Introdução à Análise Real

Rogério Augusto dos Santos Fajardo

9 de Novembro de 2017

Conteúdo

Introdução

O que são os números reais? O que significa uma função ser contínua? O que é limite de uma função ou de uma sequência?

Muitas perguntas como essas não são respondidas adequadamente nos cursos de matemática do ensino básico, e até mesmo no início do ensino superior. Mas as perguntas acima são particularmente negligenciadas. Não necessariamente por falha dos professores e autores de livros didáticos, mas porque de fato a complexidade das respostas vão muito além do que parece.

Enquanto os conceitos dos números naturais, inteiros e racionais são bem intuitivos e não muito difíceis de compreender de uma maneira razoavelmente segura, sem abrir muita margem para ambiguidades e interpretações equivocadas, a passagem dos números naturais para os números reais é bastante sutil. As definições de números reais que constam na maior parte dos materiais bibliográficos são circulares. Quando os livros falam da existência de números que não são racionais, já pressupõem a existência de um conjunto maior, e jamais explicam claramente que conjunto é esse. Na faculdade, quando em um curso de cálculo começa a se falar de limite, continuidade, derivada e integral, os problemas de imprecisão de linguagem aumentam ainda mais. As definições e argumentos se baseiam em uma noção vaga e não definida de "proximidade".

A disciplina de Análise Real é considerada um divisor de águas em qualquer curso de matemática – seja licenciatura, bacharelado ou matemática aplicada – pois é justamente o momento em que nos desprendemos desses conceitos vagos e imprecisos e começamos a aprender a enxergar a matemática e escrevê-la na maneira como os fazem os matemáticos profissionais. Em um curso de bacharelado, é imprescindível para que os alunos aprendam a escrever dissertações, teses e artigos acadêmicos. Em um curso de licenciatura, é imprescindível para que os futuros professores aprendam a usar a linguagem matemática da maneira correta.

O que é uma demonstração matemática?

Uma demonstração matemática é uma sequência finita de afirmações em que cada uma ou é um axioma (afirmação que assumimos como verdadeira) ou é uma consequência lógica das anteriores.

Essa definição não é precisa, e induz a vários questionamentos. Os dois principais: o que é uma afirmação matemática? Quando uma afirmação é uma consequência lógica de outra(s)?

Essas perguntas só são completamente respondidas em um curso de lógica. Na lógica matemática moderna (desenvolvida no início do século XX), estabelece-se uma linguagem simbólica com regras claras para determinar quando uma sequência de símbolos é uma *fórmula* (o equivalente a *frase*, na linguagem natural) e quando uma sequência de fórmulas é uma demonstração correta. Essas regras são totalmente livres de ambiguidades ou de interpretações intuitivas, de modo que é possível criar um programa de computador que identifica se uma demonstração está correta ou não.

No entanto, uma demonstração matemática completa no sentido da lógica costuma ser tão longa que se torna inviável para demonstrar qualquer resultado um pouco mais complexo. Dessa forma, o conceito lógico de demonstração matemática tem importância teórica e serve como referência para os matemáticos saberem que argumento é aceitável ou não. Mas as demonstrações matemáticas que encontramos em livros e artigos – com exceção do *Principia Mathematica* (vide [8]) – não são feitas baseadas estritamente em um sistema formal. Tem-se, sim, como princípio, que uma demonstração matemática correta é aquela que pode ser formalizada em um sistema lógico, desde que você tenha tempo suficiente para fazê-lo, mas isso é ainda uma ideia intuitiva.

Então, como o conceito de demonstração matemática, usada na prática, é subjetivo e varia de disciplina a disciplina, o que tentarei responder aqui é a seguinte pergunta: *o que é uma demonstração matemática correta em um curso de análise real?*. Em outras palavras, tentarei aqui, à medida do possível, responder à pergunta mais comum que ocorre na disciplina de Análise Real e em outras em que se exige demonstrações razoavelmente rigorosas: *quais argumentos são permitidos em uma demonstração?*. Começamos, então, com uma lista do que **podemos assumir** em uma demonstração no curso de análise real.

1. **Deduções lógicas**. As demonstrações cobradas em análise usam a lin-

guagem natural, de forma que os argumentos lógicos usuais são aceitos, desde que feitos corretamente. Por exemplo: se $x+0=x$, para todo x, então, em particular, $0+0=0$; se provamos A e provamos que A implica B, então podemos concluir que vale B; se provamos que A implica B e que B implica C, então podemos concluir que A implica C. Esse tipo de argumento pode ser utilizado sem justificar, mas com cuidado para não cometer falsas inferências (exemplo de inferência **incorreta**: provamos que A implica B e provamos que A é falso, então concluímos que B é falso). Um pouco de conhecimento de lógica proposicional pode ser útil para evitar esses erros e usar melhor os argumentos lógicos.

2. **A interpretação usual do símbolo da igualdade**. Assumimos que a igualdade é um símbolo lógico e que as propriedades inerentes a ela não precisam ser provadas. Por exemplo: se $a=b$ então $b=a$; se $a=b$ e $b=c$ então $a=c$; se $a=b$ então $a+c=b+c$.

3. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Não sendo este um curso de teoria dos conjuntos, não precisamos definir e provar fatos básicos sobre teoria dos conjuntos. Por exemplo: podemos assumir a existência de pares ordenados, produto cartesiano e de outros conjuntos, sem provar. Todavia, o uso da notação conjuntística deve ser feito com cautela. O capítulo 1 descreve o que podemos assumir de teoria dos conjuntos e estabelece uma notação padrão. Prestem atenção nesse capítulo.

4. **Princípio da indução finita e princípio da boa ordem**. Esses dois princípios, que são propriedades inerentes dos números naturais provadas em cursos de álgebra e teoria dos conjuntos, podem ser usadas sem provar.

5. **Argumentos já utilizados com frequência**. À medida que os resultados vão avançando e ficando mais complexos, fica inviável escrever todos os detalhes de uma prova. Então, em provas e listas de exercícios, sempre surge a seguinte pergunta: *o que podemos assumir do que já foi provado em aula ou em listas de exercícios?*. É difícil responder a essa pergunta de maneira precisa, pois deve prevalecer o bom senso. É razoável assumirmos tudo que foi provado anteriormente ao que está sendo provado no momento. Também é razoável que argumentos muito parecidos com outros utilizados exaustivamente não precisam ser repetidos. Aí entra expressões do tipo “é óbvio que”, “claramente vale”,

etc. Essas expressões não podem ser usadas quando uma afirmação que fazemos *parece* verdadeira mas não conseguimos prová-la com detalhes. Essas expressões devem ser usadas quando fazemos o mesmo argumento várias vezes e assumimos que o leitor já esteja familiarizado com ele (ou, no caso do(a) aluno(a) tendo seu conhecimento testado, se o(a) professor(a) já se convenceu que o(a) aluno(a) de fato aprendeu aquilo que está afirmando ser óbvio, e que, se pedir detalhes, ele(a) poderá completar os detalhes sem titubear).

Portanto, em provas e listas de exercícios, a menos que seja explicitado se pode ou não usar algum resultado, pode utilizar tudo que foi provado em sala e em exercícios **anteriores** (mesmo que esse não tenha sido resolvido). No caso do exercício pedir explicitamente algo já provado nas aulas ou na apostila, o(a) aluno(a) poderá usar os resultados **anteriores** a esse (novamente, salvo instrução contrária, permitindo ou proibindo o uso de algum resultado). Detalhes poderão ser omitidos, contanto que sejam visivelmente mais fáceis do que os que estão sendo apresentados, e que argumentos semelhantes já tenham sido utilizados em listas ou provas anteriores.

Agora vem a pergunta: *o que **não** podemos assumir em uma demonstração no curso de análise*? Essencialmente, tudo que envolve qualquer interpretação intuitiva ou geométrica dos símbolos específicos da linguagem (as operações $+$ e $\cdot$ e a relação $<$) e os símbolos e expressões que definimos a partir desses (módulo, elemento oposto, elemento inverso, as constantes 0 e 1, limite, etc.). Ou seja, para efeito de demonstração, as operações de $+$ e $\cdot$ são vistas apenas como funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, e a relação $<$ como uma relação em $\mathbb{R}^2$, sem quaisquer significados intuitivos ou geométricos. Da mesma forma para os outros conceitos definidos a partir desses. Uma demonstração deve se apoiar estritamente nos axiomas e nas definições, e jamais depender de alguma interpretação intuitiva desses símbolos e termos.

Isso não significa que a intuição e a visão geométrica sejam inúteis em um curso de análise. Muito pelo contrário, a intuição é uma ferramenta indispensável para *encontrarmos* a demonstração, e argumentos intuitivos podem ser apresentados (especialmente em um livro didático ou numa aula) para *ilustrar a ideia* da demonstração. Apenas não pode ser utilizada como *parte indispensável* da demonstração. Ou seja, a prova do resultado não pode depender de afirmações que fizemos baseadas somente em argumentos intuitivos. Fazendo uma analogia, é como um detetive que investiga um crime: pela intuição ele pode descobrir que um suspeito está mentindo ou escondendo alguma coisa, e isso pode guiá-lo às pistas certas na investigação. Mas perante o juiz precisa apresentar provas, e não opiniões baseadas em intuição, para conseguir a condenação do réu.

Quais são as diferenças entre axioma, definição e teorema?

Um *axioma* é uma proposição matemática que assumimos ser verdadeira, sem precisar provar.

Antigamente definia-se axioma como *uma verdade evidente em si mesma*. Dessa forma Euclides aparentemente resolvia o problema de regressão infinita nas demonstrações de geometria, ao estabelecer algumas proposições que, de tão óbvias, dispensavam demonstração. Havia ainda a distinção entre axiomas – que tratavam sobre as relações entre grandezas. em geral – e os postulados – que tratavam especificamente da geometria.

Na matemática moderna, no entanto, não se usa mais o conceito de "verdade evidente em si mesma". Axioma passou a significar algo que apenas assumimos como verdadeiro em uma teoria, sem precisar entrar em juízo sobre o que significa ser verdadeiro e sem pressupor que existe alguma noção aboluta de verdade.

Uma definição introduz um novo símbolo ou termo a partir dos já existentes. Pode ser visto como uma simples *abreviatura* da linguagem, pois sempre podemos reescrever as frases matemáticas usando apenas os símbolos e termos ditos primitivos. Portanto, as definições formalmente não estendem a teoria, nem aumentam sua expressividade, mas ajudam a tornar as proposições mais curtas e compreeensíveis.

Como acontece com os axiomas, as definições não precisam ser provadas. Porém, a supressão de um axioma geralmente afeta toda a teoria, enquanto uma definição, como já foi dito, apenas simplifica a linguagem e a notação.

Os teoremas, por outro lado, são as proposições matemáticas que provamos a partir dos axiomas (e das definições). Tecnicamente, tudo que provamos em uma teoria é chamado de teorema, mas costumamos usar algumas palavras para diferenciar os teoremas devido ao seu grau de importância e papel no desenvolvimento de uma teoria. Assim, reservamos a palavra *teorema* apenas para os resultados mais importantes. Costuma-se chamar de *lemas* aqueles resultados que provamos como passo intermediário para provar um teorema. Temos ainda os *corolários*, que são teoremas que seguem imediata ou facilmente de outro teorema.

A diferença entre axioma, definição e teorema depende do contexto, porque uma mesma teoria pode ser formalizada de diferentes maneiras, trocando esses conceitos. Por exemplo, aqui neste livro introduzimos o símbolo de desigualdade $<$ como um símbolo primitivo, e estabelecemos *axiomas* sobre essa relação. A partir daí *definimos* o que significa um número ser positivo. Outros livros, como [4], fazem o contrário: axiomatizam o que significa um número real ser positivo e a partir daí definem a desigualdade.

Teoremas e definições também frequentemente permutam de acordo com a formalização que o autor escolhe. Um exemplo clássico em que isso ocorre é na geometria vetorial no espaço. Alguns livros definem que uma tripla de vetores no espaço é linearmente independente se não estão contidos em um mesmo plano, e provam como teorema que uma tripla é linearmente independente se, e somente se, a única combinação linear entre eles que resulta no vetor nulo é tomando todos os coeficientes iguais a zero. Outros livros fazem o contrário: definem uma tripla de vetores como linearmente independente se a única combinação linear que resulta no vetor nulo é a trivial, e provam que isso é equivalente aos vetores não serem complanares.

Também podemos introduzir uma teoria axiomática através de uma definição, como fazemos quando definimos *corpo ordenado completo* a partir de axiomas. Isso ocorre porque, na verdade, não estamos axiomatizando diretamente os números reais, mas o fazemos dentro do universo da teoria dos conjuntos (explicar isso em mais detalhes apenas dá para fazer em um curso de lógica ou teoria dos conjuntos).

O importante, no entanto, é identificar, pelo contexto que o curso segue, o que precisa ser provado e o que está sendo assumido como verdadeiro (seja por ser um axioma ou uma definição, ou por ser um teorema já provado anteriormente).

Por que axiomatizar?

Podemos nos perguntar qual é a vantagem da abordagem axiomática. Por que não construímos um conjunto específico que chamamos de conjunto dos números reais e não provamos tudo que precisamos diretamente para esse conjunto? Ou, por que não usamos simplesmente a representação decimal, como “todo mundo” faz?

Por mais que axiomatizar uma teoria pareça muito complicado, ao fazer isso temos mais controle sobre o nosso objeto de estudo, pois separamos quais são as propriedades fundamentais desse objeto e deduzimos as demais. Dessa forma, não precisamos nos preocupar com a estrutura do objeto que estamos trabalhando (no caso, o conjunto dos números reais), e também evitamos incorrer em erros de argumentação provenientes de definições imprecisas.

Portanto já são duas vantagens práticas de provar teoremas axiomaticamente: melhor organização do raciocínio (sem se perder com excesso de detalhes de uma definição “concreta” de números reais) e menor risco de chegarmos a conclusões erradas (pois passamos a não depender da intuição, que, como já foi dito, apesar de útil é bastante capciosa quando dependemos apenas dela).

Uma outra vantagem é que demonstrações axiomáticas podem ser aproveitadas em outras estruturas matemáticas que utilizam alguns axiomas em comum, facilitando muitas vezes nosso trabalho e ajudando a entender teorias mais complexas utilizando argumentos já provados em teorias mais simples.

Por que construir?

A outra pergunta que surge naturalmente é: se axiomatizamos os números reais, por que, então, construi-los? Os estudantes perceberão que, no capítulo 4, fazemos a construção do conjunto dos números reais mas em nenhum outro momento a utilizamos, porque todas as demonstrações são axiomáticas. Por que, portanto, precisamos fazer a construção?

A questão fundamental é sobre a *consistência* da teoria. Isto é, precisamos provar que os axiomas que estamos assumindo *não nos levem a uma contradição*, e, para provar isso, precisamos mostrar que existe um *modelo* para esses axiomas. Assim, ao provarmos que existe um corpo ordenado completo, estamos mostrando que os axiomas de corpo ordenado completo não conduzem a uma contradição, pois existe um objeto matemático que satisfaz tais axiomas.

Entretanto, a questão aí é mais complicada. Para construirmos os números reais, utilizamos os números racionais, além de operações conjuntísticas. Como sabemos que existe o conjunto dos números racionais? A construção dos números racionais a partir dos números inteiros, e a dos números inteiros a partir dos números naturais, são feitas na disciplina de álgebra.

Na disciplina de teoria dos conjuntos vemos como definir o conjunto dos números naturais – bem como formalizar os conceitos conjuntísticos usados nas outras construções (como par ordenado, produto cartesiano e relação de equivalência) – a partir dos axiomas de teoria dos conjuntos (sistema ZFC). Portanto, todas essas estruturas matemáticas – e praticamente toda a matemática que conhecemos – baseia-se apenas na consistência (não contradição) dos axiomas de ZFC.

