in Banach spaces*, Canadian Math. Bull. **50** (2007), no. 4, 619–631.

[106] B. S. Tsirelson, *It is impossible to embed ℓ_p or c_0 into an arbitrary Banach space*, Functional Anal. Appl. **8** (1974), 138–141.

[107] M. Zippin, *On perfectly homogeneous bases in Banach spaces*, Israel J. Math. **4** (1966) 265–272.