MAT 6218 - Introdução à teoria descritiva dos conjuntos
Matemática - Valentin Ferenczi
2020

Versão preliminária das notas de aula de Introdução à teoria descritiva dos conjuntos, ministrada no segundo semestre de 2020 no Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. Os dois livros de referência para esse conteudo são:

- Alexander S. Kechris. Classical descriptive set theory, volume 156 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995. Capítulos 1,2,3.
- S.M Srivastava. A Course on Borel Sets, volume 180 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. Capítulos 1,2,3,4.

1. Espaços polonêses

1.1. Topologias, métricas, normas.

Definição 1.1. *Espaço topológico* (X, τ).

Colocar a definição aqui.

Definição 1.2. *Espaço métrico* (X, d).

Colocar a definição aqui.

$B(x, \epsilon)$ denota a bola aberta de centro x e de raio ϵ.
$\overline{B}(x, \epsilon)$ denota a bola fechada de centro x e de raio ϵ.

Observação 1.3. *Qualquer espaço métrico* (X, d) *é topológico, com a topologia* τ_d *induzida por* d *onde*

$$U \in \tau_d \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \epsilon) \subseteq U.$$

Definição 1.4. *Um espaço topológico* (X, τ) *é metrizável se e somente se a topologia* τ *é induzida por uma métrica* d *em* X*, ou seja, existe* d *métrica em* X *tal que* $\tau = \tau_d$*. Diremos que* d *é compatível com* τ*, ou induz* τ*.*

Observe que se (X, τ) é metrizável, tem várias opções de métrica compatível.

Exemplo: seja $X =]0, 1[$ com a topologia τ usual. Então a métrica usual d, a métrica $2d$, e a métrica

$$d'(x, y) := d(h(x), h(y))$$

onde h é um homeomorfismo de $]0, 1[$ sobre $\mathbb{R}$ (como por exemplo $h(x) = \text{tg}(\pi x - \pi/2)$), induzem a topologia τ.

Definição 1.5. *Um espaço topológico* (X, τ) *é separável se existe um subconjunto enumerável* N *de* X *que é denso em* X*:*

$$\forall U \in \tau, U \neq \emptyset \Rightarrow N \cap U \neq \emptyset.$$

Definição 1.6.
1) Um subespaço (topológico) de um espaço topológico (X, τ) é um subconjunto Y de X munido da topologia induzida denotada $\tau_{|Y}$, onde

$$\tau_{|Y} := \{U \cap Y, U \in \tau\}.$$

2) Um subespaço (métrico) de um espaço métrico (X, d) é um subconjunto Y de X munido da métrica d_Y induzida, ou seja, d_Y é a restrição de d a $Y \times Y$.

Observação 1.7. *Seja (X, d) um espaço métrico e Y um subconjunto de X. Então a topologia induzida por (X, τ_d) em Y coincide com a topologia induzida por d_Y em Y. Ou seja:*

$$(\tau_d)_{|Y} = \tau_{d_Y}$$

Corolário 1.8. *Qualquer subespaço (topológico) de um espaço metrizável é metrizável*

Proposição 1.9. *Qualquer subespaço Y de um espaço metrizável separável X ainda é separável.*

Proof. Escreva $N = \{x_1, x_2, \ldots\}$ enumerável denso em X. Para todo $i \geq 1, n \geq 1$, defina $y_{i,n}$ como um elemento de $B(x_i, \frac{1}{n}) \cap Y$, se este não for vazio, ou como qualquer elemento de Y, senão. Verifique que

$$N' := \{y_{i,n}, i \geq 1, n \geq 1\}$$

é denso em Y. □

Definição 1.10. *Convergência de sequência em espaço topológico.*

Colocar a definição aqui.

Definição 1.11.
1) Seja (X, d) métrico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é de Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, p \geq N \Rightarrow d(x_n, x_p) < \varepsilon.$$

2) Um espaço métrico é completo se qualquer sequência de Cauchy converge.

Lembramos que qualquer sequência convergente num espaço métrico é de Cauchy, portanto qualquer sequência convergente num espaço topológico metrizável é de Cauchy para qualquer métrica compatível, independente da métrica ser completo ou não.

Exemplos:
a) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$
b) se (X, d) é completo, e Y subespaço métrico de X, então Y é completo se e somente se Y está fechado em X.
c) Por exemplo, para a distância usual, $[0, 1]$ é completo, $[0, 1[$ não é completo.

Definição 1.12. *Espaço normado $(X, \|.\|)$*

Colocar a definição aqui.

Note que qualquer espaço normado $(X, \|.\|)$ é métrico, com a métrica definida por

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

DEFINIÇÃO 1.13. *Um espaço normado completo é chamado de espaço de Banach.*

1.2. Espaços polonêses. São chamados assim em homenagem a Kuratowski, Lusin, Sierpinski, ...

DEFINIÇÃO 1.14.
a) Um espaço **topológico** *X é completamente metrizável se existe uma métrica d em X compatível tal que (X, d) seja completo.*
b) Um espaço topológico X é polonês se ele é separável, completamente metrizável.

Algumas observações:
Espaços métricos completos são completamente metrizáveis, e polonêses quando separáveis.
Porém um espaço métrico não completo pode ser polonês. Exemplo $X =]0,1[$. Porque?
Resposta: basta dizer que $]0,1[$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e que ser polonês é uma noção topológica. Lembrando que um homeomorfismo f entre espaços topológicos X e Y é uma função bijetora contínua de X em Y de inversa contínua; e que um homemorfismo preserva as propriedades topólogicas, porque para todo $U \subseteq X$, U é aberto em X se e somente se $f(U)$ é aberto em Y.

Observação: primeiros exemplos de espaços polonêses.

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ são polonêses
(2) $[0,1],]0,1[$ são polonêses
(3) espaços de Banach separáveis são polonêses
(4) qualquer conjunto A com a topologia discreta τ_{dis} é completamente metrizável (lembrando que $\tau_{dis} = \{\text{subconjuntos de } A\}$)
(5) qualquer conjunto enumerável A com a topologia discreta é polonês
(6) qualquer subconjunto fechado de um espaço polonês é polonês

PROOF. Seja X polonês e F fechado em X. Como X é separável, F também é (Prop I.9). Seja d uma métrica completa compatível em X. Então d_F é compatível em F (Obs I.7). Além disso se $(f_n)_n$ é de Cauchy para d_F em F, é convergente em X porquê (X, d) é completo, e o limite pertence a F porquê F é fechado. Isso prova que (F, d_F) é completo. □

Exemplo: $[0,1[$ é polonês como subespaço fechado de $]-1,1[$.

(7) se X é métrico separável, o completamento $\hat{X}$ de X é polonês.

PROOF. Lembramos que $\hat{X}$ é o único (a menos de isometrias) espaço completo $(\hat{X}, \hat{d})$ que contém (X, d) como subespaço denso (com isso queremos dizer que existe uma isométria i sobrejetora entre (X, d) e um subespaço denso $i(X)$ de $(\hat{X}, \hat{d})$) . Como X é separável, segue claramente que $\hat{X}$ é separável. Como $(\hat{X}, \hat{d})$ é completo, $\hat{X}$ é polonês. □

(8) o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais não é polonês.

PROOF. Enumere os racionais como $\{q_n, n \in \mathbb{N}\}$ e seja d distância compatível. As seguintes bolas estão em referência a d. Sejam $y_0 \in \mathbb{Q}, \varepsilon_0 > 0$ e $F_0 = \overline{B}(y_0, \varepsilon_0)$. Dados $\varepsilon_{n-1} > 0, y_{n-1} \in \mathbb{Q}$ e $F_{n-1} = \overline{B}(y_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$, escolhemos $\varepsilon_n > 0, y_n \in \mathbb{Q}$ e $F_n = \overline{B}(y_n, \varepsilon_n)$ de tal maneira que

- $q_n \notin F_n$
- $F_n \subseteq F_{n-1}$

- $\varepsilon_n \leq 2^{-n}$

(verifique que isso é possível tomando $\varepsilon_n > 0$ pequeno o suficiente) Observe que $d(y_n, y_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Segue que se $m \leq n$, $d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{n-1} 2^{-k} \leq 2^{-m+1}$, o que implica que $(y_n)_n$ é de Cauchy.

De outro lado, seja $q = q_m \in \mathbb{Q}$ arbitrário. Então $q_m \notin F_m$. Note que para todo $n \geq m$, $y_n \in F_n \subseteq F_m$, portanto $d(q_m, y_n) \geq d(q_m, F_m) > 0$ para todo $n \geq m$. Essa condição implica que a sequência $(y_n)_n$ não pode converger a $q_m = q$. Como q era arbitrário em $\mathbb{Q}$, essa sequência não é convergente. Isso prova que $\mathbb{Q}$ não é completo para d. $\square$

(9) Mais geralmente, um espaço metrizável enumerável sem pontos isolados não é polonês. Exercício 2 da lista 1 (lembramos que x é dito ponto isolado do espaço topológico X quando $\{x\}$ é aberto).

(10) Veremos porém que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é polonês!

Observação: na demonstração que $\mathbb{Q}$ não é polonês, usamos o seguinte fato. Dado X métrico, e A subespaço fechado de X, lembramos

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$$

Fato: se F é subespaço fechado de um conjunto métrico X, e $x \in X$, então

$$x \in F \Leftrightarrow d(x, F) = 0.$$

Em caso de dúvida, provar esse fato!

1.3. Mais exemplos de espaços polonêses.

Definição 1.15. *Seja (X, τ) espaço topológico. Uma base $\mathcal{B}$ para a topologia de X é uma família $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que qualquer aberto para τ seja união de elementos de $\mathcal{B}$.*

É possível mostrar que, para uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, existe uma topologia para qual $\mathcal{B}$ é base se e somente se

i) $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$, e

ii) $x \in B_1 \cap B_2$ com B_1 e B_2 em $\mathcal{B}$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definição 1.16. *Seja $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos. O espaço topológico produto*

$$\Pi_{i \in I}(X_i, \tau_i)$$

é o produto cartesiano $\Pi_{i \in I} X_i$ munido da topologia produta, i.e. a topologia quem tem como base os conjuntos $\Pi_{i \in I} U_i$ onde

i) *U_i é aberto em X_i para todo $i \in I$, e*

ii) *$U_i = X_i$ para todos menos um número finito de valores de $i \in I$.*

Observação: seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\Pi_{i \in I} X_i$ e $l \in \Pi_{i \in I} X_i$. Escreva $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_n(i))_{i \in I}$ e $l = (l(i))_{i \in I}$. Então

$$\lim_n x_n = l \Leftrightarrow \forall i \in I, \lim_n x_n(i) = l(i).$$

Proof. Se x_n converge a l, fixe $j \in I$, V aberto em X_j contendo l_j, e seja U o aberto básico de $\Pi_{i \in I} X_i$ definido por $U_j = V$ e $U_i = X_i$ se $i \neq j$. Para n grande o suficiente, x_n pertence a U e portanto $x_n(j)$ pertence a V. Isso prova que $x_n(j)$ converge a $l(j)$ para j arbitrário.