E como provamos a consistência de ZFC? Não provamos. Devido ao segundo teorema de incompletude de Gödel, uma teoria matemática (atendendo a algumas hipóteses minimamente desejáveis para uma teoria axiomática) não pode provar sua própria consistência, a menos que ela seja inconsistente. Ou seja, se uma teoria é consistente (livre de contradições) a afirmação sobre sua própria consistência é uma sentença indecidível da teoria, que não pode ser provada nem verdadeira nem falsa.

Dessa forma, temos um problema de regressão infinita: para provar a consistência de um sistema formal precisamos assumir a consistência de um outro sistema. Precisamos, portanto, em algum momento assumir a consistência de um sistema sem provar sua consistência. Normalmente, o sistema formal adotado para formalizar a matemática é o sistema ZFC (ou ZF, que é o sistema de Zermelo-Frankel sem o axioma da escolha, e cuja consistência implica a de ZFC).

Capítulo 1

Conjuntos, relações e funções

Neste capítulo introduzimos, de maneira informal, alguns conceitos relacionados à teoria dos conjuntos. Para uma abordagem mais completa e rigorosa recomendamos [3], [6] ou [9].

1.1 Noções de conjuntos

Se procurarmos no dicionário [1] a definição de "conjunto" encontraremos explicações como "reunião das partes que formam um todo" ou "qualquer coleção de seres matemáticos". Outras tentativas de definição de forma direta serão tão boas e inúteis quanto essas: serão incompreensíveis para quem já não tinha uma concepção prévia do que é um conjunto, e utilizarão palavras praticamente sinônimas a conjuntos (reunião, coleção, agrupamento). O leitor mais perspicaz e que está cumprindo sua promessa de devorar estas notas detalhadamente poderá dizer: "Uma definição como essas é circular, assim como as demonstrações circulares que os estudantes inexperientes às vezes fazem". De fato, os matemáticos desistiram de definições diretas – tais como aquelas que os dicionários fazem – para conceitos elementares (chamados "conceitos primitivos"), pois perceberam que tal tipo de definição sempre cai em circularidade. Por isso a abordagem axiomática é a que prevalece na matemática moderna. Porém, não é o propósito desta disciplina fazer uma axiomática da teoria dos conjuntos. Então nos limitaremos a discutir um pouco mais o conceito intuitivo e fixar algumas notações.

[1] No caso, consultei um Dicionário Aurélio de 1994.

Um conjunto é formado por objetos matemáticos. Se x é um objeto matemático que faz parte de um conjunto y, dizemos que x *pertence* a y, ou que x *elemento* de y. Usamos a notação $\in$ para pertence. Por exemplo, 0 é um número natural. Ou seja, 0 *pertence* ao conjunto dos números naturais. Escrevemos $0 \in \mathbb{N}$.

Propositalmente evitamos a notação costumeira de usar letras minúsculas para "elementos" e letras maiúsculas para conjuntos. Isso porque – ao contrário do que acontece na geometria, em que temos uma distinção do que é ponto e do que é reta – não há na teoria dos conjuntos essa distinção entre elementos e conjuntos. Um conjunto é formado por qualquer tipo de objeto matemático. Em particular, pode ser conjunto. Ou seja, *um elemento de um conjunto pode ser, ele próprio, conjunto.* Veremos exemplos de conjuntos de conjuntos mais à frente. Na verdade, veremos na disciplina de Teoria dos Conjuntos, que na matemática *tudo é conjunto.* Então, ao contrário do que diz um mito do ensino básico, *o símbolo $\in$ pode ser usado entre dois conjuntos.*

Usamos $\notin$ como símbolo para "não pertence".

Há basicamente três tipos de notações matemáticas para representar conjuntos, todas elas usando os símbolos $\{$ e $\}$ (chaves).

Notação 1: descrever todos os elementos entre as chaves, separando-os por vírgulas. Exemplo: o conjunto $\{0, 1, 3, 4\}$ tem como elementos os números naturais 0, 1, 3 e 4. Ou seja, podemos escrever $0 \in \{0, 1, 3, 4\}$, $1 \in \{0, 1, 3, 4\}$ e assim por diante.

Com essa notação podemos explicar através de exemplos como os elementos de conjuntos podem, eles próprios serem conjuntos. Compare os conjuntos $\{0\}$ e $\{\{0\}\}$. Ambos têm apenas um elemento. O elemento do primeiro é o 0, e do segundo é o $\{0\}$. Ou seja, podemos escrever $0 \in \{0\}$, mas **não** $\{0\} \in \{0\}$. Por outro lado, é verdade que $\{0\} \in \{\{0\}\}$, mas **não** é verdade que $0 \in \{\{0\}\}$. Se considerarmos o conjunto $\{0, \{0\}\}$, formado por dois elementos – a saber, 0 e $\{0\}$ – então podemos escrever tanto $0 \in \{0, \{0\}\}$ quanto $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$.

Notação 2: escrever uma propriedade matemática que caracteriza os elementos. Essa é a concepção de conjuntos elaborada pelo matemático alemão Gottlob Frege. Um conjunto estaria diretamente relacionado a uma fórmula que descreve seus elementos, como "*o conjunto dos números naturais* *que são divisíveis por 2*” para designar o conjunto dos números pares.

Na notação matemática, escrevemos da seguinte forma: entre chaves, escrevemos primeiro a variável usada para representar os elementos, escrevemos dois pontos ou um traço vertical (significando “tal que”) e em seguida escrevemos a propriedade matemática que caracteriza os elementos desse conjunto. Ou seja, escrevemos

$$\{x : P(x)\}$$

ou

$$\{x|P(x)\},$$

onde $P(x)$ é uma fórmula referente à variável x. Exemplo:

$$\{x : \text{ existe } n \text{ natural tal que } \ x = 2n\}$$

Essa forma de definir conjunto gerou inconsistência na teoria de conjuntos de Frege, pois permite a construção do *conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo* (isto é, $\{x : x \notin x\}$). Chame de X esse conjunto. Pergunta: X pertence a si mesmo? Se $X \in X$, então X não satisfaz a condição de ser elemento de X e, portanto, $X \notin X$. Se $X \notin X$, então por definição de X temos que X é um elemento de si próprio, isto é $X \in X$. Chegamos numa inevitável contradição. Esse argumento, criado pelo matemático inglês Bertrand Russell, é conhecido como *paradoxo de Russell*.

Uma das maneiras de corrigir esse paradoxo é pré-fixando um conjunto do qual *separamos* aqueles elementos com a propriedade desejada. Escrevemos genericamente da seguinte forma:

$$\{x \in y : P(x)\}$$

ou

$$\{x \in y|P(x)\}.$$

Leia-se “o conjunto dos x pertencentes a y tais que $P(x)$ é verdadeira.” No exemplo dos números pares, podemos escrever

$$\{x \in \mathbb{N} : \text{ existe } n \text{ natural tal que } \ x = 2n\}$$

Ou, mudando a variável x para n (como costumamos fazer quando trata-se de um número natural) e introduzindo símbolos lógicos ($\exists$ para “existe” e $\wedge$ para “e”)

$$\{n \in \mathbb{N} : \exists m((m \in \mathbb{N}) \wedge (n = 2m))\}$$

Também usamos uma notação abreviada da seguinte forma:

$$\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}(n = 2m))\}$$

Leia-se: "o conjunto dos n pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que existe m pertencente a $\mathbb{N}$ tal que $n = 2m$".

Na axiomática de Zermelo e Frankel para a teoria dos conjuntos, chama-se *axioma da separação* aquele que para cada conjunto y e cada fórmula $P(x)$ garante a existência do conjunto $\{x \in y : P(x)\}$. Esse axioma evita que o paradoxo de Russell leve o sistema a uma contradição, mas, em vez disso, de tal paradoxo apenas segue que "não existe conjunto de todos os conjuntos" (o porquê deixamos como exercício).

Na teoria axiomática precisamos justificar, através dos axiomas, a existência de cada conjunto que apresentamos. Como já dissemos não ser esse o propósito da disciplina de análise real, trabalharemos com a chamada *teoria ingênua* (ou *intuitiva*) dos conjuntos, e não faremos a construção (isto é, justificativa da existência a partir dos axiomas) de cada conjunto que definirmos.

Notação 3: escrever os elementos em função de uma ou mais variáveis. Essa forma de escrita é semelhante à anterior e também muito utilizada, mas convém chamar a atenção às suas diferenças.

Lembremo-nos da diferença entre oração e sujeito (e objeto), na língua portuguesa, e de seus correspondentes na matemática. Uma oração precisa possuir um verbo, o sujeito e o objeto, não. Uma oração é uma afirmação, passível a ser julgada como verdadeira ou falsa, enquanto o sujeito e o objeto correspondem a seres do universo. Na matemática, o correspondente às orações são as *fórmulas*, e o correspondente aos sujeitos e objetos são os *termos*.

Aprendemos um "verbo" novo na matemática: $\in$. A expressão $x \in y$ é uma fórmula, passível a ser julgada como verdadeira ou falsa, uma vez que conhecemos quem é x e quem é y. Já a expressão $x^2 + y^2$ é um termo. Se atribuirmos valores a x e a y obtemos um número, não uma fórmula que podemos julgar como verdadeira ou falsa.

Assim, se $T(x)$ é um termo dependente da variável x e se $P(x)$ é uma fórmula dependendo da variável x podemos definir o conjunto

$$\{y : \exists x(y = T(x) \text{ e } P(x))\},$$

que escreveremos como

$$\{T(x) : P(x)\}$$

Olhando assim parece um pouco estranho, mas vejamos como isso funciona num exemplo. Escrevemos

$$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

para o conjunto de todos os quadrados perfeitos, em vez de escrevermos, na maneira mais extensa,

$$\{m \in \mathbb{N} : \exists n(m = n^2 \text{ e } n \in \mathbb{N})\}.$$

Ou seja, n^2 corresponde ao termo $T(x)$ (ou, no caso, $T(n)$), e $n \in \mathbb{N}$ a $P(n)$. Usamos muito esse tipo de notação para representar imagem de função.

Eventualmente podemos ter mais variáveis, como no exemplo:

$$\{x + y : x^2 + y^2 = 1\}$$

De modo geral podemos escrever

$$\{T(x_1, \ldots, x_n) : P(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Assim como no axioma da separação, aqui também é necessário que as variáveis estejam limitadas a um conjunto. Por exemplo:

$$\{x + y : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 + y^2 = 1)\}$$

Um abuso de notação comum é esscrevermos $x, y \in \mathbb{R}$ em vez de $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Mas usualmente apenas omitimos esse conjunto $\mathbb{R}$ quando está claro no contexto. Mais uma vez deve prevalecer o bom senso, no lugar de regras estritas.

Inclusão de conjuntos.

Dizemos que um conjunto x *está contido* em um conjunto y se todo elemento de x também é elemento de y. Isto é, se vale a implicação

$$(z \in x) \to (z \in y),$$

para todo z. Escrevemos $x \subset y$ se x está contido em y.

Este é um ponto delicado. Muitos estudantes secundaristas – por vezes, ou quase sempre, instigados pelos professores – tendem a decorar um "macete" em vez de compreender a definição acima. O tal "macete" equivocado é: "o símbolo $\in$ só é usado entre elemento e conjunto, nunca entre dois conjuntos; o símbolo $\subset$ só é usado entre dois conjuntos."

Ora, já vimos exemplos de que podemos usar $\in$ entre dois conjuntos. A segunda parte do "macete" é verdadeira: só se usa $\subset$ entre dois conjuntos. Mas, na realidade, também só se usa $\in$ entre dois conjuntos, já que, na teoria dos conjuntos, tudo é conjunto.

Considere, como exemplo, x o conjunto $\{0\}$ e y o conjunto $\{\{0\}\}$. Já vimos que $x \in y$ (e são ambos conjuntos!). Mas será que podemos afirmar que $x \subset y$? Vejamos. Temos que verificar se todo elemento de x também é elemento de y. O conjunto x só tem um elemento: 0. Ele pertence a y? Vimos que não. O número 0 é um *elemento de um elemento* de $\{\{0\}\}$, mas não é ele próprio um elemento desse. Logo, **não** é verdade que $x \subset y$.

Mas pode um conjunto ao mesmo tempo pertencer e estar contido em algum outro? Sim. Veja, por exemplo, que $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$ e também $\{0\} \subset \{0, \{0\}\}$.

Quando x está contido em y, também dizemos que x é um *subconjunto* de y.

Igualdade entre conjuntos

Um conjunto é caracterizado pelos seus elementos. Tal propriedade é formalizada no sistema de Zermelo e Frankel pelo *axioma da extensão*, que diz o seguinte:

> Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.

Usando o símbolo da inclusão, podemos escrever a frase acima na linguagem matemática como

$$(x = y) \leftrightarrow (x \subset y \wedge y \subset x)$$

para todos conjuntos x e y.

Uma das consequências desse axioma é o seguinte ditado (esse é correto): *em um conjunto não importa a ordem dos elementos nem contamos repetições.*

Por exemplo, os conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{2, 1, 4, 5, 3\}$ são iguais – isto é, são duas representações diferentes para o mesmo conjunto – e também são iguais a $\{1, 2, 1, 4, 3, 5, 2\}$ e a $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 5\}$.

Vazio, partes, união e intersecção

Há um conjunto especial que não tem elemento algum: o conjunto vazio. Sim, podemos dizer “o” conjunto vazio porque, pelo axioma da extensão, se ele existe, é único (não existem dois conjuntos vazios diferentes). E a existência é garantida pelo *axioma do vazio*. Sendo ele único, podemos introduzir, sem risco de ambiguidade, um símbolo específico para o conjunto vazio, que é $\emptyset$.

Note que $\emptyset \subset x$, para todo conjunto x. De fato, todo elemento de $\emptyset$ pertence a x. “Como podemos dizer isso se $\emptyset$ não tem elemento?”, perguntaria o leitor. Bom, se $\emptyset$ não estivesse contido em x, haveria um y pertencente a $\emptyset$ que não pertence a x. Mas isso é impossível, pois não existe y pertencente a $\emptyset$. Logo, $\emptyset \subset x$, pelo que chamamos de *argumento de vacuidade*.

Chamamos de *conjunto das partes* de x – e denotamos por $\mathcal{P}(x)$ – o conjunto dos subconjuntos de x. Isto é,

$$\mathcal{P}(x) = \{y : y \subset x\}$$

Observe que estamos usando aquela “versão de Frege”, do axioma da separação, que pode gerar contradição. Há uma axioma específico – o axioma das partes – que garante a existência do conjunto das partes.

Exercício: verifique que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

A *união* de dois conjuntos A e B – denotada por $A \cup B$ – é o conjunto de todos os objetos que pertencem a A ou a B. Isto é, $x \in A \cup B$ se, se somente se, $x \in A$ **ou** $x \in B$. Já a *intersecção* de A e B – denotada por $A \cap B$ é o conjunto de todos os objetos que pertencem simultaneamente a A e a B. Isto é, $x \in A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ **e** $x \in B$.

Observe que a união está relacionada ao operador lógico **ou**, enquanto a interseção está relacionada ao operador lógico **e**. Por isso a semelhança do símbolo $\cup$ (união) com $\vee$ (o símbolo lógico usado para “ou”), e do símbolo $\cap$ (intersecção) com $\wedge$ (o símbolo lógico usado para “e”).

Exemplos: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, e $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

Se X é um conjunto de conjuntos – também usualmente chamado de *família de conjuntos* – chamamos de *união de X* – denotada por $\bigcup X$ – o conjunto de todos os objetos que pertencem a **algum** elemento de X. Isto é, $x \in \bigcup X$ se, e somente se, existe $y \in X$ tal que $x \in y$.

A *intersecção de X* – denotada por $\bigcap X$ – é o conjunto de todos os objetos que pertencem simultaneamente a **todos** os elementos de X. Isto é, $x \in \bigcap X$ se, e somente se, para todo $y \in X$ temos $x \in y$.

