1a. Lista de Exercícios

MAC 6926 , MAE 0580

28 de agosto de 2017

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme em $\mathcal{X} = [0,1]$ e seja Y uma variável de classificação, assim definida: $Y = \mathbb{1}_{\{X \le p\}}$. Para cada valor $q \in [0,1]$ fixado, definimos $g : \mathcal{X} \longrightarrow \{0,1\}$, $g(x) = \mathbb{1}_{\{x \le q\}}$. Calcule $R(g) = \mathbb{P}[Y \neq g(X)]$.

2. Seja $g(x)$ definido como no exercício 1. Dada uma amostra

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.3, y_1 = 1 \\
x_2 &= 0.9, y_2 = 0 \\
x_3 &= 0.4, y_3 = 1 \\
x_4 &= 0.8, y_4 = 0 \\
x_5 &= 0.1, y_5 = 1
\end{aligned}
$$

. Calcule $R_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{g(x_i) \neq y_i\}}$, no caso em que $p = 0.7$ e $q = 0.4$.

3. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme em $\mathcal{X} = [0,1]$ e seja Y uma variável de classificação, assim definida: $Y = \mathbb{1}_{\{X \le p\}} Z$, onde Z é uma variable aleatoria com valores em $\{0,1\}$ e $P(Z = 1) = 1 - \epsilon, \epsilon \in [0,1], \epsilon < 1/2$. Tome $g : \mathcal{X} \longrightarrow \{0,1\}$, $g(x) = \mathbb{1}_{\{x \le q\}}$ para um $q \in [0,1]$ fixado. Calcule $R(g)$.

4. Seja $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. Verifique as seguintes igualdades

   i) $R_n(g) - R(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [\mathbb{1}_{\{g(X_i) \neq Y_i\}} - R(g)]$.
   ii) $\mathbb{E}[R_n(g)] = R(g)$.
   iii) $Var[R_n(g) - R(g)] = \frac{1}{n} R(g)(1 - R(g))$.

5. Usando a desigualdade de Chebyshev,

i) mostre que

$$\mathbb{P}(|R_n(g) - R(g)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}\,.$$

ii) Usando i) encontre $\bar{n}$ tal que

$$\mathbb{P}(|R_n(g) - R(g)| > 0.01) \leq 0.01$$

para todo $n \geq \bar{n}$.

6. Usando a desigualdade de Hoeffding, encontre $\bar{n}$ tal que

$$\mathbb{P}(|R_n(g) - R(g)| > 0.01) \leq 0.01$$

para todo $n \geq \bar{n}$.

7. Dadas duas variáveis aleatórias $X \in \mathcal{X} = [0,1]$ e $Y \in \{0,1\}$, definimos o classificador de Bayes

$$f^*(x) = \mathbb{1}_{\{\eta(x) \geq 1/2\}}\,,$$

onde $\eta(x) = \mathbb{P}(Y = 1|X = x)$.

i) Calcule f^* no caso em que $Y = \mathbb{1}_{\{X \leq p\}}$.

ii) Calcule f^* no caso em que

$$Y = \mathbb{1}_{\{X \leq p\}} Z\,,$$

onde Z é uma variável aleatória com valores em $\{0,1\}$ e

$$\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \epsilon\,,$$

com $0 < \epsilon < 1/2$.