Reciprocamente, suponha $\forall i \in I, \lim_n x_n(i) = l(i)$. Seja $U = \Pi_{i\in I} U_i$ um aberto básico arbitrário contendo l. Seja F é o conjunto finito dos i's tais que $U_i \neq X_i$. Como F é finito, existe N tal que para todo $n \geq N$, e todo $i \in F$, $x_n(i) \in U_i$. Segue que para todo $n \geq N$, $x_n \in U$. Isso prova que x_n converge a l. □

PROPOSIÇÃO 1.17. *Seja $(X_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de espaços topológicos separáveis. Então $\Pi_{n\in\mathbb{N}}(X_n, \tau_n)$ é separável.*

PROOF. Se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n(k), k \in \mathbb{N}\}$ é uma família densa em X_n, então a família dos elementos da forma $(x_n(i_n))_{n\in\mathbb{N}}$, onde $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ varia no conjunto enumerável das sequências de naturais que são constantes a partir de um certo n, é densa em $\Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$. □

DEFINIÇÃO 1.18. *Seja $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de espaços métricos. O produto $X = \Pi_{n\in\mathbb{N}}(X_n, d_n)$ é produto cartesiano dos X_n's munido da métrica:*

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

onde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Também é possível usar a fórmula

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \min(\frac{1}{2^{n+1}}, d_n(x_n, y_n)),$$

que também satisfaz o Fato 1.19.

FATO 1.19.

i) *A distância d acima é compatível com a topologia produto em $\Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$, onde cada X_n é munido da topologia induzida por d_n.*
ii) *O espaço métrico (X, d) é completo desde que (X_n, d_n) o seja para todo $n \in \mathbb{N}$.*

PROOF. Consultar a literatura. □

COROLÁRIO 1.20.

i) *O produto de uma sequência de espaços topológicos (completamente) metrizáveis é (completamente) metrizável.*
ii) *O produto de uma sequência de espaços polonêses é polonês.*

EXEMPLOS 1.21. *O seguintes espaços topológicos são poloneses.*

(1) *o "cubo de Hilbert" $[0, 1]^{\mathbb{N}}$*
(2) *o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*
(3) *o "espaço de Cantor" $\mathcal{C} := 2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$*
(4) *o "espaço de Baire" $\mathcal{N} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*
(5) *o espaço $A^{\mathbb{N}}$, se A é enumerável e munido da topologia discreta.*
(6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

PROOF. Consequência do Corolário anterior, para (1) até (5). Para (6), segue do seguinte fato. □

Fato: o espaço de Baire é homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

DEFINIÇÃO 1.22. *Seja X conjunto, Y métrico. A topologia τ_{cp} da convergência pontual em Y^X é a topologia que tem como base de abertos os conjuntos $V_{x_1,\ldots,x_n,\varepsilon,f}$, onde $x_1,\ldots,x_n \in X, \varepsilon > 0$ e $f \in Y^X$.*

Note que se $f \in V := V_{x_1,\ldots,x_n,\varepsilon_0,g} \cap W := V_{y_1,\ldots,x_m,\varepsilon_1,h}$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,\varepsilon,f} \subseteq V \cap W$, o que garante que esses conjuntos podem ser escolhidos como base de abertos de uma topologia.

PROPOSIÇÃO 1.23. *Para $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em Y^X e $f \in Y^X$ temos*

$$\lim_k f_k = f \Leftrightarrow \forall x \in X, \lim_k f_k(x) = f(x).$$

DEFINIÇÃO 1.24. *Sejam X, Y métricos. Definimos $\mathrm{Lip}_1(X,Y)$ como o conjunto das funções 1-lipschitzianas de X em Y e $I(X,Y)$ como o conjunto das injeções isométricas de X em Y.*

PROPOSIÇÃO 1.25. *Sejam X, Y métricos, D denso em X. Para $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathrm{Lip}_1(X,Y)$ e $f \in \mathrm{Lip}_1(X,Y)$ temos*

$$\lim_k f_k = f \Leftrightarrow \forall x \in D, \lim_k f_k(x) = f(x).$$

PROPOSIÇÃO 1.26. *Sejam X, Y métricos. Suponha X separável e seja $D = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Então*

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(f(a_n), g(a_n))}{1 + d_n(f(a_n), g(a_n))},$$

define uma distância em $\mathrm{Lip}_1(X,Y)$ compatível com a topologia induzida por τ_{cp}.

FATO 1.27. *Sejam X, Y métricos. Suponha Y completo e seja D denso em X. Seja $f : D \to Y$ uniformemente contínua. Então f admite uma (única) extensão uniformemente contínua $\tilde{f} : X \to Y$.*

Temos a fórmula: $\tilde{f}(x) = \lim_n f(x_n)$ se x_n é uma sequência de D tendendo a X.

PROPOSIÇÃO 1.28. *Sejam X e Y métricos separáveis e suponha Y completo. Então os espaços $\mathrm{Lip}_1(X,Y)$ e $I(X,Y)$, munidos de τ_{cp}, são polonêses.*

Veremos que o grupo $\mathrm{Iso}(X)$ das isometrias sobrejetoras de X métrico completo separável também é polonês para τ_{cp}.

DEFINIÇÃO 1.29. *O espaço normado $\mathcal{L}(X,Y)$ dos operadores lineares contínuos entre X e Y normados.*

OBSERVAÇÃO 1.30. *Quando Y é de Banach, $\mathcal{L}(X,Y)$ também é de Banach.*

DEFINIÇÃO 1.31. *Sejam X, Y de Banach. A topologia forte em $\mathcal{L}(X,Y)$, ou SOT (Strong Operator Topology), é a topologia induzida por τ_{cp} em $\mathcal{L}(X,Y)$.*

PROPOSIÇÃO 1.32. *Sejam X, Y espaços de Banach separáveis. A bola unitária*

$$\mathcal{L}_1(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \|T\| \leq 1\},$$

munida de SOT, é polonesa.

PROOF. Exercício. $\square$

1.4. Subespaços polonêses de um polonês.

DEFINIÇÃO 1.33. *Subespaço G_δ e subespaço F_σ de um espaço topológico.*

EXEMPLO 1.34. *Abertos são G_δ. Se X é metrizável, fechados são G_δ.*

PROPOSIÇÃO 1.35.

a) *Subespaços G_δ de um espaço X completamente metrizável são completamente metrizáveis.*
b) *Subespaços G_δ de um espaço X polonês são polonêses.*

PROOF. Tópico 1 (Denis). □

Vejamos agora a recíproca. Definição de diametro em espaço métrico.

DEFINIÇÃO 1.36. *Seja X topológico, A subespaço não vazio de X, e Y métrico. Seja f uma função de A em Y e seja $x \in X$. A oscilação de f em x, denotada $\mathrm{osc}_f(x) \in [0, +\infty]$ é definida como*

$$\mathrm{osc}_f(x) = \inf\{\mathrm{diam}(f(U \cap A))\},$$

onde o inf corre sobre todos as vizinhanças abertas U de x que interceptam A.

Observação:

a) Para todo $x \in A$, f é contínua em x se e somente se $\mathrm{osc}_f(x) = 0$.
b) o conjunto dos $x \in X$ tais que $\mathrm{osc}_f(x) = 0$ é G_δ em X.

Segue o seguinte corolário

COROLÁRIO 1.37. *Seja f função de X topológico em Y metrizável. Então os pontos de continuidade de f formam um subespaço G_δ de X.*

TEOREMA 1.38 (Kuratowski). *Seja X metrizável e Y completamente metrizável, e seja $A \subseteq X$. Então para qualquer $f : A \to Y$, contínua, existe um subespaço G de X que é G_δ, contém A, e tal que f admite uma extensão contínua $g : G \to Y$.*

PROOF. Tópico 2 (Pedro). □

PROPOSIÇÃO 1.39. *Se X é metrizável e Y um subespaço de X completamente metrizável, então Y é G_δ em X.*

COROLÁRIO 1.40.

a) *Seja X completamente metrizável. Um subespaço de X é completamente metrizável se e somente se ele é G_δ.*
b) *Seja X polonês. Um subespaço de X é polonês se e somente se ele é G_δ.*

DEFINIÇÃO 1.41. *Os abertos básicos $N_{\alpha_0,\ldots,\alpha_k}$ de $\mathcal{C}$. Os abertos básicos $N_{m_0,\ldots,m_k}$ de $\mathcal{N}$.*

Esses abertos básicos ão também fechados.

DEFINIÇÃO 1.42. *Seja X um conjunto e $n \in \mathbb{N}$. Denotamos*

$$[X]^n = \{A \subseteq X, \mathrm{Card} A = n\},$$

e

$$[X]^\omega = \{A \subseteq X, \mathrm{Card} A = \omega\},$$

(pode ser usado $[X]^{\mathbb{N}}$ em vez de $[X]^\omega$).

Como exemplo importante, temos o conjunto $[\mathbb{N}]^\omega$. As vezes poderemos identificar $[\mathbb{N}]^\omega$ com o conjunto das subsequências de $\mathbb{N}$, que é um subespaço de $\mathcal{N}$.

EXEMPLO 1.43. *Topologia em $[\mathbb{N}]^\omega$.*

É a topologia induzida pela identificação natural de $[\mathbb{N}]^\omega$ como subespaço de $\mathcal{C}$; os abertos básicos são do tipo

$$U_{F,n} = \{A \in [\mathbb{N}]^\omega : A \cap \{0, \ldots, n\} = F\},$$

$(n \in \mathbb{N},\, F \subseteq \{0, \ldots, n\})$. Ela coincide, modulo a identificação acima, com a topologia no conjunto das subsequências de $\mathbb{N}$ visto como subespaço de $\mathcal{N}$; nesse ponto de vista os abertos básicos são do tipo

$$U_{m_0,\ldots,m_k} = \{(n_k)_k \text{ subsequencia de } \mathbb{N} : n_i = m_i \forall i \leq k\},$$

onde $m_i, i \leq k$ é subsequência finita de $\mathbb{N}$.

Proposição 1.44. *O espaço $[\mathbb{N}]^\omega$ é polonês.*

Exemplo 1.45. *Seja X separável métrico completo. Seja $\mathrm{Iso}(X)$ o grupo das isometrias sobrejetoras em X. Então o espaço $\mathrm{Iso}(X)$, munido da topologia da convergência pontual, é polonês.*

1.5. Grupos polonêses.

Definição 1.46. *Grupo topológico.*

Definição 1.47. *Grupo polonês.*

Exemplo 1.48. *O grupo S_∞ das bijeções em $\mathbb{N}$, munido da topologia induzida pela inclusão natural em $\mathcal{N}$, é grupo polonês.*

Proof. Tópico 3. $\square$

2. Espaços polonêses não enumeráveis

2.1. Espaços perfeitos.

Definição 2.1. *Um espaço topológico X é perfeito se ele não tem pontos isolados.*

Ou seja, X é perfeito se $\{x\}$ está aberto para nenhum $x \in X$. Exemplos: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^N$, $[0,1]^N$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, são perfeitos.

Definição 2.2. *Seja X topológico e $A \subseteq X$. A é* perfeito em X *se A for fechado em X e perfeito.*

Definição 2.3. *Espaço topológico compacto.*

Alguns teoremas clássicos a lembrar sobre espaços compactos (na prática, sempre estaremos no caso metrizável, então quem quiser pode trocar Hausdorff por metrizável abaixo, e/ou supor que X e Y são sempre metrizáveis).

Proposição 2.4.

a) *Caracterização de espaço metrizável compacto a partir de extração de subsequências.*
b) *Um subconjunto fechado de um espaço compacto X é compacto (vale a recíproca se X é Hausdorff).*
c) *Um subconjunto compacto de um espaço topológico Hausdorff X é fechado em X.*
d) *Seja X compacto, e $f : X \to Y$ contínua sobrejetora. Então Y é compacto.*
e) *Seja X compacto, Y Hausdorff e $f : X \to Y$ contínua bijetora. Então f é um homeomorfismo.*
f) *Um produto de espaços topológicos compactos é compacto para a topologia produto.*

Logo, por exemplo, o espaço de Cantor $\mathcal{C}$ é compacto.