Por exemplo, se $X = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$, temos que $\bigcup X = \{1,2,3,4\}$ e $\bigcap X = \{1\}$.

Não existe intersecção do conjunto vazio, pois, pelo argumento de vacuidade, isso daria o conjunto de todos os conjuntos, o que já vimos, pelo paradoxo de Russell, que não existe. Não há qualquer outra restrição para união ou intersecção de uma família de conjuntos.

Observe que $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Assim como a união de dois conjuntos está relacionada a "ou" e a intersecção de dois conjuntos a "e", a união de família corresponde ao quantificador existencial $\exists$ (existe), e a intersecção de família corresponde ao quantificador universal $\forall$ (para todo).

Por último, introduzimos a notação de *subtração de conjuntos*. Denotamos por $A \smallsetminus B$ o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Isto é,

$$A \smallsetminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

1.2 Produto cartesiano

Vimos que em um conjunto a ordem dos elementos não importa. Às vezes precisamos considerar a ordem dos objetos, e para isso introduzimos a noção de *pares ordenados*. Dados dois objetos matemáticos a e b, denotamos por (a,b) o *par ordenado* [2] cuja primeira coordenada é a e segunda coordenada é b. A propriedade principal que caracteriza os pares ordenados é a seguinte:

$$(a,b) = (c,d) \text{ se, e somente se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Ou seja, nos pares ordenados, a ordem dos elementos importa. Por exemplo, temos $\{1,2\} = \{2,1\}$, mas $(1,2) \neq (2,1)$.

Podemos analogamente definir uma *tripla ordenada* (a,b,c). De modo geral, uma *n-upla ordenada* – onde n é um número natural maior do que 1 – é uma sequência $(a_1,\ldots,a_n)$, e esta só será igual a uma outra n-upla ordenada $(b_1,\ldots,b_n)$ se tivermos $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, e assim por diante.

Sejam A e B dois conjuntos. Definimos o *produto cartesiano de A e B* o conjunto de todos os pares ordenados (a,b) tais que a é um elemento de A e

[2] Na teoria dos conjuntos até os pares ordenados são conjuntos. Embora não faça parte da presente disciplina construir todos os objetos como conjuntos, fica a título de curiosidade a definição de (a,b) como $\{\{a\},\{a,b\}\}$. A quem se interessar, fica como exercício provar a propriedade dos pares ordenados de acordo com essa definição.

b um elemento de B. Na notação matemática:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Quando $A = B$, usualmente escrevemos A^2 no lugar de $A \times A$. Da mesma forma, denotamos por A^n o conjunto de todas as n-uplas ordenadas em que todas as coordenadas pertencem a A.

Uma *relação* entre os conjuntos A e B (ou *relação binária em* A, caso tenhamos $A = B$) é qualquer subconjunto de $A \times B$. Se $R \subset A \times B$ é uma relação, escrevemos, eventualmente, aRb como abreviatura de $(a, b) \in R$.

Por exemplo, a relação de desigualdade $\leq$ em $\mathbb{N}$ pode ser vista como o conjunto de todos os pares ordenados (n, m) em $\mathbb{N}^2$ tais que n é menor ou igual a m. Mas quando queremos dizer que 1 é menor ou igual a 2, escrevemos simplesmente $1 \leq 2$, em vez de $(1, 2) \in \leq$.

Uma *relação n-ária* em A é qualquer subconjunto de A^n. Definimos A^1 como A, de modo que uma relação unária (ou 1-ária) é qualquer subconjunto de A. Por exemplo, "ser número primo" pode ser considerado uma relação unária em $\mathbb{N}$, identificada pelo conjunto dos números primos.

1.3 Funções

Uma *função* é uma relação f tal que, se (x, y) e (x, z) são ambos elementos de f, então $y = z$.

Definimos o *domínio* de uma função f como o conjunto

$$\{x : \exists y (x, y) \in f\}$$

e a *imagem* de f é o conjunto

$$\{y : \exists x (x, y) \in f\}$$

.

Uma *função de A em B* é uma função cujo domínio é A e cuja imagem *está contida* em B. Observe que, a partir da definição de função como conjunto de pares ordenados, não é possível determinar o *contradomínio* de uma função. Qualquer conjunto que contém a imagem pode ser considerada um contradomínio da função. Por exemplo, a função $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ pode tanto ser considerada uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$.

Observe, pelas definições acima, que, se f é uma função de A em B, para cada x pertencente a A existe um único y pertencente a B tal que $(x, y) \in f$. Por esse motivo, para cada x pertencente ao domínio de f podemos introduzir a notação $f(x)$ para o único y tal que $(x, y) \in f$.

Notação: se escrevemos $f : A \longrightarrow B$, estamos dizendo, implicitamente, que f é uma função de A em B.

Uma *operação binária* em um conjunto A é uma função de A^2 em A. No lugar de $f((x, y))$ escrevemos simplesmente $f(x, y)$ (exercício: por que, de acordo com a nossa notação até agora, seria $f((x, y))$?).

Uma *operação n-ária* em A é qualquer função de A^n em A. Novamente, omitimos os duplos parênteses que surgiriam se aplicássemos a notação rigorosamente.

Função injetora. Dizemos que uma função f é *injetora* quando, para todos x, y pertencentes ao domínio de f, se $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$, com domínio $\mathbb{R}$, *não* é injetora, pois se tomarmos $x = 2$ e $y = -2$, temos $x \neq y$ mas $x^2 = y^2$, pois ambos são iguais a 4.

Função sobrejetora. Dizemos que uma função f é *sobrejetora* em relação a um conjunto B se a imagem de f é B. Ou seja, se para todo $y \in B$ existe algum x pertencente ao domínio da f tal que $f(x) = y$. Quando está claro no contexto quem estamos considerando como contradomínio, podemos omitir a menção ao conjunto B. Por exemplo, se escrevemos que uma determinada função de A em B é sobrejetora, significa *sobrejetora em relação a B*. Do mesmo modo, se dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora, significa ser sobrejetora em relação a B.

Função bijetora. Dizemos que uma função f é *bijetora* em relação a um conjunto B se f é injetora e é sobrejetora em relação a B. Valem as mesmas observações anteriores para omitirmos, quando possível, a menção ao contradomínio B.

Note que toda função é sobrejetora em relação à sua imagem, assim como toda função injetora é bijetora em relação à sua imagem.

Uma função bijetora também é chamada de *bijeção*.

Inversa de função. Se R é uma relação binária, definimos a *inversa* de R – que denotaremos por R^{-1} – o conjunto $\{(y,x) : (x,y) \in R\}$.

Dizemos que uma função f é *inversível* se sua inversa (como relação) é uma função. Dizemos que f é *inversível em relação a B* se ela é inversível e se o domínio da inversa é B. Quando especificamos um contradomínio, ser inversível passa a significar ser inversível em relação a esse contradomínio. Por exemplo, se dizemos que uma função f de A em B (ou uma função $f : A \longrightarrow B$) é inversível, queremos dizer inversível em relação a B.

Exercício 1.1. *Prove que uma função f é inversível em relação a B se, e somente se, ela é bijetora em relação a B.*

Composição de funções. Antes de definirmos composição de funções, façamos um exercício.

Exercício 1.2. *Sejam f e g duas funções, e suponha que a imagem de g está contida no domínio da f. Mostre que o conjunto*

$$\{(x,z) : \exists y((x,y) \in g \wedge (y,z) \in f)\}$$

é uma função.

A função definida no exercício acima é chamada de *composição de f e g*, e é denotada por $f \circ g$. Verifique que, para todo x pertencente ao domínio da g, temos

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Pela condição do exercício, observe que se g é uma função de A em B, e f é uma função de B em C, então $f \circ g$ existe e é uma função de A em C.

Exercício 1.3. *Sejam $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$ funções. Prove que:*

(a) *Se f e g são injetoras, então $f \circ g$ é injetora.*

(b) *Se f e g são sobrejetoras, então $f \circ g$ é sobrejetora.*

(c) *Se f e g são bijetoras então $f \circ g$ é bijetora.*

(d) *No caso do item (c), prove que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Exercício 1.4. *Valem as recíprocas nos itens (a) e (b) do exercício anterior? Por que? Qual "parte" da recíproca é verdadeira? Por exemplo, se $f \circ g$ é injetora, podemos concluir que alguma das funções f ou g é injetora? Qual? Justifique suas respostas, sempre provando ou dando contra-exemplos.*

Função identidade. A *função identidade no conjunto* A é a função $\{(x, x) : x \in A\}$. Ou seja, é a função $f(x) = x$. Denotamos a identidade no conjunto A por I_A.

Exercício 1.5. *Prove que uma função* $f : A \longrightarrow B$ *é inversível em* B *se, e somente se, existe uma função* $g : B \longrightarrow A$ *tal que* $f \circ g = I_B$ *e* $g \circ f = I_A$. *Prove, ainda, que quando existir tal* g*, necessariamente vale* $g = f^{-1}$.

Restrição de função. Seja f uma função de A em B e seja X um subconjunto de A. Definimos a *restrição de* f *a* X – e denotamos por $f|X$ (ou $f|_X$) – o conjunto $\{(x, y) \in f : x \in X\}$.

Exercício 1.6. *Nas condições acima, prove que:*

(a) $f|X$ *é uma função de* X *em* B.

(b) *Se* f *é injetora, então* $f|X$ *é injetora.*

(c) *Se* $f|X$ *é sobrejetora em relação a* B*, então* f *é sobrejetora em relação a* B.

Exercício 1.7. *Seja* f *uma função de* A *em* B *sobrejetora em relação a* B. *Prove que* f *é injetora se, e somente se, para todo* X *contido propriamente em* A *(isto é,* $X \subset A$ *e* $X \neq A$*) temos que* $f|X$ *não é sobrejetora em relação a* B.

Capítulo 2

Axiomas de corpo ordenado

A abordagem axiomática dos números reais previne erros que a intuição pode ocasionar e torna mais rigoroso o processo de demonstração matemática, pois estabelecemos exatamente quais são as propriedades que assumimos como verdadeiras. No começo, as demonstrações axiomáticas parecem muito complicadas e contra-intuitivas, visto que muitas coisas que consideramos óbvias precisam ser demonstradas. Porém, rapidamente conseguimos provar esses fatos mais elementares e passamos a usar praticamente tudo que já sabíamos, mas com muito mais rigor.

Os exercícios aqui apresentados estão organizados de forma a servir de roteiro para as demonstrações. Isto é, cada exercício pode ser resolvido de maneira bem simples utilizando os anteriores.

2.1 Axiomas de corpo

Um corpo é uma tripla $(X, +, \cdot)$ tal que

- X é um conjunto não-vazio;
- $+$ e $\cdot$ são operadores binários em X, isto é, funções de $X \times X$ e X;
- Existe um elemento de X que chamaremos de 0 (zero);
- Existe um elemento de X que chamaremos de 1 (um);
- Para todos x, y, z pertencentes a X valem os seguintes axiomas:

A0 $0 \neq 1$;

A1 (Comutatividade da adição) $x + y = y + x$;

A2 (Associatividade da adição) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

A3 (Elemento neutro aditivo) $x + 0 = x$;

A4 (Elemento oposto) existe $w \in X$ tal que $x + w = 0$;

M1 (Comutatividade da multiplicação) $x \cdot y = y \cdot x$;

M2 (Associatividade da multiplicação) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

M3 (Elemento neutro multiplicativo) $x \cdot 1 = x$;

M4 (Elemento inverso) se $x \neq 0$, existe $w \in X$ tal que $x \cdot w = 1$;

D (distributividade) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$;

O conjunto X é chamado de *domínio* do corpo $(X, +, \cdot)$. Repare que sobre um mesmo conjunto X podemos colocar operações diferentes e formar corpos diferentes. Todavia, mesmo sendo errado chamar o conjunto X de corpo, por um abuso de notação – isto é, para facilitar a escrita, mesmo perdendo um pouco do rigor – iremos nos referir ao domínio do corpo como o próprio corpo, quando ficar claro quais são as operações que estamos considerando. Por exemplo, podemos escrever "o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo", mesmo quando o certo seria "$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo". Da mesma forma, iremos eventualmente escrever "elemento de um corpo" quando, na verdade, nos referimos a um elemento do *domínio* de um corpo.

O axioma $0 \neq 1$ previne que definamos um corpo com um único elemento (e, dessa forma, satisfaz trivialmente todos os axiomas). Optamos neste texto por deixar esse axioma, mas a maioria dos livros não o utiliza. A quem se interessar, fica como exercício extra que, se tirarmos o axioma A0, o único corpo que satisfaz $0 = 1$ é aquele cujo domínio tem um único elemento.

Observação importante: Para simplificar a apresentação dos axiomas, introduzimos 0 e 1 como símbolos primitivos. Nessa abordagem, o mais correto seria introduzir esses símbolos na definição de corpo. Isto é, deveríamos definir um corpo como uma quíntupla ordenada $(X, +, \cdot, 0, 1)$ satisfazendo os axiomas. Para consertar isso sem precisar incluir os símbolos 0 e 1 na definição de corpo, poderíamos substituir o axioma A3 e M3 respectivamente pelas seguintes asserções:

A3' Existe $y \in X$ tal que, para todo $x \in X$, vale $x + y = x$.

M3' Existe $y \in X$ tal que, para todo $x \in X$, vale $x \cdot y = x$.

A partir dos axiomas A3 e M3 reescritos como A3' e M3', podemos definir 0 como o elemento do corpo que satisfaz $x + 0 = x$, para todo $x \in X$, e podemos definir 1 como o elemento do corpo que satisfaz $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in X$. Porém, isso requer uma atenção especial: para definirmos 0 como *o* elemento do corpo que satisfaz A3', precisamos provar que exite *um único* elemento nessas condições, para evitar ambiguidade na definição.

De fato, suponha que y e y' são dois elementos de X satisfazendo $x+y = x$ e $x + y' = x$, para todo $x \in X$. Em particular, $y + y' = y$ e $y' + y = y'$. Pela comutatividade (A1), $y + y' = y' + y$. de onde concluímos que $y = y'$.

O mesmo raciocínio prova também a unicidade do elemento neutro multiplicativo, justificando que definamos tal elemento como o número 1.

Dessa forma, tendo sido 0 e 1 definidos univocamente a partir das versões modificadas dos axiomas, não precisamos introduzir como símbolos primitivos na definição de corpo, de modo que apenas as operações $+$ e $\cdot$ são os símbolos primitivos necessários.

O primeiro exercício desta apostila começa com um exemplo simples de corpo.

Exercício 2.1. *Sejam $a = \emptyset$ e $b = \{\emptyset\}$. Considere $X = \{a, b\}$. Definimos uma operação binária $+$ em X como: $a + a = a$; $a + b = b$; $b + a = b$ e $b + b = a$. Definimos outra operação binária $\cdot$ em X como: $a \cdot a = a$; $a \cdot b = a$; $b \cdot a = a$ e $b \cdot b = b$. Prove que $(X, +, \cdot)$ é um corpo. Diga quem é 0 e quem é 1.*

Observe que no exemplo acima pouco ou nada importa quem como definimos a e b. A única coisa a ser levada em consideração é que $a \neq b$. Esse é um dos exemplos mais simples – o outro seria tomar X com um único elemento – de corpo. Mas há muitos outros, diversos deles infinitos, como os conjuntos (com as operações usuais) dos números racionais, dos números reais e dos números complexos. O foco desta disciplina será axiomatizar e construir o corpo dos números reais.

O próximo exercício é consequência imediata da distributividade e da comutatividade.

Exercício 2.2 (Distributiva pela direita)**.** *Seja $(X, +, \cdot)$ é um corpo. Prove que, para todos $x, y, z \in X$, vale $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$;*

O próximo exercício justifica o famoso jargão "corta dos dois lados", usado no ensino básico.

