MAE 0580/MAC 6926 - 3^a Prova (Turma A)

22 de novembro 2017

Esta é uma prova individual, sem consulta. Em cada questão uma e só uma opção é correta. A nota da prova será calculada pela fórmula Nota $= \max\{0, C - E/3\}$. Nesta expressão, C é o número de respostas certas e E, o número de respostas erradas. Questões deixadas em branco e respostas rasuradas *não serão consideradas* no cálculo da nota.

Lembrete
Desigualdade de Hoeffding: Seja $(\eta_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. assumindo valores no intervalo $[a, b]$, com $a < b$. A desigualdade de Hoeffding diz que para todo $n \geq 1$ e para todo $\epsilon > 0$, nós temos

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k - \mathbb{E}(\eta)\right| > \epsilon\right) \leq 2\exp\left\{-2n\left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)^2\right\}.$$

Questões

1. Seja $\mathcal{X} = [0, 1]$ e para cada valor de $k = 0, 1, \ldots$ definimos a classe de funções

$$\mathcal{F}_k = \{f : \mathcal{X} \to \{0, 1\}, f(x) = \sum_{i=0}^{k}\mathbf{1}\{t_{2i} \leq \ x \ \leq t_{2i+1}\}, 0 \leq t_0 < ... < t_{2k+1} \leq 1\}.$$

   Diga para qual valor de k, a igualdade $VC(\mathcal{F}_k) = 4$ é verdadeira.

   a) $k = 1$
   b) $k = 2$
   c) $k = 3$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.

2. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço de probabilidades, tendo X distribuição uniforme no conjunto $[0, 1]$ e Y distribuição uniforme no conjunto $[-1, 1]$. Queremos modelar Y como uma função de X da forma $f(x) = w_0 + w_1x$. Diga que valores de w_0 e w_1 minimizam o risco quadrático médio de f, definido como $R(f) = \mathbb{E}\{[(Y - f(X)]2\}$.

   a) $w_0 = 0$ e $w_1 = 1$
   b) $w_0 = 0$ e $w_1 = 2$
   c) $w_0 = -1$ e $w_1 = 2$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.

3. Sejam X e ξ variáveis aleatórias assumindo valores reais e independentes entre si. Vamos assumir que a variaável X tenha média e variância finitas e que $\mathbb{E}(\xi) = 0$. Definimos $Y = 3 + 2X + \xi$. Queremos modelar Y na forma $Y = f(X)$, onde $f(x) = w_0 + w_1x$, para todo valor $xin\mathbb{R}$. Diga qual das opc cões abaixo indica corretamente os valores w_0 e w_1 que minimizam o risco quadrático médio $R(f) = \mathbb{E}\{[(Y - f(X)]2\}$.

   a) $w_0 = -3$ e $w_1 = 4$
   b) $w_0 = 0$ e $w_1 = -1$
   c) $w_0 = 3$ e $w_1 = 2$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.

4. Seja $\mathcal{X} = [0, 1]$ e seja $\mathcal{F}$ o conjunto de funções assim definidas

$$\mathcal{F} = \{f : \mathcal{X} \mapsto \{0, 1\}, f(x) = \prod_{i=0}^{k} 1\{t_i \leq x < t_{i+1}\}, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} \leq 1, k \geq 1\}.$$

   Diga qual das opc cões abaixo é correta

a) $VC(\mathcal{F}) = 1$
b) $VC(\mathcal{F}) = 2$
c) $VC(\mathcal{F}) = +\infty$
d) Nenhuma das respostas anteriores.

5. Seja X uma variável aleatória assumindo valores reais positivos e satisfazendo $\mathbb{P}\{X > t\} = e{-}t$, para todo $t > 0$ e seja Yuma variável aleatória assumindo valores no conjunto $\{0, 1\}$ e tal que para todo $x \in]0, +\infty[$ nós tenhamos
$$\mathbb{P}\{Y = 1 \,|\, X = x\} = \frac{1}{1 + e^{2x}}\,.$$
Diga qual das opções abaixo é correta
   a) $\mathbb{P}\{Y = 0 \,|\, X = x\} = \frac{1}{2}$
   b) $\mathbb{P}\{Y = 0 \,|\, X = x\} = \frac{1}{1+e^{2x}}$
   c) $\mathbb{P}\{Y = 0 \,|\, X = x\} = \frac{e^{2x}}{1+e^{-2x}}$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.