Notação: Seja A um conjunto (na prática, pensar em $A = \{0,1\}$ ou $\mathbb{N}$).

$A^{<\omega} = \cup_{n\in N} A^n$ denota o conjunto da sequências finitas de elementos de A (incluindo a sequência vazia $\emptyset \in A^0$).

Para $s = (s_i)_{i<n} \in A^{<\omega}$ denotamos por $|s|$ e chamamos de comprimento de s o inteiro n. A sequência vazia $\emptyset$ é o único elemento de $A^{<\omega}$ de comprimento 0. Para $s \in A^\omega$ definimos $|s| = +\infty$.

Usaremos esses elementos para trabalhar com A^ω: lembramos que se A é munido da topologia discreta, uma base de abertos de A^ω será dada pelo conjunto dos abertos N_s, $s \in A^{<\omega}$, onde se $s = (s_i)_{i<n}$,

$$N_s := \{t \in A^\omega : t_i = s_i \forall i < n\}.$$

Se $s = (s_i)_{i<n} \in A^{<\omega}$ e $t \in A^{<\omega}$ (resp. A^ω), a concatenação $s^\frown t$ é o elemento de $A^{<\omega}$ (resp. A^ω) definido por:

$$(s^\frown t)_i = s_i, \forall i < n$$

e

$$(s^\frown t)_i = t_{i-n}, \forall i \geq n$$

(subentendido, para os valores de $i \geq n$ para os quais t_{i-n} é definido). Podemos portanto escrever, para $s \in A^{<\omega}$,

$$N_s = \{s^\frown t, t \in A^\omega\}.$$

No caso de t ser unitário, $t = \{i\}$, usaremos a notação $s^\frown i$ para $s^\frown\{i\}$ (aqui $s \in A^{<\omega}$ e $i \in A$).

Reciprocamente, se $s = (s_i)_i \in A^{<\omega}$ (resp. A^ω), e se $n \leq |s|$, então $s_{|n}$ denota $(s_i)_{i<n} \in A^{<\omega}$.

Definição 2.5 (Esquema de Cantor). *Seja X espaço métrico. Um esquema de Cantor em X é uma família $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ de subconjuntos não vazios de X tal que*

i) $U_{s^\frown 0} \cap U_{s^\frown 1} = \emptyset, \forall s \in 2^{<\omega}$

ii) $\overline{U_{s^\frown i}} \subseteq U_s, \forall s \in 2^{<\omega}, \forall i = 0, 1$

iii) *Para todo $s \in 2^\omega$, $\lim_n \operatorname{diam}(U_{s_{|n}}) = 0$.*

O esquema de Cantor é uma ferramenta para encontrar uma cópia de $\mathcal{C}$ em X. Está claro por exemplo que se $X = \mathcal{C}$ munico da distância produto, $U_s = N_s$ define um esquema de Cantor.

Proposição 2.6. *Seja X métrico completo. Se existe um esquema de Cantor em X, então X contém uma cópia homeomorfa do espaço de Cantor.*

Proof. Supondo a existência desse esquema, observe que se $\alpha \in \mathcal{C}$, então

$$\cap_{n\in N} U_{\alpha_{|n}} = \cap_{n\in N} \overline{U_{\alpha_{|n}}}$$

é não vazio, porque a distância d é completa (contém o limite de qualquer sequência y_n de X, onde $y_n \in U_{\alpha_{|n}}$ para todo n). Além disso esse conjunto é sempre unitário. Definimos então $f : \mathcal{C} \to X$ por

$$\{f(\alpha)\} = \cap_{n\in N} U_{\alpha_{|n}}.$$

Note que f é injetora pela condição (i) do esquema de Cantor.

Vejamos que f é contínua. De fato, seja $\alpha \in \mathcal{C}$. Para todo $\beta \in \mathcal{C}$, temos quem $d(f(\alpha), f(\beta)) \leq \operatorname{diam}(U_{\alpha_{|n}})$ desde que $\beta \in N_{\alpha_{|n}}$, pois então $f(\alpha), f(\beta)$ ambos pertencem a $U_{\alpha_{|n}}$. Como $N_{\alpha_{|n}}$ é um aberto de $\mathcal{C}$ contendo α, e como $\operatorname{diam}(U_{\alpha_{|}n})$ tende a 0, isso prova a continuidade de f em α.

Finalmente, como $\mathcal{C}$ é compacto e f contínua e injetora, f é um homeomorfismo entre $\mathcal{C}$ e a sua imagem em X. □

Teorema 2.7. *Seja X polonês, perfeito, não-vazio. Então X contém uma cópia homeomorfa do espaço de Cantor.*

Proof. Vamos definir um esquema de Cantor $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ em X onde os U_s são abertos não vazios, e onde para todo s, $\operatorname{diam}(U_s) \leq 2^{-|s|}$ (em relação a uma escolha de distância compatível d completa em X). O resultado segue então da Proposição 2.6. Verifiquemos agora a existência do esquema de Cantor em X. Seja $U_\emptyset$ um aberto não vazio de diametro ≤ 1. Dado $s \in 2^{<\omega}$, e dado U_s aberto não vazio, escolhe $x \in U_s$, e como x não é isolado, escolhe $y \in U_s$ com $y \neq x$. Seja $r \leq 2^{-|s|+1}$ tal que $\overline{B}(x, r) \subseteq U_s, \overline{B}(y, r) \subseteq U_s$ e $\overline{B}(x, r) \cap \overline{B}(y, r) = \emptyset$. Define $U_{s^\frown 0} = B(x, r)$ e $U_{s^\frown 1} = B(y, r)$. A existência de $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ fica provada por indução sobre $|s|$. □

Note que não usamos a separabilidade, portanto o resultado é valido quando X é completamente metrizável, perfeito, não-vazio. Porém, como um tal X sempre contém um subespaço fechado separável (portanto polonês) perfeito não-vazio (exercício), o resultado não é significadamente mais geral.

Teorema 2.8 (Cantor-Bendixson). *Seja X um espaço polonês. Então X admite uma partição*

$$X = P \cup N$$

onde P é subespaço perfeito de X e N é enumerável (e aberto).

PROOF. Tópico 4 (Vinícius). □

OBSERVAÇÃO 2.9. *A partição* $X = P \cup N$ *no teorema de Cantor-Bendixson é única.*

PROOF. Tópico 5 (João Gabriel). □

COROLÁRIO 2.10. *Seja* X *um espaço polonês. Então* X *é ou enumerável, ou contém uma cópia homeomorfa de* $\mathcal{C}$*.*

PROOF. Se X não é enumerável, então ele contém um subespaço perfeito não vazio, pelo teorema de Cantor-Bendixson. Esse subespaço é polonês et perfeito, portanto, pelo Teorema 2.7, contém uma cópia homeomorfa de $\mathcal{C}$. □

Observação: como consequência, um espaço polonês tem cardinalidade enumerável ou $2^{\aleph_0}$.

PROPOSIÇÃO 2.11. *Seja* X *espaço polonês não enumerável. Então* X *contém um subespaço homeomorfo ao espaço de Baire.*

PROOF. X contém uma cópia homeomorfa C de $\mathcal{C}$. Basta então provar que $\mathcal{C}$ contém uma cópia homeomorfa de $\mathcal{N}$. Definimos $f : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ pela fórmula

$$(m_n)_n \mapsto 0^{m_0} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{m_1} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{m_2} \ldots,$$

onde 0^n significa 0 concatenado n vezes (ou seja 0^n é a sequência nula em 2^n). A função f é claramente injetora. Note que $f(\mathcal{N})$ é o conjunto das sequências de $\mathcal{C}$ com infinitos 1's.

Se U é aberto básico em $\mathcal{N}$, i.e. $U = N_{m_0,\ldots,m_k}$ então

$$f(U) = N_{0^{m_0} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{m_1} {}^\frown 1 {}^\frown \ldots 0^{m_k} {}^\frown 1} \cap f(\mathcal{N})$$

que é um aberto básico de $f(\mathcal{N})$. Isso prova que a função inversa de f (definida em $f(\mathcal{N})$) é continua. Reciprocamente, se V é um aberto básico em $f(\mathcal{N})$,

$$V = f(\mathcal{N}) \cap N_{0^{m_0} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{m_1} {}^\frown 1 {}^\frown \ldots 0^{m_k}},$$

onde possivelmente os m_i's e em particular m_k são nulos, então para todo $\alpha = (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}$, $f(\alpha) \in V$ se e somente se $n_i = m_i$ for all $i < k$ e $n_k \geq m_k$. Isso significa que

$$f^{-1}(V) = \cup_{n \geq m_k} N_{m_0,\ldots,m_{k-1},n},$$

e portanto $f^{-1}(V)$ é aberto como união de abertos básicos. Portanto f é contínua. Isso prova que f é um homeomorfismo de $\mathcal{N}$ sobre a imagem $f(\mathcal{N})$. □

Observe que $f(\mathcal{N})$ é polonês e portanto necessariamente G_δ em $\mathcal{C}$. Verifiquem esse fato diretamente, usando que $f(\mathcal{N})$ é o conjunto das sequências de $\mathcal{C}$ com infinitos 1's.

2.2. Universalidade do espaço de Baire.

DEFINIÇÃO 2.12 (Esquema de Lusin). *Seja* X *espaço métrico. Um esquema de Lusin em* X *é uma família* $(F_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ *de subconjuntos* possivelmente vazios *de* X *tal que*

i) $F_{s^\frown i} \cap F_{s^\frown j} = \emptyset, \forall s \in N^{<\omega}, \forall i \neq j$
ii) $F_{s^\frown i} \subseteq F_s, \forall s \in N^{<\omega}, \forall i \in \mathbb{N}$

O esquema de Lusin é dito convergente *se satisfaz também*

ii') $\overline{F_{s^\frown i}} \subseteq F_s, \forall s \in \mathbb{N}^{<\omega}, \forall i \in \mathbb{N}$
iii) *Para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^\omega$ *tal que* $F_{\alpha_{|n}} \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $\lim_n \operatorname{diam}(F_{\alpha_{|n}}) = 0$.

Esquemas de Lusin são ferramentas para relacionar espaços polonêses com o espaço de Baire. Claramente, em $\mathcal{N}$ munido da distância produto, $(N_s)_{s\in \mathbb{N}^{<\omega}}$ define um esquema de Lusin convergente.

Um outro exemplo: se A é subespaço de $\mathcal{N}$, seja $F_s = N_s$ se $N_s \cap A \neq \emptyset$, e $F_s = \emptyset$ senão. Isso define um outra esquema de Lusin convergente em $\mathcal{N}$.

Observe que a premissa da condição iii) ($F_{\alpha_{|n}} \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$) será satisfeita pelo menos para todo $\alpha \in A$ - qual é exatamente o conjunto dos α's tais que essa premissa seja satisfeita? Resposta: $\overline{A}$.

Lema 2.13. *Seja X métrico e $(F_s)_{s\in \mathbb{N}^{<\omega}}$ um esquema de Lusin convergente. Seja $D := \{\alpha \in \mathcal{N} : \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{\alpha_{|n}} \neq \emptyset\}$. Então a função $f : D \to X$ definida por*

$$\{f(\alpha)\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{\alpha_{|n}}$$

é contínua e injetora. Além disso, se X é completo então D é fechado em $\mathcal{N}$.

Proof. A condição (iii) implica que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_{\alpha_{|n}}$ é unitário para cada $\alpha \in D$, portanto f é bem definida; ela é injetora por (i). Para a continuidade basta repetir o argumento da Proposição 2.6. Note que usamos ii) e não precisamos de ii').