Exercício 2.3 (Leis de cancelamento)**.** *Seja* $(X, +, \cdot)$ *um corpo e tome* $x, y, z \in X$*. Prove que:*

(a) *Se* $x + z = y + z$ *então* $x = y$*;*

(b) *Se* $z \neq 0$ *e* $x \cdot z = y \cdot z$ *então* $x = y$*.*

Usando o exercício anterior e o axioma A3 podemos resolver o exercício:

Exercício 2.4. *Seja* $(X, +, \cdot)$ *um corpo. Prove que, para todos* $x, y \in X$*,*

(a) $x \cdot 0 = 0$ *e* $0 \cdot x = 0$*;*

(b) *Se* $x \cdot y = 0$ *então* $x = 0$ *ou* $y = 0$*.*

Com as leis de cancelamento também podemos provar a unicidade dos elementos neutros aditivo e multiplicativo. Ou seja, se $x + y = x$, para todo x, então y necessariamente é 0, e se $x \cdot y = x$, para todo x, então x necessariamente é 1. O elemento oposto e o elemento inverso também são únicos. Ou seja, se temos dois números y e z fazendo o papel de oposto de x – isto é, $x + y = 0$ e $x + z = 0$ – então ambos são iguais. Isto é, $y = z$. O análogo vale para o elemento inverso.

Exercício 2.5. *Seja* $(X, +, \cdot)$ *um corpo. Prove que para todos* $x, y, z \in X$ *temos:*

(a) *Se* $x + y = x$ *então* $y = 0$*;*

(b) *Se* $x \neq 0$ *e* $x \cdot y = x$ *então* $y = 1$*;*

(c) *Se* $x + y = 0$ *e* $x + z = 0$ *então* $y = z$*;*

(d) *Se* $x \cdot y = 1$ *e* $x \cdot z = 1$ *então* $y = z$*.*

Notações: Como para cada x existe um único y tal que $x + y = 0$, então podemos introduzir uma notação para tal y que depende de x. Denotaremos o oposto de x por $-x$. Ou seja, $-x$ é o único elemento de X tal que $x+(-x) = 0$. Da mesma forma, para cada $x \neq 0$ podemos escrever como x^{-1} o inverso multiplicativo de x. Isto é, o único elemento de X tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Usaremos ainda a notação $x - y$ no lugar de $x + (-y)$. Também eventualmente escreveremos $\frac{x}{y}$ em vez de $x \cdot y^{-1}$.

Em várias ocasiões omitiremos o excesso de parênteses quando tal omissão não ocasionar prejuízo à clareza da linguagem. Por exemplo, por causa da associatividade, poderemos escrever $x + y + z$ no lugar de $(x + y) + z$ ou de $x + (y + z)$, visto que ambos são iguais. O mesmo valendo para o produto. Seguiremos a convenção de priorizar o produto numa sequência de operações, quando omitimos parênteses. Ou seja, $x \cdot y + z$ é o mesmo que $(x \cdot y) + z$, e não $x \cdot (y + z)$.

Também eventualmente omitiremos o sinal da multiplicação. Ou seja, escreveremos xy no lugar de $x \cdot y$.

Denotaremos $x \cdot x$ por x^2.

Exercício 2.6. *Seja $(X, +, \cdot)$ um corpo. Prove que, para todos $x, y \in X$ temos:*

(a) $-x = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*;*

(b) $(-1)x = -x$*;*

(c) $-(-x) = x$*;*

(d) $x(-y) = -(xy)$*;*

(e) $(-x)y = -(xy)$*;*

(f) $(-x)(-y) = xy$*;*

(g) $-(x - y) = y - x$*;*

Exercício 2.7. *Seja $(X, +, \cdot)$ um corpo. Prove que, para todos $x, y \in X \setminus \{0\}$ temos:*

(a) $(x^{-1})^{-1} = x$

(b) $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$*;*

(c) $(xy)^{-1} = (x^{-1})(y^{-1})$.

(d) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = \dfrac{y}{x}$.

O próximo exercício apresenta algumas propriedades de frações que costumamos usar.

Exercício 2.8. *Sejam* $(X, +, \cdot)$ *um corpo e* a, b, c, d *elementos de* X *tais que* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$*. Prove que.*

(a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ad}{bd}$;

(b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

(c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$;

(d) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$;

(e) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$;

(f) $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$.

2.2 Axiomas de corpo ordenado

Um corpo ordenado é uma quádrupla $(X, +, \cdot, <)$ onde $(X, +, \cdot)$ é um corpo e $<$ é uma relação binária em X satisfazendo:

O1 Se $0 < x$ e $0 < y$, então $0 < x + y$ e $0 < x \cdot y$;

O2 $x < y$ se, e somente se, $x - y < 0$;

O3 (tricotomia) Para cada $x \in X$, ocorre um, e somente um, dos três casos seguintes: $x < 0$ ou $x = 0$ ou $0 < x$.

Notações: Escrevemos $x > y$ com o mesmo significado que $y < x$; $x \leq y$ significa $x < y$ ou $a = b$; $x \geq y$ é o mesmo que $y \leq x$.

Exercício 2.9. *Seja* $(X, +, \cdot, <)$ *um corpo ordenado. Prove que para todos* $x, y, z \in X$ *valem as seguintes afirmações:*

(a) $0 < x$ *se, e somente se,* $-x < 0$*;*

(b) *Ocorre um, e somente um, dos três casos seguintes:* $x < y$ *ou* $x = y$ *ou* $y < x$*;*

(c) *Se* $x < y$ *e* $y < z$ *então* $x < z$*;*

(d) *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *então* $x = y$*;*

(e) *Se* $x > 0$ *e* $y < 0$ *então* $xy < 0$*;*

(f) *Se* $x < 0$ *e* $y < 0$ *então* $xy > 0$*;*

(g) $x^2 \geq 0$*;*

(h) $1 > 0$.

Exercício 2.10. *Seja* $(X, +, \cdot, <)$ *um corpo ordenado. Prove que para todos* $x, y, z, w \in X$ *valem as seguintes afirmações:*

(a) $x < y$ *se, e somente se,* $x + z < y + z$*;*

(b) $x + 1 > x$*;*

(c) $x^{-1} > 0$ *se, e somente se,* $x > 0$*;*

(d) *Se* $x < y$ *e* $z > 0$*, então* $xz < yz$*;*

(e) *Se* $x < y$ *e* $z < 0$*, então* $yz < xz$*;*

(f) *Se* $x < y$ *e* $z < w$ *então* $x + z < y + w$*;*

(g) *Se* $0 < x$*,* $x < y$*,* $0 < z$ *e* $z < w$ *então* $xz < yw$*;*

(h) *Se* $0 < x$ *e* $x < y$ *então* $y^{-1} < x^{-1}$.

Exercício 2.11. *Seja* $(X, +, \cdot)$ *o corpo de dois elementos que foi definido no Exercício 2.1. Prove que não existe uma relação* $<$ *de modo que* $(X, +, \cdot, <)$ *seja um corpo ordenado.*

2.3 Frações

Um exemplo clássico de corpo ordenado é o conjunto dos números racionais, munido das operações e da ordem usuais. Veremos que dentro de qualquer corpo ordenado existe uma cópia do conjunto dos números racionais.

Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Defina, recursivamente, uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ do seguinte modo:

- $f(0) = 0$
- $f(n+1) = f(n) + 1$

Repare que estamos em vários momentos usando o mesmo símbolo para representar objetos diferentes. O número natural 0 não é o mesmo que o elemento 0 do corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$. O número natural 1 também não é o mesmo que o 1 que pertence a X. A operação de soma nos números naturais também não é a mesma soma definida no corpo. Porém, em algum sentido todos eles em X são "muito parecidos" que os seus correspondentes em $\mathbb{N}$.

Defina $\mathbb{N}_X$ a imagem de f. Ou seja, $\mathbb{N}_X$ é o subconjunto de X formado por 0, 1, 1+1, (1+1)+1, etc. Ou seja, é uma cópia dos números naturais dentro de X.

Exercício 2.12. *Prove que a função f definida acima é injetora. Mostre que f poderia não ser injetora se o corpo não fosse ordenado.*

Dica: Para provar que a função injetora, prove que, se $m < n$, então $f(m) < f(n)$. Use (sem provar) todas as propriedades conhecidas de números naturais (indução, propriedade da boa ordem e as propriedades de ordem dos números naturais).

Agora vamos colocar uma cópia do conjunto dos números inteiros dentro de X. Para isso, basta pegar todos os naturais e acrescentar os seus elementos opostos. Para isso, definimos

$$\mathbb{Z}_X = \mathbb{N}_X \cup \{-x : x \in \mathbb{N}_X\}$$

Finalmente definimos

$$\mathbb{Q}_X = \{\frac{x}{y} : x \in \mathbb{Z}_X \text{ e } y \in \mathbb{N}_X \smallsetminus \{0\}\}$$

Na linguagem da álgebra, dizemos que $\mathbb{Q}_X$ é *isomorfo* a $\mathbb{Q}$. Isso significa que existe uma função bijetora $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_X$ que preserva as operações de corpo e a ordem. Isto é, para todos $x, y \in \mathbb{Q}$ valem $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ e $x < y$ se, e somente se, $f(x) < f(y)$. Isso significa que $\mathbb{Q}_X$ e $\mathbb{Q}$ são idênticos, quando vistos como corpos ordenados.

Por abuso de linguagem chamaremos de "número natural", "número inteiro" ou "número racional" um elemento de X (sendo esse o domínio de um corpo ordenado) que pertence, respectivamente, a $\mathbb{N}_X$, $\mathbb{Z}_X$ ou $\mathbb{Q}_X$.

Notamos que a relação de $<$ em $\mathbb{N}_X$ é a a mesma (via isomorfismo) que a ordem usual dos números naturais (veja dica para o Exercício 2.12).

Definição 2.13 (Propriedade arquimediana)**.** Dizemos que um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ satisfaz a *propriedade arquimediana* se para todo $x \in X$ existe um número natural $n \in X$ tal que $x < n$.

Exercício 2.14. *Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado que satisfaz a propriedade arquimediana. Prove que*

(a) *Para todo $x \in X$, se $x > 0$ existe um número natural $n \in X$ tal que $\frac{1}{n} < x$;*

(b) *Para todos $x, y \in X$, se $x < y$ existe um número racional r tal que $x < r$ e $r < y$.*

Dica: Para o item (b), siga os seguintes passos:

1. Primeiro suponha que $x \geq 0$.
2. Usando o item (a), encontre n número natural tal que $\frac{1}{n} < y - x$ (justifique).
3. Tome m o menor natural tal que $\frac{m}{n}$ é maior do que x. Use a propriedade de boa ordem dos números naturais: todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo. Use mais uma vez a propriedade arquimediana para provar que existe m tal que $\frac{m}{n} > x$.
4. Tome $r = \frac{m}{n}$ e prove que satisfaz a propriedade desejada. Ou seja, resta provar que $\frac{m}{n} < y$. Use que $\frac{m-1}{n} \leq x$ (por quê?).

5. Agora, trabalhando com as regras de sinal provadas nos exercícios anteriores, prove o item (b) para quando $x < 0$: se $y > 0$, basta tomarmos $r = 0$; se $y < 0$, tomamos r racional entre $-y$ e $-x$ e provamos que $-r$ satisfaz o que queremos.

Capítulo 3

Corpo ordenado completo – números reais

Vimos que o conjunto dos números racionais formam um corpo ordenado. Vimos, também, que em qualquer corpo ordenado existe uma “cópia” do conjunto dos números racionais. Também mostramos que as principais propriedades relacionadas às operações e ordem que estamos acostumados a trabalhar tanto em $\mathbb{Q}$ quanto em $\mathbb{R}$ funcionam bem em qualquer corpo ordenado.

Voltamos então a algumas das perguntas iniciais colocadas na disciplina: qual é a propriedade intrínseca do conjunto dos números reais que o difere do conjunto dos números racionais? Por que essa propriedade é tão importante para o cálculo?

Neste capítulo apresentamos o último axioma que falta para caracterizarmos o conjunto dos números reais.

3.1 Axioma do supremo

Antes de enunciar o axioma que falta para caracterizar a completude dos números reais, precisamos introduzir algumas definições sobre ordem.

Definição 3.1. Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Sejam $M \subset X$ e $s \in X$. Dizemos que

- s é **limitante superior** de M se, para todo $x \in M$ temos $x \leq s$;
- s é **limitante inferior** de M se, para todo $x \in M$ temos $s \leq x$;

- s é **máximo** de M se s é um limitante superior de M e $s \in M$;
- s é **mínimo** de M se s é um limitante inferior de M e $s \in M$;
- s é **supremo** de M se s é o menor dos limitantes superiores de M; isto é, s é limitante superior de M e, para todo $t \in X$, se t é limitante superior de M então $s \leq t$;
- s é **ínfimo** de M se s é o maior dos limitantes inferiores de M; isto é, s é limitante inferior de M e, para todo $t \in X$, se t é limitante inferior de M então $t \leq s$.

Dizemos, ainda, que $M \subset X$ é **limitado superiormente** (respectivamente, **limitado inferiormente**) se existe em X um limitante superior (respectivamente, um limitante inferior) de M. Quando dissermos simplesmente que $M \subset X$ é **limitado**, significa limitado superiormente.

Nota-se que, para verificarmos se s é supremo de M, precisamos verificar as seguintes condições:

- $x \leq s$, para todo $x \in M$;
- Se $t < s$, existe $x \in M$ tal que $t < x$.

O análogo vale para provar que s é ínfimo de M.

Exercício 3.2. *Prove que o máximo, mínimo, supremo ou ínfimo de M, quando existe, é único. Isto é, se s e t são ambos máximos de M (respectivamente, mínimo, supremo ou ínfimo) então $s = t$.*

Exercício 3.3. *Prove que o máximo (respectivamente, o mínimo) de um subconjunto M de um corpo ordenado é, necessariamente, o supremo (respectivamente, o ínfimo) de M. Mostre exemplos no corpo ordenado $\mathbb{Q}$ em que a recíproca não vale. Isto é, existe o supremo (respectivamente, ínfimo) de M mas não existe o máximo (respectivamente, mínimo).*

Exercício 3.4. *Seja s o supremo (respectivamente, ínfimo) de um conjunto M. Prove que s é o máximo (respectivamente, mínimo) de M se, e somente se, $s \in M$.*

Quando dizemos que M *possui supremo* queremos dizer que existe o supremo de M em X (não necessariamente o supremo pertence a M).

Definição 3.5. Um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é dito **completo** se todo subconjunto de X não vazio e limitado superiormente possui supremo.

Para nós, quando falamos em "o conjunto dos números reais" (comumente denotado por $\mathbb{R}$)" estamos falando de um corpo ordenado completo. Assim, a axiomatização dos números reais consiste em todos os axiomas de corpo ordenado mais o axioma "todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente possui supremos".

Como $x \leq y$ se, e somente se, $-y \leq -x$, é fácil perceber que, se s é supremo de M, então $-s$ é ínfimo de $\{-x : x \in M\}$, e que esse último conjunto é limitado inferiormente se, e somente se, M é limitado superiormente. Com essa dica, deixamos o seguinte exercício:

Exercício 3.6. *Prove que um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é completo se, e somente se, todo subconjunto de X não-vazio e limitado inferiormente possui ínfimo.*

Denotamos por $supM$ o supremo de M, quando esse existir. Denotamos por $infM$ o ínfimo de M.

Exercício 3.7. *Sejam $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado completo e sejam A e B subconjuntos não-vazios de X limitados superiormente.*

(a) *Suponha que para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$. Prove que $sup\, A \leq sup\, B$.*

(b) *Suponha que para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$, e que para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b \leq a$. Prove que $sup\, A = sup\, B$.*

3.2 Consequências do axioma do supremo

O próximo teorema é bem significativo para a formalização do Cálculo Diferencial e Integral, pois assegura que, no conjunto dos números reais formalizados da maneira como estamos fazendo aqui (que é a formalização dita *standard* dos números reais) não possui "infinito" nem "infinitésimo".