6. Seja X uma variável aleatória assumindo valores em $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, e Y uma variável aleatória assumindo valores em $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$. Queremos modelar Y como uma função probabilística de X da seguinte maneira
$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{1}{1 + \exp(-ys_w(x))}$$
onde $w = (w_0, ..., w_d) \in R^{d+1}$ e $s_w(x) = w_0 + \sum_{i=1}^{d} w_i x(i)$. Definimos o *risco teórico* $\mathcal{E}(w)$ associado ao vetor $w \in \mathbb{R}^{d+1}$ da seguinte maneira $\mathcal{E}(w) = \mathbb{E}[\log\left(1 + e^{-Ys_w(X)}\right)]$. Além disso, dada uma amostra $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$ de variáveis aleatórias independentes e com a mesma distribuicao que X, Y. definimos o *risco empírico* $\mathcal{E}_n(w)$ associado ao vetor $w \in \mathbb{R}^{d+1}$ da seguinte maneira
$$\mathcal{E}_n(w) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \log\left(1 + e^{-Y_m s_w(X_m)}\right)\,.$$
Vamos supor que para um determinado $w \in \mathbb{R}^{d+1}$, existam duas constantes $a < b$, tais que para qualquer valor de $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, valham as desigualdes $a \le \log(1 + \exp(-ys_w(x))) \le b$. Usando a desigualdade de Hoeffding diga qual das opções abaixo é correta para todo ϵ, :
   a) $\mathbb{P}\{|\mathcal{E}_n(w) - \mathcal{E}(w)| > \epsilon\} < 2\exp(-2n(\frac{\epsilon}{b-a})^2)$
   b) $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_n(w) - \mathcal{E}(w) > \epsilon\} < 2\exp(-2n\epsilon^2)$
   c) $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_n(w) - \log\left(1 + e^{-Y_m s_w(X_m)}\right) > \epsilon\} < 2\exp(-2n(\frac{\epsilon^2}{b-a}))$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.

7. Seja $\mathcal{X} = [0, +\infty[$, $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$, $X \in \mathcal{X}$ e $Y \in \mathcal{Y}$ duas variáveis aleatórias satisfazendo
$$\mathbb{P}(Y = 1|X = x) = \frac{1}{1 + e^{-w_0 - w_1 x}}$$
sendo w_0 e w_1 dois parâmetros. Para $x \in \mathcal{X}$ fixado diga qual das afirmações abaixo é verdadeira:
   a) $\lim_{w_1 \to +\infty} \mathbb{P}(Y = 1|X = x) = 1$
   b) $\lim_{w_1 \to +\infty} \mathbb{P}(Y = 1|X = x) = \frac{1}{2}$
   c) $\lim_{w_1 \to +\infty} \mathbb{P}(Y = 1|X = x) = 0$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.

8. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto finito de números reais e $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$. Sejam $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ variáveis aleatórias i.i.d. com $X_n \in \mathcal{X}$ e $Y_n \in \mathcal{Y}$. Para cada $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ definimos $\pi(x) = \mathbb{P}(X_n = x)$, $p(y|x) = \mathbb{P}(Y_n = y|X_n = x)$ e $N_n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}\{X_m = x, Y_m = y\}$. Usando essa notação diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:
   a) $\log \mathbb{P}(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, ..., X_n = x_n, Y_n = y_n) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} N_n(x, y)[\log \pi(x) + \log p(y|x)]$
   b) $\log \mathbb{P}(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, ..., X_n = x_n, Y_n = y_n) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} N_n(x, y)[\log \pi(x) \log p(y|x)]$
   c) $\log \mathbb{P}(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, ..., X_n = x_n, Y_n = y_n) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} N_n(x, y) \log(\frac{p(y|x)}{\pi(x)})$
   d) Nenhuma das respostas anteriores.