Suponha agora X completo. Seja para todo $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \{\alpha \in \mathcal{N} : F_{\alpha_{|n}} \neq \emptyset\}$. Seja $I_n = \{s \in \mathbb{N}^n : F_s = \emptyset\}$. Note que D_n é fechado porque

$$\mathcal{N} \setminus D_n = \cup_{s\in I_n} N_s.$$

Portanto $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ é fechado. Para concluir basta provar que $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Somente a inclusão $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n \subseteq D$ não é trivial.

Seja $\alpha \in \cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$, e $x_n \in F_{\alpha_{|n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela condição (iii), $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy, e como X é completo, seja x o limite de $(x_n)_n$. Para todo $1 \leq m \leq n$, $x_n \in F_{\alpha_{|m}}$, logo $x \in \overline{F_{\alpha_{|m}}} \subseteq F_{\alpha_{|(m-1)}}$. Como m era arbitrário, $x \in \cap_{m\in\mathbb{N}} F_{\alpha_{|m}}$ e portanto α pertence a D. Em conclusão $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. □

Corolário 2.14. *Seja X métrico e $(F_s)_{s\in \mathbb{N}^{<\omega}}$ um esquema de Lusin convergente em X tal que*

iv) $X = F_\emptyset$

v) $\forall s \in \mathbb{N}^{<\omega}, F_s = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_{s^\frown n}$.

Então existe uma bijeção de um subespaço D de $\mathcal{N}$ sobre X. Se X é completo, então D pode ser escolhido fechado.

Proof. Basta mostrar que a função f definida no Lema 2.13 é sobrejetora. Seja dado $x \in X$. Por (iv) e (v) seja m_0 tal que $x \in F_{m_0}$. Repetindo e usando (v), é possível achar por indução uma sequência $\alpha = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de naturais, ou seja um elemento de $\mathcal{N}$ tal que $x \in F_{\alpha_{|n}} = F_{m_0^\frown \dots ^\frown m_{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definição de f, teremos $f(\alpha) = x$. □

O nosso objetivo agora é encontrar um esquema de Lusin convergente satisfazendo (iv) e (v) em qualquer X polonês. Veremos que isso pode ser realizado escolhendo F_s que sejam F_σ.

Lema 2.15. *Seja X topológico. A interseção de dois subespaços F_σ ainda é F_σ. A união de dois subespaços G_δ ainda é G_δ.*

Proof. Exercício. □

Lema 2.16. *Seja X métrico separável, A subespaço F_σ de X, e $\varepsilon > 0$. Então existe uma sequência $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X tal que*

i) $\forall i \in \mathbb{N}$, A_i *é* F_σ *(possívelmente vazio)*
ii) A *é união disjunto dos* A_i, $i \in \mathbb{N}$
iii) $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i = \emptyset$ *ou* $\operatorname{diam}(A_i) \leq \epsilon$
(iv) $\forall i \in \mathbb{N}, \overline{A_i} \subseteq A$

Lema 2.17. *Seja X métrico separável. Então X admite um esquema de Lusin convergente satisfazendo (iv) e (v) do Corolário 2.14.*

Proof. Por indução a partir do Lema 2.16. □

Observação: tente encontrar um tal esquema, evitando conjuntos vazios na medida do possível, nos casos $X = [0,1], [0,1[$ ou $]0,1[$.

Lema 2.18. *Seja A topológico discreto e F subespaço fechado não vazio de $A^{\mathbb{N}}$. Então existe uma retração contínua $r : A^{\mathbb{N}} \to F$ (i.e. tal que $r_{|F} = Id_F$).*

Proof. Tópico 6 (Matheus). Ver o pdf no e-disciplinas. Podemos dar uma versão da prova aqui.

Primeiro denotamos, como Matheus, para $G \subseteq A^{\mathbb{N}}$,

$$[G] := \{s \in A^{<\mathbb{N}} : \exists x \in G \ s = x_{||s|}\}.$$

Observamos que $x \in \overline{G}$ se e somente se para todo n, $x_{|n} \in [G]$. Em particular para F fechado, $x \in F$ desde que para todo n, $x_{|n} \in [F]$. Isso implica que se $x \notin F$, então existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $N_{x_{|n}} \cap F = \emptyset$. Note que $n \geq 1$. Seja $n(x)$ o mínimo desses n's, e $s(x) := x_{|n(x)}$. Note que $N_{s(x)} \cap F = \emptyset$.

Para cada $s \in A^{<\mathbb{N}}$ tal que $N_s \cap F \neq \emptyset$, escolhemos um elemento f_s de $N_s \cap F$.

Seja r definida por $r(x) = x$ quando $x \in F$ (obviamente) e $r(x) = f_{s(x)}$, quando $x \notin F$.

A única coisa a mostrar é que r é contínua em todo $x \in A^{<\mathbb{N}}$.

1) *se* $x \notin F$.

Note que qualquer y de $N_{s(x)}$ também não pertence a F. Como $N_{s(x)} \cap F = \emptyset$ mas $N_{y_{|i}} \cap F = N_{x_{|i}} \cap F \neq \emptyset$ para todo $i < n(x)$, temos que $n(y) = n(x)$ e $s(y) = s(x)$. Portanto $r(y) = r(x)$. Ou seja $r_{|N_{s(x)}}$ é constante e portanto r é contínua em x.

2) *se* $x \in F$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário e $s = x_{|n}$. Seja $y \in N_s$ qualquer. Se $y \notin F$ então como $y_{|n} = x_{|n}$ e $x \in F$, temos que $n(y) > n$. Portanto $r(y) \in N_{s(y)} \subseteq N_{y_{|n}} = N_s$. Se se $y \in F$ temos também, trivialmente $r(y) \in N_s$. Ou seja $r(N_s) \subseteq N_s$. Isso significa que para qualquer aberto básico N_s de $r(x) = x$, $r^{-1}(N_s)$ contém uma vizinhança (no caso, N_s) de x. Logo r é contínua em x.

□

Teorema 2.19. *Seja X polonês. Existe uma bijeção contínua de um fechado de $\mathcal{N}$ sobre X. Se $X \neq \emptyset$, existe uma sobrejeção contínua de $\mathcal{N}$ sobre X.*

Proof. Aplicar o Lema 2.17 e o Corolário 2.14, usando uma métrico compatível completa em X. Para a segunda afirmação, a sobreeção será a composta, na ordem adequada, de uma bijeção entre um fechado F de $\mathcal{N}$ e X, e de uma retração contínua de $\mathcal{N}$ sobre F dada pelo Lema 2.18 □

Observação: Tentem encontrar aplicações desse teorema para espaços clássicos, e casos onde F pode ser escolhido igual a $\mathcal{N}$.

3. Teorema de Baire e consequências

3.1. Teorema de Baire.

Definição 3.1. *Raros. Magros. Comagros.*

Teorema 3.2 (Teorema de Baire). *Seja X completamente metrizável. Então qualquer subespaço magro de X tem interior vazio. Equivalentemente, qualquer subespaço comagro de X é denso.*

Observação 3.3. *Seja X completamente metrizável. Se $U \subseteq X$ é aberto não-vazio, então U não é magro.*

Proposição 3.4. *Seja X completamente metrizável e $A \subseteq X$. Então A é comagro em X se e somente se A contém um G_δ denso (i.e., denso em X).*

Observação 3.5. *Seja X completamente metrizável não vazio. Então não existe subespaço de X ao mesmo tempo magro e comagro.*

Magros e comagros são como os conjuntos de "medida nula" e de "medida plena" para uma noção topológica de mensurabilidade ("categoria de Baire") em espaços completamente metrizáveis. Abertos não-vazios são exemplos de conjuntos de "medida topológica" positiva.

Definição 3.6. *Seja X um conjunto. Definição de σ-ideal $\mathcal{I}$ de subconjuntos de X.*

Exemplo: o σ-ideal dos subespaços magros de um espaço topológico X.

Definição 3.7. *Seja X um conjunto. Definição de σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X.*

Note que vale também que qualquer interseção enumerável de subconjuntos de $\mathcal{A}$ pertence a $\mathcal{A}$.

3.2. A σ-algebra dos subespaços Baire-mensuráveis.

Lembramos que $A \Delta B$ denota a diferença simétrica de dois subconjuntos de um conjunto X, ou seja:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Alguns fatos a verificar em exercício e que usaremos a seguir:

(a) A diferença simétrica de A e B coincide com a diferença simétrica de B e A
(b) A diferença simétrica de A e B coincide com a diferença simétrica de $X \setminus A$ e $X \setminus B$
(c) se $C = A \Delta B$ então $A = B \Delta C$ (e $B = A \Delta C$)
(d) se acharem outros me avisem...

Definição 3.8. *Seja X topológico, A, B subespaços de X. Então*

$$A =^* B \Leftrightarrow A \Delta B \text{ magro}$$

Equivalentemente, $A =^* B$ se e somente se $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são magros.

Observação 3.9. *Seja X topológico. A relação $=^*$ define uma relação de equivalência entre os subespaços de X.*

Proof. Exercício. □

Definição 3.10. *Seja X topológico. Um subconjunto A de X é* Baire mensurável *se existe um aberto U de X tal que $A =^* U$.*

Usa-se, as vezes, a expressão "A tem a propriedade de Baire" em vez de "A é Baire mensurável".

EXEMPLO 3.11. *Exemplos de subespaços Baire-mensuráveis:*

i) *os magros*
ii) *os abertos*
iii) *os fechados*

PROOF. Somente (iii) não é óbvio. Note que se F é fechado, então $F \setminus \mathrm{int}(F)$ é fechado de interior vazio (imediato), portanto magro. Segue que $F =^* \mathrm{int}(F)$ e como $\mathrm{int}(F)$ é aberto, F é Baire-mensurável. □

PROPOSIÇÃO 3.12. *Seja X topológico. A família dos subespaços Baire-mensuráveis de X é σ-álgebra. É a σ-álgebra gerada pelos abertos e pelos magros.*

Isso significa que é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X contendo os abertos e os magros.

PROOF. Vamos primeiro provar que é σ-álgebra. Está claro que $\emptyset$ é Baire-mensurável. Seja A Baire mensurável U aberto tal que $A =^* U$. Como a diferença simétrica de $X \setminus A$ e de $X \setminus U$ coincide com $A \Delta U$, temos que $X \setminus A =^* X \setminus U$. Pelo Exemplo 3.11 iii) segue que $X \setminus A$ é Baire mensurável. Suponha A_n Baire-mensurável para todo n e seja O_n um aberto tal que $A_n =^* O_n$. Como

$$(\cup_n A_n) \setminus (\cup_n O_n) \subseteq \cup_n (A_n \setminus O_n),$$

que os magros formam um σ-ideal, e que vale o mesmo trocando os O_n e os A_n, temos que

$$\cup_n A_n =^* \cup_n O_n.$$

Como $\cup_n O_n$ é aberto, $\cup_n A_n$ é Baire mensurável.

A σ-álgebra dos Baire mensuráveis contém os magros e os abertos. Para concluir basta provar que qualquer A Baire mensurável pertence à σ-álgebra gerada pelos magros e pelos abertos.

De fato, dado um tal A, seja M magro e U aberto tal que $A \Delta U = M$, então

$$A = U \Delta M = (U \cap (X \setminus M)) \cup ((X \setminus U) \cap M)$$

o que pertence à σ-álgebra gerada por U e M. □

Em particular, conjuntos G_δ e F_σ são Baire mensuráveis.

Note que se X é polonês enumerável, então todos os subespaços de X são F_σ e portanto Baire mensuráveis. Vamos ver que isso não vale no caso não enumerável.