Teorema 3.8. *Todo corpo ordenado completo satisfaz a propriedade arquimediana.*

Demonstração: Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado completo. Considere N a cópia do conjunto dos números naturais em X, conforme explicado no final do capítulo 2. A propriedade arquimediana diz que, para todo $x \in X$ existe $n \in N$ tal que $x > n$. Suponhamos, por absurdo, que isso seja falso. Isto é, existe $x \in X$ tal que $x \geq n$, para todo $n \in N$. Isso significa dizer que N é limitado superiormente por x. Pelo axioma da completude, tome s o supremo de N em X.

Sabemos que $s - 1 < s$. Como s é o menor dos limitantes superiores de N, temos que $s - 1$ não pode ser um limitante superior de N. Logo, existe $n \in N$ tal que $s - 1 < n$. Portanto, $s < n + 1$. Mas $n + 1 \in N$, contradizendo a hipótese de que s é um limitante superior de N. ■

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. O corpo dos números racionais também satisfaz a propriedade arquimediana mas não é completo.

Vamos começar a usar, na próxima demonstração, uma notação bem conhecida mas que ainda não explicamos: se escrevemos $x \leq y \leq z$ queremos dizer que $x \leq y$ e $y \leq z$ (e, consequentemente, $x \leq z$). O análogo vale para sequências maiores de desigualdades, e podendo alternar entre $<$ e $\leq$, ou entre $>$ e $\geq$.

Teorema 3.9. *Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado completo. Existe $s \in X$ tal que $s^2 = 2$.*

Demonstração: Tome $A = \{x \in X : x^2 < 2\}$. O conjunto A é limitado superiormente. Basta ver que 2 é um limitante superior. De fato, se $x \in A$ então, por definição, $x^2 < 2$. Se $x \geq 2$, como ambos são maiores do que 0, temos

$$x \cdot x \geq x \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 \geq 1 \cdot 2 = 2$$

Logo, $x \notin A$. Concluímos que, se $x \in A$ então $x < 2$, provando que A é limitado superiormente.

Tome $s = supA$. Vamos provar que $s^2 = 2$.

Claramente temos que $s \geq 1$ (pois $1 \in A$) e $s < 2$ (pelo comentário acima).

Suponhamos, por absurdo, que $s^2 \neq 2$. Temos duas possibilidades. Ou $s^2 < 2$ ou $s^2 > 2$.

Se $s^2 < 2$, temos que $2 - s^2 > 0$. Usando a propriedade arquimediana isso implica que existe n natural tal que $\frac{1}{n} < 2 - s^2$. Usando os teoremas de ordem provados no capítulo anterior, somando s^2 nos dois lados concluímos que $s^2 + \frac{1}{n} < 2$. Considere $t = s + \frac{1}{8n}$. Temos

$$t^2 = s^2 + \frac{2s}{8n} + \frac{1}{64n^2} \leq s^2 + \frac{2 \cdot 2}{8n} + \frac{1}{2n} = s^2 + \frac{1}{n} < 2.$$

Portanto, $t \in A$, absurdo, pois $t > s$ e s é limitante superior de A.

Os detalhes das contas acima podem ser facilmente deduzidas a partir dos axiomas e teoremas vistos no capítulo anterior (a essa altura, assumimos que os estudantes já possuem mais familiaridade com esses argumentos e apresentamos as demonstrações mais resumidamente).

Agora supomos que $s^2 > 2$. Tome n natural tal que $\frac{1}{n} < s^2 - 2$. Isso significa que $s^2 - \frac{1}{n} > 2$ Considere $t = s - \frac{1}{4n}$. Como $s \geq 1$, verifica-se que $t > 0$.

Temos que

$$t^2 = s^2 - \frac{2s}{4n} + \frac{1}{4n^2} > s^2 - \frac{s}{2n}.$$

Como $2 \geq s$, temos $-s \geq -2$. Logo, $-\frac{s}{2n} \geq -\frac{2}{2n}$ e $s^2 - \frac{s}{n} \geq s^2 - \frac{1}{n}$. Portanto, concluímos que $t^2 > 2$.

Como $t < s$ e s é o supremo de M, existe $x \in M$ tal que $t < x$. Como $t > 0$, isso significa, pelo exercício 10g do capitulo anterior, que $t^2 < x^2$. Absurdo, pois $x^2 < 2$ e $t^2 > 2$.

Provamos que não podemos ter nem $s^2 > 2$ nem $s^2 < 2$, provando que $s^2 = 2$. ■

Exercício 3.10. *Generalize o Teorema 3.9, provando que, se $(X, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado completo e $a > 0$, então existe $x \in X$ tal que $x^2 = a$.*

Com o Teorema 3.9 também provamos que o corpo dos números racionais não é completo. Relembramos o conhecido resultado de que não existe raiz de 2 no conjunto dos números racionais.

Teorema 3.11. *Não existe um número racional x tal que $x^2 = 2$*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe um número racional x tal que $x^2 = 2$. Como $x^2 = (-x)^2$, e como $x > 0$ ou $-x > 0$, podemos assumir que $x > 0$ (senão, considere $-x$ no lugar de x).

Escreva x como $\frac{p}{q}$ na forma irredutível, com p e q naturais. Como $\frac{p}{q}$ é irredutível, isto é, uma fração que não pode ser simplificada, não podemos ter ambos p e q números pares (pois, nesse caso, poderíamos simplificar dividindo numerador e denominador por 2).

Como $(\frac{p}{q})^2 = 2$, temos $p^2 = 2q^2$. Observe que $2q^2$ é um número natural par. Logo, p^2 é par. Portanto, p é par, pois, se fosse ímpar, teríamos p^2 ímpar, visto que o produto de dois números ímpares é ímpar. Escrevamos, então, p como $2n$, para n natural. Temos que

$$2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

Segue da expressão acima que

$$q^2 = 2n^2$$

Portanto, q^2 é par e, consequentemente, q é par. Absurdo, pois assumimos que p e q não podem ser ambos pares. ■

3.3 Axioma de Dedekind

A seguir, definimos um outro axioma equivalente ao axioma do supremo. Tal axioma, introduzido por Hilbert em sua axiomatização da geometria, usando as ideias de cortes de Dedekind, pode ajudar a elucidar a ideia da completude. Na geometria ele garante algumas intersecções de retas e arcos de circunferência. Resumidamente, o axioma diz o seguinte: se dividirmos a reta em duas semi-retas disjuntas, então uma dessas semi-retas possui um ponto inicial. Com isso, é impossível outra reta ou curva passar "no meio" das duas semi-retas sem intersectar a reta.

Definição 3.12 (Axioma de Dedekind)**.** Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Dizemos que um par ordenado (A, B) é um **corte** em X se valem as seguintes propriedades:

- $A, B \subset X$;
- A e B são ambos não-vazios;
- $A \cup B = X$;
- $A \cap B = \emptyset$;
- Se $a \in A$ e $b \in B$ então $a < b$.

Dizemos que um corpo ordenado satisfaz o **axioma de Dedekind** se, para todo corte (A, B), ou A possui máximo ou B possui mínimo.

Exercício 3.13. *Usando o fato de que não existe $\sqrt{2}$ em $\mathbb{Q}$, dê um exemplo de um corte (A, B) em $\mathbb{Q}$ tal que nem A possui máximo nem B possui mínimo. Justifique.*

Teorema 3.14. *Um corpo ordenado é completo se, e somente se, satisfaz o axioma de Dedekind.*

Demonstração: Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Primeiro suponhamos que ele seja completo e mostraremos que satisfaz o axioma de Dedekind.

Tome (A, B) um corte. Claramente A é limitado superiormente, pois B é não-vazio, e, pela definição de corte, qualquer elemento de B é limitante superior de A. Seja $s = sup\, A$. Pelo Exercício 3.4, se $s \in A$ então s é o máximo de A. Se $s \notin A$, como $A \cup B = X$ concluímos que $s \in B$. Como todos os elementos de B são limitantes superiores de A e s é o supremo de A, concluímos que, se $b \in B$ então $s \leq b$, provando que s é o mínimo de B. Provamos, assim, que o corpo satisfaz o axioma de Dedekind.

Agora suponhamos que $(X, +\cdot, <)$ satisfaz o axioma de Dedekind. Seja S um subconjunto não-vazio de X limitado superiormente. Defina

$$A = \{a \in X : \exists x \in S(a \leq x)\}$$

Considere B o conjunto de todos os limitantes superiores de A que não pertencem a A. Isto é:

$$B = \{b \in X : \forall a \in A(a < b)\}.$$

Claramente (A, B) é um corte (exercício). Se A possui máximo, pelo Exercício 3.3 esse é o supremo de A e, pelo Exercício 3.7, esse também é o supremo de S (verifique). Se B possui mínimo, seja s o mínimo de B. Temos que s é um limitante superior de A (por definição de pertencer a B) e, em particular, de S (pois $S \subset A$). Vejamos que é o supremo de S. Seja $t \in X$ tal que $t < s$. Provaremos que t não é limitante superior de S.

Tome $t' = \frac{t+s}{2}$. É fácil verificar que $t < t' < s$. como t' é menor que o mínimo de B, temos que $t' \notin B$. Logo, $t' \in A$, visto que $A \cup B = X$. Pela definição de A isso significa que existe $x \in S$ tal que $t' \leq x$. Portanto, $t < x$, concluindo que t não é limitante superior de S.

Com isso, provamos que s – seja ele o máximo de A ou o mínimo de B – é o supremo de S. ■

Exercício 3.15. *Complete a demonstração acima, provando que, dados A, B e S como na segunda parte da demonstração,*

(a) *(A, B) é um corte;*

(b) *A e S satisfazem as hipóteses do Exercício 3.7 (b), e, portanto, possuem o mesmo supremo.*

Definição 3.16. Seja $(X, +, \cdot)$ um corpo. Sejam $r \in X$ e $A, B \subset X$. Definimos:

- $rA = \{rx : x \in A\}$;
- $r + A = \{r + x : x \in A\}$;
- $-A = \{-x : x \in A\}$;
- $A + B = \{x + y : x \in A \text{ e } y \in B\}$;
- $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Teorema 3.17. *Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado completo. Sejam A e B subconjuntos de X limitados superiormente e não-vazios e seja $r \in X$ tal que $r > 0$. Temos que*

(a) *$A + B$ é limitado superiormente e $sup(A + B) = sup\, A + sup\, B$;*

(b) *rA é limitado superiormente e $sup(rA) = r\, sup\, A$;*

(c) *se $A, B \subset \{x \in X : x > 0\}$ então $sup(A \cdot B) = (sup\, A) \cdot (sup\, B)$.*

Demonstração: Os itens (a) e (b) deixaremos como exercício. Provaremos a parte (c), assumindo (b).

Sejam A e B como na hipótese do item (c). Seja $a = sup\, A$ e $b = sup\, B$. Provaremos que ab é supremo de $A \cdot B$.

Se $x \in A$ e $y \in B$, como são todos positivos, temos que $xy \leq xb \leq ab$. Portanto, ab é um limitante superior de $A \cdot B$. Falta mostrar que é o menor dos limitantes superiores.

Seja $x < ab$. Provaremos que x não é limitante superior de $A \cdot B$. Como $x < ab$, temos $\frac{x}{b} < a$ (pois $b > 0$) e, portanto, como $a = sup\, A$, existe $a' \in A$ tal que $\frac{x}{b} < a'$. Logo, $x < a'b$. Como, pelo item (b), $a'b$ é o supremo de $a'B$, existe $y \in a'B$ tal que $x < y$. Temos que y é da forma $a'b'$, para algum $b' \in B$. Logo, $y \in A \cdot B$, provando que x não é limitante superior de $A \cdot B$. ■

Exercício 3.18. *Prove os itens (a) e (b) do teorema anterior. Lembre-se de que você não pode usar o item (c) para provar (a) e (b), pois isso tornaria a demonstração circular.*

Capítulo 4

Construção dos números reais

No capítulo anterior definimos o que é um corpo ordenado completo, e mencionamos que é esse o conceito que procurávamos para os números reais. Ou seja, a partir de agora, quando falamos em "conjunto dos números reais" nos referimos a qualquer corpo ordenado completo, e quando falamos de "números reais" nos referimos aos elementos (do domínio) de um corpo ordenado completo.

Mas para justificarmos usar um corpo ordenado completo como **o** conjunto dos números reais, precisamos mostrar duas coisas. Primeiro, que de fato *existe* um corpo ordenado completo. Isso é necessário para sabermos que os axiomas adotados não entram em contradição, o que faria com que toda a teoria dos corpos ordenados completos fosse trivial, pois de um sistema contraditório podemos provar qualquer afirmação matemática, o que o torna inútil. Segundo, precisamos mostrar que o corpo ordenado é *único*, no sentido algébrico. Isto é, todos os corpos ordenados completos são isomorfos entre si (daremos essa definição mais adiante), de modo que tudo que provamos para um corpo ordenado em particular vale para todos.

A construção que faremos aqui de um corpo ordenado completo (que também chamaremos de *construção do conjunto dos números reais*) é a construção por *cortes de Dedekind* [1], que é feita a partir do conjunto dos números racionais e das operações conjuntísticas. Nos cursos de álgebra mostra-se como construir os números racionais a partir dos números inteiros, e os números inteiros a partir dos naturais. Em teoria dos conjuntos mostra-se como construir o conjunto dos números naturais a partir dos axiomas de

[1] Vide o livro *Principles of Mathematical Analysis*, de Rudin, para mais detalhes.

teoria dos conjuntos, de modo a reduzirmos toda a matemática a um sistema axiomático para os conjuntos.

Outra construção clássica do conjunto dos números reais a partir dos racionais é via sequências de Cauchy, e pode ser vista no livro *Números Reais*, de Aragona.

4.1 Construção do corpo dos números reais

Nos dedicaremos nesta seção a provar o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Existe um corpo ordenado completo.*

A prova será feita a partir de uma série de definições, lemas e exercícios colocados ao longo desta seção.

Assumimos conhecido o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Sabemos que $\mathbb{Q}$, com as operações e a ordem usuais, forma um corpo ordenado completo.

Definição 4.2. Um subconjunto A de $\mathbb{Q}$ é chamado de *corte de Dedekind* se

- A é não-vazio;
- A é limitado;
- A não possui máximo;
- Se $x \in A$ e y é um número racional tal que $y \leq x$, então $y \in A$.

Definimos $\mathbb{R}$ como o conjunto de todos os cortes de Dedekind.

Exercício 4.3. Seja $r \in \mathbb{Q}$ e defina

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}.$$

(a) Prove que A é um corte de Dedekind;

(b) Prove que nem todo corte de Dedekind possui a forma acima.

Vamos, a partir de agora, definir as operações em $\mathbb{R}$ que o tornam um corpo ordenado completo.

Elemento neutro: Neste momento convém usarmos notações diferentes para o número racional 0 e para o número real 0. Chamaremos o primeiro de $0_{\mathbb{Q}}$ e o segundo de $0_{\mathbb{R}}$. Definimos

$$0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0_{\mathbb{Q}}\}$$

e

$$1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1_{\mathbb{Q}}\}$$

Segue do Exercício 4.3 que $0_{\mathbb{R}}$ e $1_{\mathbb{R}}$ são cortes de Dedekind e, portanto, elementos de $\mathbb{R}$.

Ordem: Para dois cortes de Dedekind A e B, definimos $A \leq B$ se, e somente se, $A \subset B$. Em particular, $A < B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $A \neq B$.

Segue diretamente dessa definição que, para um corte de Dedekind A, temos que $A > 0_{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $0_{\mathbb{Q}} \in A$.

Adição: Dados dois cortes de Dedekind A e B definimos a soma

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Observe que essa definição coincide com aquela de soma de conjuntos feita no capítulo anterior. Mas não vai ser assim quando definirmos $-A$ e $A \cdot B$.

Lema 4.4. *$A + B$, como acima, é um corte de Dedekind.*

Demonstração: Primeiro, é imediato que $A + B$ é não-vazio. Como cada um desses conjuntos é não-vazio, tomando um $a \in A$ e um $b \in B$ temos que $a + b \in A + B$. Agora vejamos que $A + B$ é limitado. De fato, sejam a_1 e b_1 limitantes superiores de A e B, respectivamente. Se $a + b \in A + B$, para $a \in A$ e $b \in B$, temos que $a \leq a_1$ e $b \leq b_1$, de onde segue que $a + b \leq a_1 + b_1$, provando que $a_1 + b_1$ é limitante superior de $A + B$.

Sejam $x \in A + B$ e $y < x$ racional. Mostraremos que $y \in A + B$. Escreva $x = a + b$, onde $a \in A$ e $b \in B$. Considere

$$b' = b - (x - y).$$

Como $y < x$, temos $x - y > 0$. Logo, $b' < b$. Sendo as operações feitas em $\mathbb{Q}$, temos que $b' \in \mathbb{Q}$. Logo, $b' \in B$, pois esse é um corte de Dedekind. Portanto, $a + b' \in A + B$. Mas valem as seguintes igualdades:

$$a + b' = a + (b - (x - y)) = ((a + b) - x) + y = (x - x) + y = y,$$

provando que $y \in A + B$.

Falta mostrar que $A + B$ não tem máximo. De fato, seja $x = a + b$, onde $a \in A$ e $b \in B$, um elemento de $A + B$. Mostremos que x não é limitante superior de $A + B$. Como $a \in A$ e A não tem máximo, existe $a' \in A$ tal que $a < a'$. Logo, tomando $x' = a' + b$ temos $x < x'$ e $x' \in A + B$, provando que x não é máximo de $A + B$. ■

Exercício 4.5. Prove que, para todo corte de Dedekind A, temos $A + 0_{\mathbb{R}} = A$.

Elemento oposto: Seja A um corte de Dedekind. Considere

$$A' = \{x \in \mathbb{Q} : x + a < 0, \text{ para todo } a \in A\}.$$

Essa definição pode falhar na verificação de ser um corte de Dedekind, pois se A for da forma $\{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$, teremos que $-r$ será máximo de A'. Para corrigir essa única propriedade que pode falhar, definimos

$$-A = A' \setminus \{max\, A'\},$$

quando A' tiver máximo, e

$$-A = A',$$

caso contrário.

Lema 4.6. Se A é um corte de Dedekind, $-A$ também o é.

Demonstração: Sejam $x \in -A$ e $y < x$. Dado $a \in A$, por hipótese temos $x + a < 0$. Mas $y + a < x + a < 0$, provando que $y \in A'$. Como $y < x$ e $x \in -A \subset A'$, temos que y não pode ser máximo de A', logo, $y \in -A$.

Agora mostremos que $-A$ é não vazio. Como A é corte, A é limitado superiormente. Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r$, para todo $a \in A$. Logo, $(-r) + a < (-r) + r = 0$, para todo $a \in A$. Logo, $-r \in A'$. Pela observação anterior, $-r - 1$ também pertence a A', pois $-r - 1 < -r$. Assim, $-r - 1$ não pode ser máximo de A'. Logo, $-r - 1 \in -A$.

Para provar que $-A$ é limitado superiormente, tome $a \in A$ qualquer (que existe, pois, por A ser corte, é não vazio). Se $x \in -A$, temos $x + a < 0$, o que implica que $x < -a$, provando que $-a$ é limitante superior de $-A$.

Falta provar que $-A$ não tem máximo. Se A' não tem máximo, então, por definição, $-A = A'$, e não temos o que provar. Suponha que A' tem um máximo, que chamaremos de y. Pelo que provamos acima, se $x < y$ temos $x \in A'$. Seja $z \in -A$. Tome $x = \frac{z+y}{2}$. Temos $z < x < y$, provando que $x \in A'$. Como $x < y$, x não é o máximo de A'. Logo, $x \in -A$. Como $z \in -A$, z não é máximo de $-A$, provando que $-A$ não possui máximo. ■

Lema 4.7. *Se A é um corte de Dedekind, $A + (-A) = 0_{\mathbb{R}}$*

Demonstração: Se $y \in A + (-A)$, temos que y é da forma $x + a$, onde $a \in A$ e $x \in -A$. Por definição de $-A$, isso implica que $x + a < 0$. Logo, $x + a \in 0_{\mathbb{R}}$.

Reciprocamente, se $y \in 0_{\mathbb{R}}$, temos $y < 0$. Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < -y$ e m o menor inteiro tal que $\dfrac{m}{n}$ é limitante superior de A. Tome $a' = \dfrac{m-1}{n}$. Como a' não é limitante superior de A, temos que $a' < b$, para algum $b \in A$, e, portanto, $a' \in A$. Defina $x = y - a'$. Temos $y = x + a'$. Para provar que $y \in A + (-A)$ basta provarmos que $x \in -A$.

Tome $a \in A$ qualquer. Temos $a \leq \dfrac{m}{n}$ e, portanto,

$$x + a = (y - a') + a = y + (a - a') \leq y + \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = y + \frac{1}{n} < 0.$$

Logo, $x \in A'$.

Resta provar que x não é o máximo de A'. De fato, tome $a'' = a' - \delta$, tomando $\delta = \dfrac{ny+1}{2n}$. Substituindo a' por a'' nas equações acima, como $y + \frac{1}{n} + \delta < 0$, provamos que $x' + a < 0$, para todo $a \in A$, provando que x não é máximo de A' e, portanto, pertence a $-A$.

■

Exercício 4.8. Prove que, dado um corte de Dedekind A diferente de $0_{\mathbb{R}}$, temos que $A < 0_{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $-A > 0_{\mathbb{R}}$.

Multiplicação: A definição de multiplicação, para os cortes de Dedekind, é mais fácil quando ambos são positivos. Por isso, usaremos a definição de elemento oposto para definirmos multiplicação quando pelo menos um dos fatores é negativo.

Dados dois cortes de Dedekind A e B definimos $A \cdot B$ como:

- $0_{\mathbb{R}} \cup \{a \cdot b : a \in A,\ b \in B,\ a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\}$, se $A > 0_{\mathbb{R}}$ e $B > 0_{\mathbb{R}}$;
- $0_{\mathbb{R}}$, se $A = 0_{\mathbb{R}}$ ou $B = 0_{\mathbb{R}}$;
- $(-A) \cdot (-B)$, se $A < 0_{\mathbb{R}}$ e $B < 0_{\mathbb{R}}$;
- $-((-A) \cdot B)$, se $A < 0_{\mathbb{R}}$ e $B > 0_{\mathbb{R}}$;
- $-(A \cdot (-B))$, se $A > 0_{\mathbb{R}}$ e $B < 0_{\mathbb{R}}$.

Os detalhes de que a multiplicação está bem definida (é um corte de Dedekind) e que valem os axiomas de corpo, deixamos como exercício aos estudantes mais interessados.

Supremo: Vamos provar que $\mathbb{R}$ satisfaz a propriedade do supremo.

Seja M um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Lembrando que, na forma como construímos, cada elemento de $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, definimos S o supremo de M como

$$S = \bigcup M.$$

Ou seja, $x \in S$ se, e somente se, existe $A \in M$ tal que $x \in A$.

Precisamos mostrar duas coisas: S está bem definido em $\mathbb{R}$ (é um corte de Dedekind) e S é supremo de M.

Para a primeira parte, observamos que S é limitado, pois M é limitado. Assim, seja $B \in \mathbb{R}$ tal que $A \leq B$, para todo $A \in M$. Isso significa que $A \subset B$, para todo $A \in M$. Como B é um corte de Dedekind, existe $x \in mathbbQ$ tal que x é limitante superior de B. Em particular, x é limitante superior de A, para todo $A \in M$, provando que x é limitante superior de S (pois todo elemento de S pertence a algum A que está em M).

É claro que S é não-vazio, pois M é não-vazio, e todo elemento de M é não-vazio. Assim, se tomarmos $A \in M$ e $x \in A$, temos que $x \in S$. Também é claro que S não tem máximo, pois isso implicaria que um dos elementos de M tem máximo.

Tome $x \in S$ e $y < x$ racional. Como $x \in S$, existe $A \in M$ tal que $x \in A$. Como $y < x$ e é racional, $y \in A$. Logo, $y \in M$.

Exercício 4.9. Prove que S é o supremo de M.

4.2 Unicidade, via isomorfismos, do corpo ordenado completo

Um *isomorfismo* de um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ em um corpo ordenado $(Y, +, \cdot, <)$ é uma função $f : X \longrightarrow Y$ tal que:

1. f é bijetora;

2. para todos $x, y \in X$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

3. para todos $x, y \in X$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$;

4. para todos $x, y \in X$, $x < y$ se, e somente se, $f(x) < f(y)$.

Lembramos que, a rigor, não deveríamos usar a mesma notação para as operações em X e em Y. Deveríamos usar notações como $+_X$, para a adição em X, e $+_Y$, para a adição em Y, fazendo o mesmo para $\cdot$ e $<$. Porém, como no contexto fica claro qual operação estamos usando, optamos por não sobrecarregar a notação.

Notamos que se f é um isomorfismo de X em Y, a inversa f^{-1} é um isomorfismo de Y em X.

Dizemos que dois corpos ordenados são *isomorfos* se existe um isomorfismo entre eles (pela observação acima, existir um isomorfismo de X em Y é equivalente a existir um isomorfismo de Y em X).

A composição de dois isomorfismos também é um isomorfismo. Assim, se X é isomorfo a Y e Y é isomorfo a Z, então X é isomorfo a Z.

O próximo lema serve para facilitar a verificação de que uma função é isomorfismo, porque prova que não precisamos mostrar todas as propriedades descritas na definição. Algumas propriedades já seguem de outras e não precisam ser verificadas.

Lema 4.10. *Sejam $(X, +, \cdot, <)$ e $(Y, +, \cdot, <)$ corpos ordenados e $f : X \longrightarrow Y$ uma função satisfazendo:*

1. *f é sobrejetora em relação a Y;*

2. *$f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in X$;*

3. *$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos $x, y \in X$ que satisfazem $x > 0$ e $y > 0$;*

4. *Se $x < y$ então $f(x) < f(y)$.*

Demonstração: Seja f uma função satisfazendo as hipóteses do lema. Teremos que provar, a partir das condições acima, as quatro condições da definição de isomorfismo de corpos ordenados.

Comecemos com o item 1. Já assumindo que f é sobrejetora, provemos que é injetora. Sejam $x \neq y$ ambos em X. Temos que $x < y$ ou $y < x$. Pelo item 4 das hipóteses sobre f, isso implica que $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, e em ambos os casos temos $x \neq y$.

O item 2 não tem o que provar, pois é a mesma condição do enunciado do lema. Para provar o item 3 da definição de isomorfismo observamos que, de 2, segue que $f(0) = 0$ e $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in X$. De fato, temos $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, seguindo das leis de cancelamento que $f(0) = 0$. Temos também que $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$. Logo, $f(-x) = -f(x)$.

Agora tome $x, y \in X$ quaisquer e mostraremos que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Se $x = 0$, a igualdade segue da observação anterior, visto que os dois lados seriam iguais a 0. O mesmo vale para quando $y = 0$. Então podemos assumir que x e y são diferentes de 0.

Temos quatro casos a analisar. Se $x > 0$ e $y > 0$, o item 3 da definição segue do item 3 do lema. Se $x > 0$ e $y < 0$, temos $-y > 0$. Logo, usando as observações anteriores e a hipótese 3 do lema, além das regras de sinal já provada no capítulo 2, temos

$$f(xy) = f(-(x(-y))) = -f(x(-y)) = -(f(x)f(-y)) = -(f(x)(-f(y))) = f(x)f(y).$$

O análogo vale quando $x < 0$ e $y > 0$. Se $x < 0$ e $y < 0$ temos

$$f(xy) = f((-x)(-y)) = f(-x)f(-y) = (-f(x))(-f(y)) = f(x)f(y).$$

Agora precisamos provar que f satisfaz o item 4 da definição de isomorfismo. Falta mostrar que $f(x) < f(y)$ implica $x < y$. Suponha que essa implicação seja falsa. Temos, então, que $f(x) < f(y)$ e não vale $x < y$. Logo, vale $x = y$ ou $y < x$. O primeiro caso implica que $f(x) = f(y)$, e o segundo, pela condição 4 da f, que $f(y) < f(x)$. Ambos os casos contradizem a hipótese de que $f(x) < f(y)$. ■

Teorema 4.11. *Todos os corpos ordenados completos são isomorfos entre si.*

Demonstração: Sejam $(X, +, \cdot, <)$ e $(Y, +, \cdot, <)$ corpos ordenados completos.

Considere $\mathbb{Q}_X$ e $\mathbb{Q}_Y$ as cópias dos racionais em X e Y, respectivamente, conforme descritos no capítulo 2. Tome $g : \mathbb{Q}_X \longrightarrow \mathbb{Q}_Y$ o isomorfismo usual, dado por:

- $g(0) = 0$;
- $g(n + 1) = g(n) + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_X$;
- $g(-n) = -g(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}_X$;
- $g(a \cdot b^{-1}) = g(a) \cdot (g(b))^{-1}$, para todos $a \in \mathbb{Z}_X$ e $b \in \mathbb{N}_X \setminus \{0\}$;

Assumiremos, sem provar, que g está bem definida e é um isomorfismo de corpos ordenados.

Seja $x \in X$. Considere o conjunto

$$A = \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x\}.$$

Afirmação 1: A é não vazio e limitado superiormente.

Para provar a afirmação, use a propriedade arquimediana (em X) para encontrar um número natural $n \in \mathbb{N}_X$ tal que $-x < n$. Teremos $-n < x$ e, portanto, $g(-n) \in A$, visto que $-n \in \mathbb{Q}_X$. Isso prova que $A \neq \emptyset$. Para provar que é limitado superiormente, agimos de forma semelhante: tomamos $n \in \mathbb{N}_X$ tal que $n > x$ e provamos que $g(n)$ é limitante superior de A. De fato, se $a \in A$ temos que $a = g(r)$, para algum $r \in \mathbb{Q}_X$ tal que $r < x$. Em particular, $r < n$ e, como g é um isomorfismo, $g(r) < g(n)$, provando que $a < g(n)$.

Usando a afirmação 1 e o fato de Y ser um corpo ordenado completo, podemos definir, para cada $x \in X$,

$$f(x) = sup\{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x\}.$$

Mostremos que a função f é um isomorfismo. Para isso basta provarmos as condições 1 a 4 do lema 4.10.

Comecemos com a condição 4. Suponha que $x < y$. Usando a densidade de $\mathbb{Q}_X$ em X (exercício 2.14, b), tome $p, q \in \mathbb{Q}_X$ tais que $x < p < q < y$. Se $r \in \mathbb{Q}_X$ e $r < x$, então, em particular, $r < p$ e, por g ser isomorfismo,

$g(r) < g(p)$. Portanto, $g(p)$ é um limitante superior do conjunto $\{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x\}$. Como $f(x)$, por definição, é o supremo desse conjunto, temos $f(x) \leq g(p)$.

Por outro lado, como $q < y$ e $q \in \mathbb{Q}_Y$, temos $g(q) \in \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < y\}$. Como $f(y)$ é o supremo desse conjunto, temos $g(q) \leq f(y)$. Como $g(p) < g(q)$ (pois $p < q$ e g é um isomorfismo), concluímos que $f(x) < f(y)$.