LEMA 3.13. *Seja X topológico, e A subespaço de X. Então A é Baire mensurável se e somente se existem G subespaço G_δ de X e M subespaço magro de X tais que $A = G \cup M$.*

PROOF. A afirmação "se" é consequência da Proposição 3.12. Para "somente se", suponha $A \Delta U = M$, U aberto e $M \subseteq L := \cup_{n \in N} F_n$, F_n fechados de interior vazio. Note que L é F_σ. Portanto $G := U \setminus L$ é G_δ contido em A. Além disso

$$A \setminus G \subseteq A \cap ((X \setminus U) \cup L) \subseteq (A \setminus U) \cup (A \cap L) \subseteq L$$

e L é magro, logo $A \setminus G$ é magro. A identidade

$$A = G \cup (A \setminus G)$$

conclui a demonstração. □

DEFINIÇÃO 3.14. *Seja X topológico e A subespaço de X. A é* conjunto de Bernstein *em X se A e $X \setminus A$ não contêm uma cópia homeomorfa do espaço de Cantor $\mathcal{C}$.*

PROPOSIÇÃO 3.15. *Nenhum conjunto de Bernstein em X polonês é Baire-mensurável.*

PROOF. Seja A de Bernstein em X. Então ou A, ou $X \setminus A$ é não-magro. Wlog, A é não-magro. Suponha A Baire-mensurável, então pelo Lema 3.13, A contém um G_δ não magro G. Observe que G é não enumerável, e polonês porque G_δ em X. Então pelo Corolário 2.10, X contém uma cópia homeomorfa do Cantor, o que é uma contradição. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.16. *Seja X polonês não enumerável. Então X contém um subespaço A não Baire mensurável.*

PROOF. Vamos construir um conjunto de Bernstein A em X. Como X tem base enumerável $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ de abertos, ele tem no máximo c abertos (a função ϕ que associa a cada aberto U, a sequência $\phi(U) \in \mathcal{C}$ definida por

$$\phi(U)(n) = 1 \Leftrightarrow U_n \subseteq U$$

é injetora). Portanto tem no máximo c fechados e portanto c cópias homeomorfas de $\mathcal{C}$. Não é dificil verificar que contém exatamente c cópias homeomorfas do Cantor...

Enumerando essas cópias $(P_\alpha)_{\alpha<c}$, seja $a_0 \neq b_0$ em P_0. Definidos a_β, b_β para $\beta < \alpha$, escolhemos $a_\alpha \neq b_\beta \in P_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha}\{a_\beta, b_\beta\}$, o que é possível por motivos de cardinalidade. Por indução transfinita, definimos assim $a_\alpha, b_\alpha \in P_\alpha, \alpha < c$, distintos entre si. Seja $A = \{a_\alpha, \alpha < c\}$. A é Bernstein em X: de fato, $a_\alpha \in P_\alpha \cap A$ e $b_\alpha \in P_\alpha \setminus A$, para todo $\alpha < c$, o que implica que A não contém nenhum P_α e portanto nenhuma cópia homeomorfa de $\mathcal{C}$. O mesmo vale para $X \setminus A$. $\square$

Foi usado bastante o Axioma da Escolha (AC) aqui! Note que é consistente em ZF que todos os subespaços de $\mathbb{R}$ sejam Baire-mensuráveis...

3.3. Funções Baire mensuráveis.

DEFINIÇÃO 3.17. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. A função f é* Baire-mensurável *se a imagem inversa $f^{-1}(U)$ de qualquer aberto de Y é Baire mensurável em X.*

Exemplos:

a) Funções contínuas são Baire-mensuráveis
b) Se Y é separável metrizável, limites pontuais de funções contínuas são Baire-mensuráveis

PROOF. Seja f limite simples de uma sequência $(f_n)_n$ de funções contínuas. Como os subespaços Baire-mensuráveis de X formam uma σ-álgebra, basta provar que $f^{-1}(U)$ é Baire-mensurável quando U é uma bola aberta não vazia (pois se $U = \cup_{n \in \mathbf{N}} U_n$, então $f^{-1}(U) = \cup_{n\in \mathbf{N}} f^{-1}(U_n)$). E se $U = B(a, \epsilon)$ então

$$x \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow d(f(x), a) < \epsilon \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{Q}, q > 0, \forall n \geq N, d(f_n(x), a) < \epsilon - q.$$

Portanto

$$f^{-1}(U) = \cup_{N,q} \cap_{n \geq N} f_n^{-1}(B(a, \epsilon - q)).$$

Pela propriedade de σ-álgebra, isso prova que $f^{-1}(U)$ é Baire mensurável. $\square$

Observe que pelo mesmo método, quando Y é separável metrizável, qualquer limite simples de funções Baire-mensuráveis de X em Y ainda será Baire-mensurável.

Para o próximo teorema, pensar no exemplo da função característica dos racionais!

TEOREMA 3.18. *Seja f função Baire mensurável de X completamente metrizável em Y separável e metrizável. Então existe G comagro em X tal que $f_{|G}$ é contínua.*

PROOF. Seja $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma base de abertos de Y. Como $f^{-1}(U_n)$ é Baire mensurável, escreva

$$f^{-1}(U_n) = V_n \Delta M_n$$

onde V_n é aberto e M_n magro. Seja $G_n = X \setminus M_n$. Então $G := \cap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ é comagro. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_{|G}^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_n) \cap G &= ((V_n \setminus M_n) \cap G) \cup (M_n \setminus V_n) \cap G) \\ &= V_n \cap G_n \cap G = V_n \cap G, \end{aligned}$$

aberto de G. □

COROLÁRIO 3.19. *Qualquer função Baire mensurável entre polonêses tem uma restrição contínua a algum comagro.*

Lembre que é preciso AC para encontrar uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não Baire-mensurável!

4. A σ-algebra dos Borelianos

4.1. Conjuntos borelianos.

Definição 4.1. *Seja X topológico. A σ-álgebra $\mathcal{B}(X)$ dos subespaços borelianos de X é a σ-álgebra gerada pelos abertos de X.*

Note que $\mathcal{B}(X)$ contém os os fechados, e é estável por interseção enumerável, além de por união enumerável.

Note também que se um polonês X é enumerável, então todos os os subespaços de X são borelianos (porque F_σ).

Observação 4.2. *Qualquer boreliano de X é Baire mensurável.*

Se X é polonês não enumerável, veremos que não vale a recíproca.

Uma notação importante:

- $G(X) = \Sigma^0_1(X) = \{\text{abertos de } X\}$
- $F(X) = \Pi^0_1(X) = \{\text{fechados de } X\}$
- $\Delta^0_1(X) = \Sigma^0_1(X) \cap \Pi^0_1(X) = \{\text{abertos fechados de } X\}$

Definição 4.3. *Para X topológico, definimos por indução transfinita, para $\alpha < \Omega_1$, as classes de borelianos*

$$\Sigma^0_\alpha(X), \Pi^0_\alpha(X), \Delta^0_\alpha(X)$$

onde

(i) $A \in \Sigma^0_\alpha(X) \Leftrightarrow A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *onde para todo n, $A_n \in \Pi^0_{\alpha_n}(X)$ para algum $\alpha_n < \alpha$.*

(ii) $A \in \Pi^0_\alpha(X) \Leftrightarrow X \setminus A \in \Sigma^0_\alpha(X)$

(iii) $\Delta^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\alpha(X) \cap \Delta^0_\alpha(X)$

Proposição 4.4 (Estratificação boreliana). *Seja X polonês não enumerável. Então a sequências $\Sigma^0_\alpha(X), \Pi^0_\alpha(X), \Delta^0_\alpha(X), \alpha < \omega_1$ são estritamente crescentes para a inclusão, e*

$$\mathcal{B}(X) = \cup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X) = \cup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha(X) = \cup_{\alpha<\omega_1} \Delta^0_\alpha(X)$$

Proof. Tópico do Hugo. □

Lembramos da Seção 1 que os pontos de continuidade de uma função f de X topológico em Y metrizável formam um G_δ (ou Π^0_1). E pontos de derivabilidade?

Exemplo 4.5. *Os pontos de derivabilidade de uma função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ formam um boreliano de $[0,1]$.*

Proof. Seja D_f esse conjunto. Podemos usar o critério de Cauchy de continuidade de função porque $\mathbb{R}$ é completo. Ou seja $x \in D_f$ se e somente se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall y, z \in [0,1](((0 < |y-x| < \alpha) \wedge (0 < |z-x| < \alpha)) \Rightarrow$$
$$|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{f(z)-f(x)}{z-x}| \leq \epsilon).$$

Está claro que podemos limitar ϵ e α a $\mathbb{Q}^{+*} := \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. Além disso vamos multiplicar por $(y-x)(z-x)$ para evitar complicações sobre dividir por zero (isso eu deveria ter feito na aula). Chegamos a

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^{+*} \exists \alpha \in \mathbb{Q}^{+*} \forall y, z \in [0,1](((0 < |y-x| < \alpha) \wedge (0 < |z-x| < \alpha)) \Rightarrow$$

$$|(f(y)-f(x))(z-x)-(f(z)-f(x))(y-x)| \leq \epsilon(y-x)(z-x)).$$

Seja $F_{\alpha,\epsilon,y,z}$ o conjunto dos x tais que (1) $x=y$ ou (2) $|y-x| \geq \alpha$ ou (3) $x=z$ ou (4) $|z-x| \geq \alpha$ ou (5) $|(f(y)-f(x))(z-x)-(f(z)-f(x))(y-x)| \leq \epsilon(y-x)(z-x)$.

Esse conjunto é fechado em $[0,1]$ como união de cinco fechados (usando a continuidade de f para (5)). Logo

$$D_f = \cap_{\epsilon \in \mathbb{Q}^{+*}} \cup_{\alpha \in \mathbb{Q}^{+*}} \cap_{y,z \in [0,1]} F_{\alpha,\epsilon,y,z}.$$

prova que D_f é interseção enumerável de união enumerável de fechados (ou seja, união enumerável de F_σ's, tais conjuntos são chamados de $F_{\sigma\delta}$) portanto boreliano. □

4.2. Funções borelianas.

Definição 4.6. *Sejam X, Y topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é Borel mensurável (ou boreliana) se a imagem inversa por f de qualquer aberto de Y é boreliano em X.*

Observação 4.7.

(1) *Se a topologia de Y tem base enumerável $\{U_n\}$, basta verificar que $f^{-1}(U_n)$ é boreliano para cada n.*
(2) *pelas regras clássicas da imagem inversa, uma função f é boreliana se e somente se a imagem inversa de qualquer fechado é boreliana se e somente se a imagem inversa de qualquer boreliano é boreliano.*

Para o item (2): de fato os conjunto cuja imagem inversa por f é boreliana formam uma σ-algebra de Y contendo os abertos.

Exemplos 4.8.

(1) *funções contínuas são borelianas*
(2) *a função característica $1_A : X \to \mathbb{R}$ de um boreliano A de X é boreliana*
(3) *se X é topologico e Y é separável metrizável, então qualquer limite simples de funções contínuas é boreliana. Achar um limite superior para a complexidade boreliana de f^{-1} de um aberto, nesse caso.*
(4) *se X é topologico e Y é separável metrizável, então qualquer limite simples de funções borelianas é boreliana.*
(5) *funções de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que são derivadas são borelianas.*

Note que funções borelianas são em particular Baire mensuráveis.