Mostremos agora a sobrejetividade. Seja $y \in Y$. Mostraremos que existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Defina
$$A = \{r \in \mathbb{Q}_Y : r < y\}.$$

Afirmação 2: $y = sup\, A$.

De fato, pela definição está claro que y é um limitante superior de A, pois $r < y$, para todo $r \in A$. Se $z < y$, pelo exercício 2.14, b, existe $r \in \mathbb{Q}_Y$ tal que $z < r < y$. Isso significa que $z < y$ e $y \in A$. Logo, z não é um limitante superior de A, provando que y é o supremo.

Agora vamos definir x de modo que $f(x) = y$. Considere o conjunto
$$B = \{g^{-1}(r) : r \in A\}$$
. Repetindo o argumento da afirmação 1, provamos que B é não vazio e limitado superiormente. Usando a completude de $(X, +, \cdot, <)$, definimos $x = sup\, B$.

Observe que $x \notin B$. De fato, se $x \in B$, em particular $x \in \mathbb{Q}_X$ e $g(x) \in A$. Tomando $r \in \mathbb{Q}_Y$ tal que $g(x) < r < y$, temos $r \in A$ e $g^{-1}(r) \in B$, o que é absurdo, pois $x < g^{-1}(r)$.

Seja
$$A' = \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x\}.$$
Por definição, $f(x) = sup\, A'$. Para provarmos que $f(x) = y$ é suficiente provar (usando a unicidade do supremo) que $A = A'$.

Seja $a \in A$. Tome $r = g^{-1}(a)$. Note que $r \in B$ e $g(r) = a$. Como $x = sup\, B$, temos que $r \leq x$. Como $x \notin B$, temos $r < x$. Logo, $a = g(r) \in A'$.

Reciprocamente, seja $a \in A'$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}_X$ tal que $r < x$ e $a = g(r)$. Como $r < x$ e $x = sup\, B$, existe $p \in B$ tal que $r < p$. Logo, $g(p) \in A$. Isso significa que $g(p) < y$. Mas, como $r < p$. temos $a = g(r) < g(p) < y$. Logo, $a < y$, provando que $a \in A$.

Provamos assim que $A = A'$ e $f(x) = y$, concluindo a sobrejetividade. Falta provarmos itens 2 e 3 do lema 4.10.

Sejam $x, y \in X$. Defina os seguintes conjuntos:

$$A = \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x\},$$

$$B = \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < y\}$$

e

$$C = \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x + y\}.$$

Temos, pela definição de f, que $f(x) = sup\, A$, $f(y) = sup\, B$ e $f(x+y) = sup\, C$. Pelo teorema 3.17, para mostrar que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ é suficiente provar que $C = A + B$. De fato, se $a \in A$ e $b \in B$, temos que $g^{-1}(a) < x$ e $g^{-1}(b) < y$ e ambos estão em $\mathbb{Q}_x$. Logo, $g^{-1}(a+b) = g^{-1}(a)+g^{-1}(b) < x+y$, provando que $a + b \in C$ e, portanto, $A + B \subset C$.

Para a outra inclusão, tome $c \in C$ e $r = g^{-1}(c)$. Temos $r < x + y$, logo, $r - y < x$. Tome $p \in \mathbb{Q}_X$ tal que $r - y < p < x$. Temos que $g(p) \in A$. Agora tome $q = r - p$. De $r - y < p$ concluímos que $r - p < y$, de onde segue que $q < y$ e, portanto (lembrando que, por ser a diferença de dois racionais, q também é racional), $g(q) \in B$. Portanto, $g(p) + g(q) \in A + B$. Por outro lado,

$$g(p) + g(q) = g(p + q) = g(p + (r - p)) = g(r) = c.$$

Resta o item 3. Para isso, mantemos as notações acima mas acrescentamos a hipótese de que $x > 0$ e $y > 0$. Definimos os seguintes conjuntos:

$$A^+ = \{a \in A : a > 0\},$$

$$B^+ = \{b \in B : a > 0\},$$

$$M = \{g(r) : r \in \mathbb{Q}_X \text{ e } r < x \cdot y\},$$

$$M' = A^+ \cdot B^+.$$

Pela definição de f, $f(xy) = sup\, M$. Pelo teorema 3.17, $f(x) \cdot f(y) = sup\, M'$. Para verificar a igualdade que precisamos, basta provarmos que M e M' satisfazem as hipóteses do exercício 3.7. A saber, mostraremos que $M' \subset M$ e que, para todo $p \in M$ existe $q \in M'$ tal que $p \leq q$. Isso, pelo 3.7, é suficiente para provar que $sup\, M = sup\, M'$.

Se $p \in M'$, temos que $p = a \cdot b$, onde $a \in A^+$ e $b \in B^+$. Logo, $g^{-1}(p) = g^{-1}(a) \cdot g^{-1}(b) < x \cdot y$ (exercício 2.10, h), de onde segue que $p \in M$ (pois $g(g^{-1}(p)) = r$).

Agora tome $p \in M$. Temos que $p = g(r)$, onde $r < x \cdot y$. Como $x > 0$, temos que $r \cdot x^{-1} < y$. Tome $b \in \mathbb{Q}_X$ tal que

$$r \cdot x^{-1} < b < y.$$

Como $y > 0$, podemos escolher b de modo que $b > 0$.

Note que, como $b < y$, temos $g(b) \in B^+$. Note ainda que $r < xb$.

Repetimos esse argumento tomando $a \in \mathbb{Q}_X$ tal que $a > 0$ e

$$rb^{-1} < a < x.$$

Temos, então, que $g(a) \in A^+$ e $r < ab$. Logo, $p = g(r) < g(ab) = g(a)g(b)$. Assim, tomando $q = g(a)g(b)$ temos satisfeito o que queríamos.

■

Capítulo 5

Limites de sequências

Uma *sequência* em um conjunto X é uma função de $\mathbb{N}$ em X. Se $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ é uma função, quando utilizamos a notação usual de sequência denotamos f como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (podendo utilizar outra letra no lugar de x), sendo que x_n é $f(n)$.

5.1 Intervalos

Definição 5.1. Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Dizemos que $I \subset X$ é um *intervalo* se, para todos $x, y, z \in X$, se $x, y \in I$, $x < z$ e $z < y$, então $z \in I$.

Um exemplo "sem graça" de um intervalo é o conjunto vazio. Outro exemplo que também satisfaz (por vacuidade) a definição de intervalo mas tem pouca serventia é um conjunto unitário (formado por um único elemento). Os conjuntos unitários e o conjunto vazio são chamados de *intervalos degenerados*.

Definição 5.2. Em um corpo ordenado, dizemos que um intervalo é *não-degenerado* se possui pelo menos dois elementos.

Dizemos que um intervalo é *limitado* se é limitado inferior e superiormente.

Dizemos que um intervalo é *fechado* se possui máximo e mínimo.

Dizemos que um intervalo é *aberto* se não possui máximo nem mínimo.

Dizemos que um intervalo é *semi-aberto* se possui máximo e não possui mínimo, ou vice-versa.

Lembramos uma notação convencional: escrevemos $a < x < b$ quando $a < x$ e $x < b$. Vale o análogo para notações como $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$ e $a \leq x < b$.

Alguns exemplos de intervalos são dados pela definição abaixo:

Definição 5.3. Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado e sejam $a, b \in X$ tais que $a < b$. Definimos

$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\};$

$]a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\};$

$[a, b[= \{x \in X : a \leq x < b\};$

$]a, b[= \{x \in X : a < x < b\};$

$]-\infty, b] = \{x \in X : x \leq b\};$

$]-\infty, b[= \{x \in X : x < b\};$

$[a, \infty[= \{x \in X : x \geq a\};$

$]a, \infty[= \{x \in X : x > a\};$

$]-\infty, \infty[= X.$

Note que os quatro primeiros itens são exemplos de intervalos limitados. Os intervalos fechados, dentre os exemplos acima, são os que começam com o símbolo [e terminam com]. Os intervalos abertos começam com] e terminam com [. Observe que nunca pode vir um [antes de $-\infty$, ou] depois de ∞.

A seguir temos uma caracterização bem interessante do corpo ordenado completo.

Teorema 5.4. *Um corpo ordenado é completo se, e somente se, todo intervalo não-degenerado tem uma das formas apresentadas na Definição 5.3.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado completo e I um intervalo em X com pelo menos dois elementos.

Separaremos a demonstração em casos. Quanto à existência de limitante superior, dividimos em três possibilidades, que são complementares e excludentes (isto é, uma, e apenas uma, dessas três possibilidades ocorre):

- I não é limitado superiormente;
- I é limitado superiormente e possui máximo;
- I é limitado superiormente e não possui máximo.

Quanto à existência de limitante inferior temos outras três possibilidades, independentes das anteriores:

- I não é limitado inferiormente;
- I é limitado inferiormente e possui mínimo;
- I é limitado inferiormente e não possui mínimo.

Fazendo as possíveis combinações de uma das três primeiras possibilidades com uma das três últimas, obtemos, ao todo, nove casos, que são as nove formas listadas na Definição 5.3. Suporemos que I não é limitado inferiormente, e analisaremos as três primeiras possibilidades. Os demais casos são parecidos e não faremos.

Caso 1: I não é limitado superiormente. Nesse caso, como I também não é limitado inferiormente, dado $x \in X$ existem $a < x$ e $b > x$. Pela definição de intervalo, $x \in I$. Logo, $I = \mathbb{R}$, que, por definição, é o intervalo $]-\infty, \infty[$.

Caso 2: I é limitado superiormente e possui máximo. Seja b o máximo de I. Mostraremos que $I =]-\infty, b]$. De fato, se $x \in I$, como b é máximo de I, temos $x \leq b$ e, portanto, $x \in]-\infty, b]$. Mostramos, assim, que $I \subset]-\infty, b]$. Agora tome $x \in]-\infty, b]$. Isto é, $x \leq b$. Como I é ilimitado inferiormente, existe $a \in I$ tal que $a < x$. Como ambos a e b pertencem a I, pela definição de intervalo isso implica que $x \in I$. Provamos, então, que $]-\infty, b] \subset I$ e, portanto, os dois conjuntos são iguais.

Caso 3: I é limitado e não possui máximo. Nesse caso, usando o axioma do supremo tome $b = sup\, I$. Mostraremos que $I =]-\infty, b[$. Primeiro vejamos que $I \subset]-\infty, b[$. Seja $x \in I$. Como b é supremo e, portanto, limitante superior de I, temos que $x \leq b$. Mas não podemos ter $x = b$, porque vimos que se o supremo de um conjunto só pertence a ele quando é o seu máximo. Logo, $x < b$ e, portanto, $x \in]-\infty, b[$. Reciprocamente, se $x \in]-\infty, b[$, temos que $x < b$. Como b é supremo de I, x não pode ser limitante superior de I. Logo, existe $y \in I$ tal que $x < y$. Por outro lado, como I não é limitado inferiormente, existe $a \in I$ tal que $a < x$. Portanto, pela definição de intervalo, temos $x \in I$, como queríamos.

Os outros casos deixamos como exercício.

($\Leftarrow$) Suponha que em $(X, +, \cdot, <)$ todo intervalo possui um dos formatos da Definição 5.3. Provaremos que vale o axioma de Dedekind, que provamos ser equivalente (em corpos ordenados) ao axioma do supremo.

Seja (A, B) um corte em X. Provaremos que A possui máximo ou B possui mínimo.

Pela definição de corte, se $x \in A$ e $y < x$ então $y \in A$. Isso satisfaz, em particular, que A é um intervalo. É fácil ver que é um intervalo não-degenerado, ilimitado inferiormente, e limitado superiormente. Usando a hipótese de que A possui um dos formatos listados na Definição 5.3, as duas únicas possibilidades são: ou $A =]-\infty, b]$ ou $]-\infty, b[$, para algum $b \in X$. No primeiro caso, temos que b é o máximo de A. Falta verificar que, no segundo caso, b é o mínimo de B. De fato, como $A \cup B = X$, como $b \notin A$ temos $b \in B$. Para mostrar que b é o mínimo de B, mostraremos que para todo $x \in B$ temos $x \geq b$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in B$ tal que $x < b$. Por definição temos $x \in A$, contradizendo que $A \cap B = \emptyset$. ■

Exercício 5.5. Mostre o seguinte dos casos pendentes da demonstração anterior: se I é um intervalo não-degenerado, aberto e limitado, em $\mathbb{R}$, então I é da forma $]a, b[$, para $a < b$.

Exercício 5.6. Mostre que em qualquer corpo ordenado (mesmo não completo), todo intervalo fechado não-degenerado tem a forma $[a, b]$, para $a < b$.

5.2 Propriedade dos intervalos encaixantes

Definição 5.7. Dizemos que um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ satisfaz a *propriedade dos intervalos encaixantes* se, dada uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos fechados em X tal que $I_{n+1} \subset I_n$, para todo n, a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é não-vazia. Isto é, existe $x \in X$ tal que $x \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Na definição não exigimos que os intervalos são não-degenerados. Mas fica claro que se algum I_n for unitário (lembre-se de que o conjunto vazio não é um intervalo fechado), então todos os I_n's seguintes serão iguais, e fica claro que esse único ponto é a intersecção de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercício 5.8. Dê exemplos para mostrar que:

(a) $\mathbb{Q}$ não satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes;

(b) A propriedade dos intervalos encaixantes seria falsa em qualquer corpo ordenado se trocássemos a hipótese "intervalos fechados" por "intervalos abertos limitados".

Teorema 5.9. *O corpo dos números reais satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes.*

Demonstração: Seja $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos fechados em um corpo ordenado $(X,+,\cdot,<)$ tal que $I_{n+1} \subset I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo comentário anterior, podemos assumir que cada I_n é um intervalo não-degenerado.

Escreva $I_n = [a_n, b_n]$. Como $I_{n+1} \subset I_n$, temos $a_{n+1} \geq a_n$ e $b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais do que isso, por indução podemos mostrar que, se $n > m$, $a_n \geq a_m$ e $b_n \leq b_m$. Disso segue que, para todos $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$(*) \qquad a_n \leq b_m.$$

De fato, tome k o máximo entre n e m. Temos

$$a_n \leq a_k < b_k \leq b_m,$$

provando $(*)$.

Logo, o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente, e claramente não-vazio. Tome a o supremo desse conjunto. Temos que $a_n \leq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se existisse n tal que $b_n < a$, pela definição de supremo teríamos $b_n < a_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, contradizendo $(*)$. Logo, $a \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos, então, que $a \in [a_n, b_n]$, para todo n, provando que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. ■

Corolário 5.10. *O conjunto dos números reais é infinito e não-enumerável.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Mostraremos que f não é sobrejetora.

Construímos por indução uma sequência de intervalos encaixantes $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $f(n) \notin I_n$. Para isso, tomamos $I_0 = [f(0)+1, f(0)+2]$. Tendo definido I_n fechado e não-degenerado, definimos $I_{n+1} \subset I_n$ um intervalo fechado não-degenerado tal que $f(n+1) \notin I_{n+1}$ (fica como exercício provar que existe).

Usando a propriedade dos intervalos encaixantes, tome $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) \neq x$, pois $x \in I_n$ e $f(n) \notin I_n$.

Provamos que f não é sobrejetora em $\mathbb{R}$ e, portanto, não é bijetora. Como tomamos f qualquer função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, concluímos que não existe função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

■

Corolário 5.11. *Qualquer intervalo não-degenerado em $\mathbb{R}$ é não-enumerável.*

Demonstração: Repetimos a demonstração anterior, só que tomando f uma função de $\mathbb{N}$ em um intervalo não-degenerado I. Como I_0, tomamos qualquer intervalo não-degenerado contido em I e que não contém o ponto $f(0)$, o que é possível pelo mesmo argumento apresentado na demonstração. ■

5.3 Módulo de números reais

Antes de falarmos de limite de uma sequência, precisamos lembrar o conceito de módulo de números reais e mostrar algumas propriedades.