Teorema 4.9 (Lebesgue-Hausdorff). *Seja X metrizável. A classe das funções borelianas de X em $\mathbb{R}$ é a menor classe de funções contendo as contínuas e fechada pela operação de tomar limite simples de sequências de funções.*

Proof. Denotamos $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ o conjunto da funções borelianas de X em $\mathbb{R}$ e $\overline{C(X,\mathbb{R})}^{cps}$ a menor classe de funções contendo as contínuas e fechada pela operação de tomar limite simples de sequências de funções.

1) A partir do Exemplo 4.8(4) temos que $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \supseteq \overline{C(X,\mathbb{R})}^{cps}$

2) Admitindo a afirmação *"(A) se $Y_1,\ldots,Y_n$ são conjuntos borelianos de X e $f=\sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{Y_i}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ então $f \in \overline{C(X,\mathbb{R})}^{cps}$"*, provamos que $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \subseteq \overline{C(X,\mathbb{R})}^{cps}$

3) Provamos a afirmação (A) no caso de $Y_1,\ldots,Y_n$ serem elementos de $\Sigma_1^0(X) \cup \Pi_1^0(X)$

4) Provamos (A) para borelianos arbitrários, provando por indução transfinita sobre $\alpha < \omega_1$ (obrigado Hugo!) a afirmação $(A)_\alpha$: "se $Y_1,\ldots,Y_n$ são conjuntos borelianos

de X que pertencem a $\Sigma^0_\alpha(X) \cup \Pi^0_\alpha(X)$, e $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{Y_i}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ então $f \in \overline{C(X,\mathbb{R})}^{cps}$".

$\square$

Observação: podemos definir por indução transfinita sobre $\alpha < \omega_1$ os espaços vetoriais $\mathcal{B}_\alpha(X,\mathbb{R})$ da seguinte maneira: $\mathcal{B}_0(X,\mathbb{R}) = C(X,\mathbb{R})$ e dado $\alpha \geq 1$, $\mathcal{B}_\alpha(X,\mathbb{R})$ é o espaço dos limites simples de sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções tais que $f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}(X,\mathbb{R})$, onde $\beta_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos verificar que se $B \in \Sigma^0_\alpha \cup \Pi^0_\alpha$, então $1_B \in \mathcal{B}_\alpha(X,\mathbb{R})$.

Finalmente podemos provar que

$$\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) = \cup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha(X,\mathbb{R}).$$

4.3. Representações de conjuntos borelianos. O objetivo é mostrar que subespaços borelianos de poloneses "se comportam" como polonêses.

LEMA 4.10. *Seja (X,τ) polonês e $A \subseteq X$ aberto ou fechado. Então existe uma topologia polonesa τ_A em X tal quem*

(i) *τ_A refina τ (i.e. $\tau \subseteq \tau_A$)*
(ii) *A é aberto e fechado para τ_A*
(iii) *τ_A e τ têm os mesmos borelianos ($\mathcal{B}(\tau_A) = \mathcal{B}(\tau)$).*

PROOF. $\square$

Mais tarde mostraremos que se $\tau \subseteq \tau'$ são duas topologias *polonesas* num conjunto X, então $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(\tau')$, assim que (iii) seguiria de (i) e de ambas as topologias serem polonesas.

A seguir usaremos que se τ_n é uma sequência de topologias em X, a topologia τ_∞ gerada pela família $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$, i.e. a menor topologia que refina todas as τ_n, admite como base de abertos o conjunto das interseções finitas de elementos de $\cup_n \tau_n$ - se $b_n \subseteq \tau_n$ é uma base de abertos para cada n, uma base de abertos serí dada pelo conjunto das interseções finitas de elementos de $\cup_n b_n$. Uma outra maneira de entender isso é que τ_∞ é a topologia que faz de $\phi : (X,\tau_\infty) \to \Pi_{n\in\mathbb{N}}(X,\tau_n)$ definida por

$$\phi(x) = (x, x, \ldots)$$

um homeomorfismo sobre a imagem.

LEMA 4.11. *Seja (X,τ) polonês e para cada $n \in \mathbb{N}$, τ_n uma topologia polonesa em X que refina τ (e tal que $\mathcal{B}(\tau_n) = \mathcal{B}(\tau)$). Seja τ_∞ a topologia gerada pela família $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$. Então*

(i) *τ_∞ é polonesa*
(ii) *τ e τ_∞ têm os mesmos borelianos.*

TEOREMA 4.12. *Seja (X,τ) polonês e $A \subseteq X$ boreliano. Então existe uma topologia polonesa τ_A em X tal quem*

(i) *τ_A refina τ (i.e. $\tau \subseteq \tau_A$)*
(ii) *A é aberto e fechado para τ_A*
(iii) *τ_A e τ têm os mesmos borelianos.*

PROPOSIÇÃO 4.13. *Seja (X, τ) polonês, Y separável metrizável e $f : X \to Y$ boreliana. Então existe uma topologia polonesa em X que refina τ, tem os mesmos borelianos, e para qual f é contínua.*

TEOREMA 4.14 (Alexandrov-Hausdorff). *Seja X polonês e $A \subseteq X$ boreliano. Então A é enumerável ou contém uma cópia homeomorfa de $\mathcal{C}$.*

COROLÁRIO 4.15. *Qualquer subespaço boreliano de um polonês é enumerável ou de cardinalidade c.*

TEOREMA 4.16 (Lusin-Souslin).

(i) *qualquer subespaço boreliano de um polonês é imagem de um fechado de $\mathcal{N}$ por uma injeção contínua.*
(ii) *qualquer subespaço boreliano não-vazio de um espaço polonês é imagem contínua de $\mathcal{N}$.*

4.4. Gráficos de funções borelianas.

LEMA 4.17.

(i) *Sejam X, Y espaços topológicos, A, B borelianos em X, Y respetivamente. Então $A \times B$ é subespaço boreliano de $X \times Y$.*
(ii) *Se $(X_n)_n$ é uma sequência de espaços topológicos, e para todo n, B_n um subespaço boreliano de X_n, então $\Pi_{n \in \mathbf{N}} B_n$ é boreliano em $\Pi_{n \in \mathbf{N}} X_n$.*

PROPOSIÇÃO 4.18. *Seja f uma função boreliana de X topológico em Y separável metrizável. Então o gráfico de f é boreliano em $X \times Y$.*

LEMA 4.19. *Seja X topológico e Y subespaço de X. Os borelianos de Y são as interseções dos borelianos de X com Y.*

5. Conjuntos analíticos

5.1. Definição, primeiras propriedades. Observamos que se B é um boreliano de $X \times Y$, então para todo $y \in Y$, o conjunto

$$S_y(B) := \{x \in X : (x, y) \in B\}$$

é boreliano em X. O Lebesgue afirmou que isso vale também para

$$\mathrm{proj}_X(B) = \{x \in X : \exists y \in Y (x, y) \in B\},$$

mas isso não é verdadeiro, e leva à definição de analítico.

PROPOSIÇÃO 5.1. *Os seguintes enunciados são equivalentes para A subespaço de X polonês.*

(1) *A é imagem contínua de um polonês Y*
(2) *A é imagem boreliana de um boreliano B de um polonês Y*
(3) *A é imagem pela projeção de $X \times \mathcal{N}$ sobre X de um fechado F de $X \times \mathcal{N}$*
(4) *A é imagem pela projeção de $X \times Y$ sobre X de um boreliano B de $X \times Y$, onde Y é polonês*
(5) *se $A \neq \emptyset$, A é imagem contínua de $\mathcal{N}$.*

PROOF. $\square$

DEFINIÇÃO 5.2. *Seja A subespaço de X polonês. Se A satisfaz (1)-(5) da Proposição 5.1, então A é chamado de analítico em X. A classe dos subespaços analíticos de X é denotada $\Sigma_1^1(X)$ ou $A(X)$.*

OBSERVAÇÃO 5.3. *Seja X polonês. Então $\mathcal{B}(X) \subseteq \Sigma_1^1(X)$.*

Veremos que essa inclusão é estrita se X é não enumerável.

Um exemplo interessante: se X é Banach, e T operador linear contínuo em X, então o espectro pontual $\sigma_p(T)$, i.e. o conjunto dos autovalores de T, é analítico. Enquanto o espectro $\sigma(T)$, que contém $\sigma_p(T)$, é fechado (lembrando que o espectro é o conjunto dos λ's tais que $T - \lambda Id$ não é bijetora (ou equivalentemente, não é isomorfismo linear)).

PROPOSIÇÃO 5.4.

(a) *Se $(X_n)_n$ é uma sequência de espaços polonêses, e para todo n, A_n um subespaço analítico de X_n, então $\Pi_{n \in N} A_n$ é analítico em $\Pi_{n \in N} X_n$.*

Seja X polonês. Então:

(b) *Uma união enumerável de subespaços analíticos de X é analítica em X*
(c) *Uma interseção enumerável de subespaços analíticos de X é analítica em X*

Sejam X, Y polonêses, e $f : X \to Y$ boreliana. Então:

(d) *se A é analítico em X, então $f(A)$ é analítico em Y*
(e) *se A' é analítico em Y¡ então $f^{-1}(A')$ é analítico em X*

PROOF. (a)(b)(c) feitos na lousa. Pensem em (d)(e) para terça-feira! $\square$

5.2. Analíticos não-borelianos. Observe que se X é polonês não enumerável, então $\Sigma_1^1(X)$ tem cardinalidade c.

Se $\mathcal{U}$ é um subespaço de $X \times Y$, e $y \in Y$, denotamos por $\mathcal{U}_y$ o conjunto

$$\mathcal{U}_y = \{x \in X : (x, y) \in \mathcal{U}\}.$$

Definição 5.5. *Seja X polonês e $\Gamma(X)$ uma classe de subespaços de X. Um subespaço $\mathcal{U}$ de $X \times \mathcal{N}$ é universal para $\Gamma(X)$ se*

$$\Gamma(X) = \{\mathcal{U}_y, y \in \mathcal{N}\}.$$

Lema 5.6. *Se X é polonês, existe um aberto $\mathcal{U}$ de $X \times \mathcal{N}$, universal para a classe dos abertos de X.*

Proof. Se $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma enumeração de uma base de abertos de X, então defina

$$(x, y) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x \in O_{y_n}.$$

□

Lema 5.7. *Se X é polonês, existe um fechado $\mathcal{F}$ de $X \times \mathcal{N}$, universal para a classe dos fechados de X.*

Proof. Define $\mathcal{F}$ como o complementar de $\mathcal{U}$. □

Lema 5.8. *Se X é polonês, existe um fechado $\mathcal{F}$ de $X \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, universal para a classe dos fechados de $X \times \mathcal{N}$.*

Proof. Aplique o Lema anterior a $X \times \mathcal{N}$ em vez de X. □

Lema 5.9. *Se X é polonês, existe um analítico $\mathcal{A}$ de $X \times \mathcal{N}$ universal para $\Sigma_1^1(X)$.*

Proof. Define $\mathcal{A}$ por

$$(x, z) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N} : (x, y, z) \in \mathcal{F}.$$

Ou seja, $\mathcal{A}$ é a projeção de $\mathcal{F}$ sobre $X \times \mathcal{N}$ em relação à primeira e terceira coordenada. □

Proposição 5.10. *Se $\mathcal{A}$ é analítico em $\mathcal{N}^2$ e universal para $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$, então $\mathcal{N}^2 \setminus \mathcal{A}$ não é analítico. Em particular $\mathcal{A}$ não é boreliano.*

Proof. Use que $\{x \in \mathcal{N} : x \notin \mathcal{A}_x\}$ não é analítico... □

Teorema 5.11. *Seja X polonês não enumerável. Então $\mathcal{B}(X) \neq \Sigma_1^1(X)$.*

Proof. Use a Prop. 2.11.... □

5.3. Coanalíticos e o teorema de separação de Lusin.

Definição 5.12. *Seja X polonês e $A \subseteq X$. A é coanalítico se e somente se $X \setminus A$ é analítico.*
A classe dos coanalíticos de X é denotada $\Pi_1^1(X)$ ou $CA(X)$.

Observação 5.13. *É claro que $\mathcal{B}(X) \subseteq \Pi_1^1(X)$.*
Definindo

$$\Delta_1^1(X) := \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X)$$

temos portanto

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \Delta_1^1(X).$$

Proposição 5.14.

(a) *se para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Pi_1^1(X_n)$, então $\Pi_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Pi_1^1(\Pi_{n \in \mathbb{N}} X_n)$*
(b) *Uniões enumeráveis e interseções enumeráveis de coanalíticos são coanalíticas*
(c) *se f é uma função boreliana entre espaços polonêses X e Y, e se A' é coanalítico em Y, então $f^{-1}(A')$ é coanalítico em X.*

Note que **não** vale que a imagem contínua de um coanalítico é coanalítica...

Um exemplo de conjunto coanalítico: o conjunto das funções contínuas em $[0,1]$ que não são deriváveis em nenhum ponto, é coanalítico em $C(0,1)$. Além disso é possível, mas um pouco difícil, mostrar que esse conjunto não é boreliano. Ver tópico do Javier.

Avançamos na demonstração do teorema 4.9 (ver là).

DEFINIÇÃO 5.15. *Dois subconjuntos A e A' de um espaço topológico X são Borel separáveis se existe $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subseteq B$ e $A' \subseteq X \setminus B$.*

LEMA 5.16. *Seja X topológico e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de subconjuntos de X tais que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, P_m e Q_n são Borel separáveis. Sejam $P = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ e $Q = \cup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Então P e Q são Borel separáveis.*

TEOREMA 5.17 (Teorema de separação de Lusin). *Se A e A' são analíticos disjuntos num polonês, então A e A' são Borel separáveis.*

PROOF. $\square$

TEOREMA 5.18 (Teorema de Souslin). *Se A é um subconjunto análitico e coanalítico de um polonês, então A é boreliano. Ou seja,*

$$\Delta_1^1(X) = \mathcal{B}(X)$$

PROOF. $\square$

Note que o teorema de Souslin pode ser usado para mostrar que um conjunto B é boreliano, sem dar informação sobre a posição de B na hierarquia boreliana.

Exercício (ex 3 da lista 2): Seja X polonês e $(A_n)_n$ uma sequência de subespaços analíticos de X, disjuntos entre si. Mostre que existe uma família de de subespaços borelianos $(B_n)_n$ de X, disjuntos entre si, e tais que $A_n \subset B_n$ para todo n.

5.4. Gráficos de funções borelianas. Caracterização de funções borelianas pelo gráfico.

TEOREMA 5.19. *Sejam X, Y polonêses e $f : X \to Y$. São equivalentes:*
(a) *f é boreliana*
(b) *o gráfico de f é boreliano em $X \times Y$*
(c) *o gráfico de f é analítico em $X \times Y$*

PROOF. Tópico do Iuri. $\square$

COROLÁRIO 5.20. *Seja X um conjunto, e $\tau \subseteq \tau'$ duas topologias polonesas em X. Então (X, τ) e (X, τ') têm os mesmos borelianos.*

PROOF. Tópico do Iuri (feito 10/11). $\square$

5.5. Isomorfismos borelianos, teorema do isomorfismo.

DEFINIÇÃO 5.21. *Sejam X, Y topológicos e $f : X \to Y$. A função f é isomorfismo boreliano entre X e Y se f é bijetora, boreliana e f^{-1} é boreliana.*
Quanto existe uma tal f, dizemos que X e Y são Borel isomorfos

Note que se f é Borel isomorfismo entre X e Y, então para todo $B \subseteq X$, B é boreliano se e somente se $f(B)$ é boreliano.

Proposição 5.22. *Sejam X e Y polonêses e $f : X \to Y$. Se f é bijetora e boreliana, então f é isomorfismo boreliano.*

Proof. $\square$

Lema 5.23. *Sejam X, Y topológicos e $f : X \to Y$.*
(a) *se $A \subseteq X$ então $f_{|A} : A \to Y$ é boreliana*
(b) *se $f(X) \subseteq Y'$ então a função de X em Y' que a x associa $f(x)$ é boreliana.*

Teorema 5.24 (Lusin-Souslin). *Sejam X, Y polonêses, A subespaço boreliano de X, e $f : A \to Y$ boreliana injetora. Então $f(A)$ é boreliano em Y e f induz um isomorfismo boreliano de A sobre $f(A)$.*

Proof. $\square$

O objetivo agora é de classificar os polonêses modulo isomorfismo boreliano.

Proposição 5.25 (Schroeder-Bernstein para funções borelianas). *Sejam X, Y polonêses. Se existe uma função boreliana injetora de X em Y e uma função boreliana injetora de Y em X, então X e Y são Borel isomorfos.*

Proof. Tópico do João. $\square$

Teorema 5.26 (Teorema do isomorfismo). *Dois espaços polonêses são Borel isomorfos se e somente se eles têm a mesma cardinalidade.*

Definição 5.27. *Um espaço mensurável é um conjunto munido de uma σ-álgebra de subconjuntos.*

Definição 5.28. *Um espaço mensurável (X, σ) é Borel-standard se existe uma topologia polonesa τ em X tal que σ seja a σ-álgebra dos borelianos para τ.*

5.6. Analíticos são Baire-mensuráveis.

Teorema 5.29 (Nikodym). *Qualquer subespaço analítico de um polonês é Baire-mensurável.*

Proof. Admitido. $\square$

6. Teoria de Ramsey

6.1. Introdução.

6.2. Teorema de Ramsey.

Definição 6.1. *Seja A infinito e $k \in \omega \cup \{\omega\}$. Definimos $[A]^k$ como o conjunto dos subconjuntos de A de cardinalidade k.*

Exemplo 6.2.
a) $[\mathbb{N}]^k$;
b) se $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, $[A]^k$.

Definição 6.3. *Seja A infinito e $k \in \omega \cup \{\omega\}$. Uma coloração de $[A]^k$ é uma função c de domínio $[A]^k$. Ela é finita (resp. enumerável) se a imagem de c é finita (resp. enumerável)*

Definição 6.4. *Seja A infinito, $k \in \omega \cup \{\omega\}$ e c uma coloração de $[\mathbb{N}]^k$. Um conjunto $C \in [A]^\omega$ é c-monocromático se a restrição de c a $[C]^k$ é constante.*

Teorema 6.5 (Teorema de Ramsey). *Seja $k < \omega$. Para cada coloração finita c de $[\mathbb{N}]^k$, existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ c-monocromático.*

Observações

a) Note que o caso $k = 1$ é valido pelo "pidgeonhole principle" (pombos) ou em francês "principe des tiroirs" (gavetas).

É comum chamar a cardinalidade de $c([\mathbb{N}]^k)$ de r e supor que c toma valores em $\{0, \dots, r-1\}$.

b) O Teorema de Ramsey para $k = 2$ pode ser usado para provar que qualquer sequência em um conjunto ordenado admite uma subsequência monotona.

c) O exemplo de coloração c definida por $c(A) = \min A$ mostra que o Teorema de Ramsey não se extende ao caso $k = \omega$.

A prova do Teorema de Ramsey (ou Teorema de Ramsey finito) está baseada nas seguintes definições e proposições.

Definição 6.6. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \mathbb{N}$, $n < A$ significa que $n < m \forall m \in A$.*

Proposição 6.7 (Teorema de Ramsey, $k = 2$). *Qualquer coloração finita de $[\mathbb{N}]^2$ admite um conjunto monocromático $A \in [\mathbb{N}]^\omega$.*

Proof. Feita na lousa. $\square$

Aula do dia 10-11

Proposição 6.8 (Teorema de Ramsey, $k \Rightarrow k+1$).

Proof. Feito em aula. $\square$

6.3. Teoria de Ramsey para conjuntos infinitos.

Proposição 6.9. *Existe uma bicoloração de $[\mathbb{N}]^\omega$ para qual não existe conjunto de $[\mathbb{N}]^\omega$ monocromático.*

Proof. Sendo $\leq$ uma boa ordenação de $[\mathbb{N}]^\omega$, define

$$X = \{A \in [\mathbb{N}]^\omega : A = \min[A]^\omega$$

e use a bicoloração 1_X (onde $1_X : [\mathbb{N}]^\omega \to \{0,1\}$ é definida por $1_X(A) = 1$ se e somente se $A \in X$). $\square$

Proposição 6.10. *Topologia usual em* $[I\!N]^\omega$.

Observação 6.11. *Colorações em* $[I\!N]^k$, $k \in I\!N$, *vistas como colorações abertas em* $[I\!N]^\omega$.

Definição 6.12. *Seja* $X \subseteq [I\!N]^\omega$. *Diremos que* X *é Ramsey se existe* $A \in [I\!N]^\omega$, *temos* $[A]^\omega \subseteq X$ *ou* $[A]^\omega \subseteq [I\!N]^\omega \setminus X$.

Portanto, X é Ramsey se e somente se a bicoloração 1_X admite um conjunto monocromático $A \in [I\!N]^\omega$.

Note que o conjunto X da Proposição 6.9 é um exemplo de conjunto não Ramsey.

Observação 6.13. *Se* X *é Ramsey então* $[I\!N]^\omega \setminus X$ *é Ramsey.*

Proof. Obvio. □

6.4. A topologia de Ellentuck. Essa topologia será uma ferramenta muito importante.

Notação 6.14.

- *a, b, c denotam elementos de $[I\!N]^{<\omega} := \cup_{k \in I\!N} [I\!N]^k$, A, B, C denotam elementos de $[I\!N]^\omega$.*
- *A notação $a < A$ significa que para todos $m \in a$ e $n \in A$, temos $m < n$. Ou seja, $a = \emptyset$ ou $\max a < \min A$.*
- **Denotamos por $[a, A]$ o subconjunto de $[I\!N]^\omega$ definido por**

$$[a, A] = \{a \cup B : B \in [A]^\omega, a < B\}.$$

Observe que a parte inicial de A até $\max a$ não importa para $[a, A]$, ou seja temos para $a \neq \emptyset$, $[a, A] = [a, A \cap [1 + \max a, +\infty)]$.

Observação 6.15. *Os conjuntos* $[a, A]$ *são fechados em* $[I\!N]^\omega$ *para a topologia usual.*

Definição 6.16. *A topologia de Ellentuck em* $[I\!N]^\omega$ *é a topologia dada pela base de abertos* $\mathcal{B} = \{[a, A], a \in [I\!N]^{<\omega}, A \in [I\!N]^\omega\}$.

Usaremos a notação $E-$ para indicar propriedades de subconjuntos de $[I\!N]^\omega$ em relação à topologia de Ellentuck; por exemplo, E-abertos, E-borelianos...

Observação 6.17.

(a) *A topologia de Ellentuck refina a topologia usual*
(b) *A topologia de Ellentuck não é separável*
(c) *Cada $A \in [I\!N]^\omega$ tem um sistema enumerável $V_n, n \in I\!N$ de E-vizinhanças: para cada E-vizinhança V de A, existe n tal que $A \in V_n \subseteq V$.*
(d) *Os abertos básicos $[a, A]$ são abertos fechados.*
(e) *o espaço $[I\!N]^\omega$ é espaço de Baire munido da topologia de Ellentuck, ou seja, qualquer conjunto E-magro tem E-interior vazio.*

Proof. (c) se $\{a_n, n \in I\!N\}$ é a enumeração crescente de A, escolhe

$$V_n = [\{a_i, i < n\}, A].$$

□

6.5. Teorema de Nash-Williams.

Definição 6.18. *Seja $a \in [\mathbb{N}]^{<\omega}, A \in [\mathbb{N}]^{\omega}$. Seja $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$. Diremos que*

- *$[a, A]$ é ótimo (para X) se $[a, A] \subseteq X$*
- *$[a, A]$ é bom (para X) se existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq X$*
- *$[a, A]$ é ruim (para X) se não é bom, ou seja, para todo $B \subseteq A$, $[a, B] \nsubseteq X$*

Lema 6.19. *Temos as seguintes propriedades*

- *se $[a, A]$ é ótimo e $B \subseteq A$, então $[a, B]$ é ótimo*
- *se $[a, A]$ é ruim e $B \subseteq A$, então $[a, B]$ é ruim*
- *se $[a, A]$ é bom então existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B]$ é ótimo*
- *dado $[a, A]$ qualquer, existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B]$ é ruim ou ótimo.*

O nosso objetivo, de modo geral, é ou chegar a uma situação "ótima" para X, ou a uma situação tão ruim para X que chegue a ser ótima para o complementar de X...

Proposição 6.20. *Seja $X \in [\mathbb{N}]^{\omega}$. Para todo $A \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, existe $B \in [A]^{\omega}$ tal que*

- *$[\emptyset, B]$ é ótimo para X, ou*
- *$[b, B]$ é ruim para X, para todo $b \in [B]^{<\omega}$.*

Proof. Podemos e vamos supor que $[\emptyset, A]$ é ruim (para X). Vamos provar construir por indução uma sequência crescente $n_0 < n_1 < \cdots$ de naturais e uma sequência descrescente

$$A \supseteq A_0 \supseteq A_1 \cdots$$

de elementos de $[\mathbb{N}]^{\omega}$ de tal maneira que $n_0 \in A$, $n_{i+1} \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e tal que $[a, A_i]$ é ruim para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo $a \subseteq \{n_0, n_1, \ldots, n_i\}$.

a) Admitindo a existência das sequências (n_i) e (A_i), provamos que

$$B = \{n_i, i \in \mathbb{N}\}$$

satisfaz o enunciado da Proposição. Feito na lousa.

b) Existência de $n_0 \in A$, e $A_0 \subseteq A$ tais que $[a, A_0]$ é ruim para todo $a \subseteq \{n_0\}$. Feito na lousa.

c) Definidos $n_0, \ldots, n_{k-1}$ e $A_0, \ldots, A_{k-1}$ satisfazendo a condição, prova da existência de n_k e A_k. *Feito na aula do dia 17-11.*

□

Proposição 6.21. *Seja $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$. Seja $A \in [\mathbb{N}]^{\omega}$. Então existe $B \subseteq A$ tal que $[B]^{\omega} \subseteq X$ ou $[B]^{\omega} \subseteq \overline{[\mathbb{N}]^{\omega} \setminus X}^{E}$.*

Proof. Feito na aula do dia 17-11. □

Corolário 6.22. *Ellentuck abertos são Ramsey.*

Teorema 6.23 (Nash-Williams). *Abertos de $[\mathbb{N}]^{\omega}$ para a topologia usual são Ramsey.*

Em particular, bicolorações contínuas de $[\mathbb{N}]^{\omega}$ em $\{0, 1\}$ admitem conjuntos monocromáticos.

Um outro corolário da Proposição 6.21:

Corolário 6.24. *Se X é E-raro em $[\mathbb{N}]^{\omega}$ então para todo $A \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, existe $B \subseteq A$ tal que $[B]^{\omega} \cap X = \emptyset$.*

6.6. Teorema de Galvin-Prikry. Observamos que temos provado um pouco mais do que o que foi enunciado na parte anterior.

DEFINIÇÃO 6.25. *Seja* $X \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$. *Diremos que* X *é* completamente Ramsey *se para todo* $[a, A] \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$, *existe* $B \in [A]^\omega$ *tal que* $[a, B] \subseteq X$ *ou* $[a, B] \subseteq [\mathbb{N}]^\omega \setminus X$.

OBSERVAÇÃO 6.26.

(a) X *completamente Ramsey* $\Rightarrow X$ *Ramsey*
(b) X *completamente Ramsey* $\Leftrightarrow [\mathbb{N}]^\omega \setminus X$ *completamente Ramsey*
(c) *Uniões finitas e interseções finitas de conjuntos completamente Ramsey são completamente Ramsey.*

PROPOSIÇÃO 6.27. *Seja* $X \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$. *Seja* $[a, A]$ E*-aberto básico. Então existe* $B \in [A]^\omega$ *tal que*

(1) $[a, B] \subseteq X$, *ou*
(2) $[a, B] \subseteq \overline{[\mathbb{N}]^\omega \setminus X}^E$.

PROOF. □

TEOREMA 6.28. *Ellentuck abertos são completamente Ramsey.*

COROLÁRIO 6.29. *Abertos usuais são completamente Ramsey.*

Outras consequências da Proposição 6.27:

COROLÁRIO 6.30. *Seja* $X \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$. *Então* X *é* E*-raro se e somente se* $\forall [a, A], \exists B \in [A]^\omega : [a, B] \cap X = \emptyset$.

PROOF. □

COROLÁRIO 6.31. E*-raros são completamente Ramsey.*

Podemos mostrar que conjuntos E-magros são necessariamente E-raros. Ou seja:

PROPOSIÇÃO 6.32. *Seja* $X \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$. *São equivalentes*

(a) X *é* E*-raro*
(b) X *é* E*-magro*
(c) *Para todo* $[a, A]$ E*-aberto básico, existe* $B \in [A]^\omega$ *tal que* $[a, B] \cap X = \emptyset$.

PROOF. Feito na aula do dia 24-11 □

Segue

TEOREMA 6.33. *Seja* $X \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$. *Então* X *é Ellentuck Baire-mensurável se e somente se ele é completamente Ramsey.*

PROOF. Feito na aula. □

COROLÁRIO 6.34. *Os conjuntos completamente Ramsey formam uma* σ*-álgebra.*

TEOREMA 6.35 (Galvin-Prikry). *Borelianos de* $[\mathbb{N}]^\omega$ *para a topologia usual são completamente Ramsey.*

PROOF. Como a topologia de Ellentuck refina a usual, qualquer boreliano usual é Ellentuck boreliano e portanto Ellentuck Baire-mensurável. □

Em particular qualquer bicoloração boreliana de $[\mathbb{N}]^\omega$ em $\{0.1\}$ admite um conjunto monocromático.

6.7. Teorema de Silver.

TEOREMA 6.36 (Silver). *Analíticos de* $[\mathbb{N}]^\omega$ *munido da topologia usual são completamente Ramsey.*

PROOF. Admitido. $\square$

Aula do dia 1-12:

7. Mais sobre grupos polonêses

Nesse capítulo listamos alguns fatos sobre espaços polonêses, quando estão munidos de estrutura de grupo. Podemos ver esse capítulo como uma introdução extremamente modesta à teoria dos grupos polonêses. Uma boa referência é:

- Howard Becker and Alexander S. Kechris. The descriptive set theory of Polish group actions, volume 232 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Ver o capítulo 3.

Lembramos que um grupo polonês é um grupo topológico cuja topologia é polonês.

Exemplos:

a) o grupo das isometrias de X munido da topologia da convergência pontual, se X é métrico completo separável

b) o grupo das isometrias lineares de X munido da topologia SOT, se X é um espaço de Banach separável

c) Note que S_∞, o grupo das permutações de $\mathbb{N}$, é grupo polonês com a topologia usual, i.e. aquela induzida pela inclusão natural de S_∞ em $\mathcal{N}$. Isso pode ser visto como exemplo de a), onde X é igual a $\mathbb{N}$ munido da distância definida por $d(m,n) = 1$ se $m \neq n$.

Proposição 7.1. *Se X é grupo polonês, e Y um subgrupo topológico de X, então Y é polonês se e somente se Y é fechado em X.*

Proof. Exercício 15 da lista 1. Tópico do Geovani. □

Proposição 7.2. *[Continuidade automítica] Qualquer morfismo de grupos Baire-mensurável entre grupos polonêses é contínuo.*

Proof. Ex 16 da Lista 1, parte 3) □

Proposição 7.3. *Se (G,τ) é um grupo polonês, e se τ' é uma topologia que refina τ e faz de G um grupo polonês, então $\tau = \tau'$.*

Proof. Ex 16 da Lista 1, parte 4) □

Terminamos esse capítulo com um resultado sobre S_∞. Usaremos várias vezes o fato de que se G é grupo topológico, e $g \in G$, então $T_g : x \mapsto gx$ define um homeomorfismo de G. Denotamos $e = Id_{\mathbb{N}}$, o elemento neutro do grupo S_∞.

Proposição 7.4. *A topologia usual em S_∞ é a única topologia que faz de S_∞ um grupo polonês.*

Proof. Seja *can* a topologia usual, e seja τ uma topologia polonesa em S_∞.

Vamos provar que

$$Id : (S_\infty, \tau) \to (S_\infty, can)$$

é boreliana. Pela Proposição 5.22, isso implica que Id é isomorfismo boreliano. Pela proposição 7.2, isso implica que Id é um homeomorfismo, ou seja que $\tau = can$.

Para isso basta mostrar que qualquer aberto básico V_{n,σ_0} é τ-boreliano, onde

$$V_{n,\sigma_0} = \{\sigma \in S_\infty : \forall i \leq n, \sigma(i) = \sigma_0(i)\},$$

dados $n \geq 2$ e $\sigma_0 \in S_\infty$.

Afirmamos que basta provar isso para $\sigma_0 = e$, i.e. basta provar que

$$V_n = \{\sigma \in S_\infty : \forall i \leq n, \sigma(i) = i\}$$

é τ-boreliano.

De fato temos que $\sigma \in V_{n,\sigma_0} \Leftrightarrow \sigma_0^{-1} \circ \sigma \in V_n$, ou seja, $V_{n,\sigma_0} = T_{\sigma_0}(V_n)$, onde $T_{\sigma_0} : \sigma \mapsto \sigma_0 \circ \sigma$ define um homemorfismo de (S_∞, τ). De V_n τ-boreliano segue portanto que todos os V_{n,σ_0} são τ-borelianos.

Afirmamos que V_n é τ-fechado se $n \geq 2$.

Para isso usamos

$$A_n := \{\sigma \in S_\infty : \forall i > n, \sigma(i) = i\}$$

Note que se $n \geq 2$, então $\sigma \in V_n$ se e somente

$$\forall \sigma' \in A_n, \sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma.$$

(a implicação direta é fácil. Reciprocamente, se $\sigma \notin V_n$ e se escolhermos $m \leq n$ tal que $\sigma(m) \neq m$: se $\sigma(m) > n$, basta escolher $\sigma' \in A_n$ com $\sigma'(m) \neq m$, e se $\sigma(m) \leq n$, basta escolher $\sigma' \in A_n$ com $\sigma'(m) \neq m$ e $\sigma'(\sigma(m)) = \sigma(m)$, para obter $\sigma(\sigma'(m)) \neq \sigma'(\sigma(m))$).

Como S_∞ é grupo topológico para τ, o produto é contínuo, logo para cada σ' o conjunto

$$C_{\sigma'} := \{\sigma \in S_\infty : \sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma.\}$$

é τ-fechado. Segue que V_n é τ-fechado para cada $n \geq 2$.

Isso conclui a demonstração. $\square$