Definição 5.12. Seja x um número real. Definimos o *módulo* de x – que será denotado por $|x|$ – da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exercício 5.13. Dado um número real x, prove que

(a) $|x| \geq 0$;

(b) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(c) $|-x| = |x|$.

Teorema 5.14. *Para todos x, y reais temos*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Demonstração: A demonstração é feita caso a caso. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos $x \cdot y \geq 0$ e, portanto,

$$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Se $x \geq 0$ e $y < 0$ temos $x \cdot y \leq 0$ e, portanto,

$$|x \cdot y| = -(xy) = x(-y) = |x| \cdot |y|.$$

Se $x < 0$ e $y \geq 0$ é análogo. Se $x < 0$ e $y < 0$ temos $xy > 0$ e, portanto,

$$|x \cdot y| = xy = (-x)(-y) = |x| \cdot |y|.$$

■

Na definição de convergência de sequência, é importante entendermos o módulo da diferença de dois números reais como a distância desses números. O próximo exercício traduz melhor essa ideia.

Exercício 5.15. Sejam x, y e ε números reais tais que $\varepsilon > 0$. Mostre que $|x - y| < \varepsilon$ se, e somente se $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Exercício 5.16. Mostre que, se $x, y \in [a, b]$, sendo $a < b$, então $|x - y| \leq b - a$.

Sugestão: Sabemos, pela tricotomia, que vale $x \leq y$ ou $y \leq x$. Suponha $x \leq y$. Nesse caso, $|x-y| = y-x$. Observe que $b-a = (y-x)+(x-a)+(b-y)$. Use isso para concluir que $b - a \geq y - x$. O caso $y \leq x$ é parecido.

Teorema 5.17 (Desigualdade triangular)**.** *Se x e y são números reais,*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Demonstração: Façamos caso a caso. Se x e y são ambos positivos, temos que $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. Analogamente, se x e y são ambos negativos, $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$. Se x ou y é igual a 0, também é óbvia a igualdade. Falta analisarmos o caso em que $x > 0$ e $y < 0$ (o outro caso, em que $x < 0$ e $y > 0$, é totalmente análogo).

Se $x + y \geq 0$, temos

$$|x + y| = x + y \leq x = |x| \leq |x| + |y|.$$

Se $x + y < 0$, temos

$$|x + y| = -x - y \leq -y = |y| \leq |x| + |y|.$$

■

Corolário 5.18. *Para todos x, y e z números reais, temos*

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

Demonstração: Usamos aqui um artifício bem comum, que é "somar e subtrair" dentro de um módulo. Usando a desigualdade triangular temos

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|$$

■

Corolário 5.19. *Para todos x, y, z e ε números reais, se $|x - y| < \varepsilon$ e $|y - z| < \varepsilon$, então $|x - z| < 2\varepsilon$.*

Demonstração: Pelo Corolário 5.19 temos

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

5.4 Sequências convergentes

Vimos como o módulo da diferença de dois números reais (ou de dois elementos de um corpo ordenado qualquer) representa a distância entre esses dois números. Agora discutiremos a definição de convergência de sequência. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se x_n *se aproxima arbitrariamente de x quando n tende ao infinito*. Isso significa que, dada qualquer margem de erro $\varepsilon > 0$, a partir de um momento, na sequência, todos os elementos dessa estão a uma distância inferior a ε de x.

Definição 5.20. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ *converge* para $x \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq n_0$ então

$$|x - x_n| < \varepsilon.$$

Nesse caso, também dizemos que x é o *limite* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e usamos as seguintes notações:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Lema 5.21. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$$

é finito.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para x. Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Pela contrapositiva, se $|x_n - x| \geq \varepsilon$, temos que $n < n_0$. Logo, $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\} \subset \{0, \ldots, n_0 - 1\}$ e, portanto, é um conjunto finito (pois está contido em um conjunto finito).

Reciprocamente, suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência e x um elemento do corpo tal que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ é finito. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x.

Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ é finito e, portanto, possui um máximo. Seja m o máximo desse conjunto e $n_0 = m + 1$. Isso significa que, para todo $n > m$, não vale $|x_n - x| \geq \varepsilon$, o que, pela tricotomia implica que $|x_n - x| < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$, temos $|x_n - x| < \varepsilon$. ■

Teorema 5.22. *O limite de uma sequência, quando existe, é único.*

Demonstração: Suponha que x e y são ambos limites de uma mesma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e suponha que $x \neq y$. Tome $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ temos

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Tome, agora, $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_1$ temos

$$|x_n - y| < \varepsilon.$$

Fixe um natural n maior que o máximo entre n_0 e n_1. Temos $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|x_n - y| < \varepsilon$. Logo, pelo Corolário 5.19 temos

$$|x - y| < 2\varepsilon,$$

absurdo, pois pela definição de ε temos $|x - y| = 2\varepsilon$. ■

Definição 5.23. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é:

(a) *crescente* se $n > m$ implica que $x_n \geq x_m$;

(b) *decrescente* se $n > m$ implica que $x_n \leq x_m$;

(c) *estritamente crescente* se $n > m$ implica que $x_n > x_m$;

(d) *estritamente decrescente* se $n > m$ implica que $x_n < x_m$;

(e) *monótona* se é crescente ou decrescente;

(f) *limitada* se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente e limitado inferiormente;

(g) *constante* se existe $x \in X$ tal que $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(h) *eventualmente constante* se existem $x \in X$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = x$, para todo $n \geq n_0$.

Chamamos a atenção para o fato de que algumas das expressões acima não são unânimes na literatura. Alguns livros chama de *crescente* o que aqui chamamos de *estritamente crescente*, e de *não-crescente* o que chamamos de *crescente*, o mesmo acontecendo com as definições de decrescente.

Exercício 5.24. Prove que, em um corpo ordenado completo, toda sequência monótona e limitada converge.

Dica: Se a sequência for crescente, o limite será o supremo dos seus elementos. Se for decrescente, será o ínfimo.

Teorema 5.25. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge a x. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de convergência, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $|x_n - x| < 1$. Pelo Exercício 5.15 isso implica que, para todo $n \geq n_0$,

$$x - 1 < x_n < x + 1.$$

Tome b o máximo de $\{x_0, \ldots, x_{n_0-1}, x+1\}$ (lembrando que, pela tricotomia, fica fácil provar que todo conjunto finito possui máximo) e a o mínimo de $\{x_0, \ldots, x_{n_0-1}, x-1\}$. Está claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$a \leq x_n \leq b.$$

■

Teorema 5.26. *Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências que convergem para x e y, respectivamente. Então*

(a) *$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x + y$;*

(b) *$(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para xy;*

(c) *se $x \neq 0$ e $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\frac{1}{x}$.*

Demonstração: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como na hipótese. Mostremos, primeiro, que $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x + y$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ temos

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tal n_1 existe porque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Da mesma forma tomemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_2$ temos

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja n_0 o máximo entre n_1 e n_2. Usando a desigualdade triangular, para todo $n \geq n_0$ temos

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

concluindo a parte (a) so teorema.

Agora vamos mostrar que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para xy.

Considere M o máximo entre $|x|+1$ e $|y|+1$. Temos que $M > 0$, $|x| < M$ e $|y| < M$.

Seja $\varepsilon > 0$. Precisamos mostrar que existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos

$$|x_n y_n - xy| < \varepsilon. \tag{1}$$

Podemos supor que $\varepsilon \leq 1$. De fato, se $\varepsilon > 1$, se conseguirmos provar que $|x_n y_n - xy| < 1$ em particular provamos que $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$.

Usando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x e que $M > 0$, existe n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{2}$$

Agora, usando que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y, existe n_2 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{3}$$

Tome n_0 o maior entre n_1 e n_2. Note que, como $\varepsilon < 1$ e $M \geq 1$, temos que, para todo $n \geq n_0$,

$$|x_n - x| \cdot |y_n - y| < \frac{\varepsilon^2}{16M^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Observe que vale a seguinte igualdade [1]:

$$x_n y_n - xy = (y_n - y)x + (x_n - x)y + (x_n - x)(y_n - y).$$

Aplicando a desigualdade triangular (duas vezes) na expressão acima, e aplicando o Teorema 5.14, obtemos

$$|x_n y_n - xy| \leq |y_n - y| \cdot |x| + |x_n - x| \cdot |y| + |x_n - x| \cdot |y_n - y|.$$

[1] Para conferir essa igualdade basta aplicar a distributividade e cancelar os termos opostos. Para saber como encontramos essa fórmula, suponha $x < x_n$ e $y < y_n$ e utilize a seguinte figura: um retângulo de base x e altura y dentro – na região inferior esquerda – de um retângulo de base x_0 e altura y_0. Calcule, geometricamente, a diferença das áreas dos dois retângulos.

Aplicando, então, as desigualdades (2), (3) e (4), além de $|x| < M$ e $|y| < M$, na expresão acima, obtemos

$$|x_n y_n - xy| < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

provando o item (b).

Para o item (c), suponha que $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $x \neq 0$. Mostremos que $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\frac{1}{x}$.

Primeiro observemos o seguinte: existe n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos

$$|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$$

Para provarmos isso, tome $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. Tome n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$, temos $|x_n - x| < \varepsilon$. Pelo Exercício 5.15 isso significa que

$$x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[.$$

Se $x > 0$, temos $|x| = x$ e

$$x_n \geq x - \varepsilon = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Como $\frac{x}{2} > 0$, isso implica que $x_n > 0$ e, portanto, $|x_n| = x_n$, provando que $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$.

Se $x < 0$, temos $|x| = -x$ e

$$x_n \leq x + \varepsilon = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Logo, $x_n < 0$ e $-x_n \geq -\frac{x}{2} = \frac{|x|}{2}$. Como $x_n < 0$, temos $|x_n| = -x_n$, provando novamente que $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$.

Em particular, temos, para todo $n \geq n_1$,

$$|xx_n| = |x| \cdot |x_n| \geq \frac{|x|^2}{2}$$

e, portanto,

(5) $$\frac{1}{|xx_n|} \leq \frac{2}{|x|^2}.$$

Fixe n_1 satisfazendo (5), para todo $n \geq n_1$, e seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Tome $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_2$ temos

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon |x|^2}{2}. \tag{6}$$

Usando (5) e (6) e tomando n_0 o maior entre n_1 e n_2, temos, para todo $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_n}| = \frac{|x_n - x|}{|x x_n|} < \frac{\varepsilon |x|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x|^2} = \varepsilon,$$

provando (c). ■

Corolário 5.27. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência que converge a x e λ é um número real, então $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência que converge a λx.*

Demonstração: Aplique o teorema anterior tomando $y_n = \lambda$, para todo n. Obviamente a sequência y_n converge a λ. ■

Exercício 5.28. Verifique quais das sequências abaixo são convergentes em $\mathbb{R}$, e calcule o limite, quando existir. Justifique sua resposta.

(a) $x_n = \dfrac{1}{n}$;

(b) $x_n = \dfrac{1}{10^n}$;

(c) $x_n = (-1)^n$;

(d) $x_n = n$;

(e) $x_n = 2 + \dfrac{3}{2^n}$;

(f) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

(g) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

(h) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$;

(i) $x_n = \dfrac{n^2 - 1}{3n^2 + 2n + 1}$;

(j) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida recursivamente da seguinte forma: $x_0 = 1$ e, definido x_n, definimos x_{n+1} como:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + \frac{1}{2^n} & \text{se } x_n^2 < 2 \\ x_n - \frac{1}{2^n}, & \text{se } x_n^2 \geq 2 \end{cases}$$

Exercício 5.29. Tome $\varepsilon = 0,1$. Para cada sequência convergente do exercício 5.28, encontre um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$, onde x é o limite da sequência. Justifique sua resposta.

5.5 Sequências de Cauchy

Vimos que uma sequência converge se seus elementos se aproximam arbitrariamente do limite da sequência, à medida que n cresce. Já em uma sequência de Cauchy, os elementos da sequência vão ficando arbitrariamente próximos *entre si*, à medida que n cresce. Toda sequência convergente é de Cauchy (se os elementos da sequência vão se aproximando de um determinado número, então eles também estarão próximos entre si). Mas será que vale a recíproca? Isto é, toda sequência de Cauchy converge? Veremos que essa é mais uma caracterização dos corpos ordenados completos.

Definição 5.30. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é uma *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n > n_0$,

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Teorema 5.31. *Toda sequência de Cauchy em um corpo ordenado é limitada.*

Demonstração: Semelhante à demonstração do Teorema 5.25. ■

Teorema 5.32. *Toda sequência convergente em um corpo ordenado é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente a x. Seja $\varepsilon > 0$. Como x_n converge a x, existe n_0 tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Pelo Corolário 5.18, temos, para todos $n, m \geq n_0$,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Vejamos agora que a recíproca do teorema acima é verdadeiro quando o corpo ordenado é completo.

Teorema 5.33. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*

Ideia intuitiva da prova: Como toda sequência de Cauchy é limitada, para cada n natural tomamos a_n o ínfimo dos pontos da sequência *a partir de* n, e b_n o supremo dos pontos da sequência *a partir de* n. Como o conjunto dos pontos da sequência a partir de n vai ficando "menor", à medida que n aumenta, os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ são encaixantes (isto é, satisfazem a hipótese da propriedade dos intervalos encaixantes). Usamos a propriedade dos intervalos encaixantes para encontrar x pertencente simultaneamente a todos esses intervalos.

Precisamos mostrar duas coisas. Primeiro: o tamanho desses intervalos tende a 0. Segundo: x é o limite da sequência (x_n). Do fato da sequência ser de Cauchy e, portanto, seus elementos ficarem arbitrariamente próximos, quando n tende a infinito, segue que esses intervalos têm tamanho convergindo a 0. E disso segue que x_n converge a x, visto que, a partir de n grande, todos os pontos da sequência pertencem a um pequeno intervalo I_n, que contém x. Portanto, para n grande todos os pontos estão próximos de x.

Nisso usaremos o Exercício 5.16, que prova que a distância entre dois pontos dentro de um intervalo não pode ser maior que a distância das extremidades do intervalo.

Agora formalizaremos os argumentos acima usando as definições, axiomas e teoremas.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Pelo Teorema 5.31 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Ou seja, o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superior e inferiormente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$a_n = inf\{x_k : k \geq n\}$$

e

$$b_n = sup\{x_k : k \geq n\}.$$

Como o supremo é sempre maior ou igual ao ínfimo, está claro que $a_n \leq b_n$.

Lembramos que, se $A \subset B$, então $inf\, A \geq inf\, B$ e $sup\, A \leq sup\, B$ (exercício). Logo, se $m > n$ então $a_m \geq a_n$ e $b_m \leq b_n$.

Portanto, se tomarmos os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, a sequência de intervalos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 5.9. Portanto, podemos tomar $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Vamos mostrar que x é o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observe que $x_k \in [a_n, b_n]$, para todo $k \geq n$.

Vamos provar que $b_n - a_n$ converge a 0. Como todos os x_k's, para $k \geq n$, bem como o próprio x, pertencem ao intervalo $[a_n, b_n]$, se mostrarmos que esses intervalos tendem ao tamanho 0, não resta outra possibilidade senão todos os x_k's também ficarem próximos de x.

Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_0 tal que, para todos $n, m \geq n_0$,

$$(1) \qquad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $a_{n_0} = inf\,\{x_k : k \geq n_0\}$, existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$a_{n_0} \leq x_{n_1} \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{3},$$

o que implica que

$$(2) \qquad |a_{n_0} - x_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analogamente, existe $n_2 \geq n_0$ tal que

$$(3) \qquad |b_{n_0} - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aplicando o Corolário 5.18 às desigualdades (1), (2) e (3) obtemos

$$|a_{n_0} - b_{n_0}| < \varepsilon.$$

Note que $|a_{n_0} - b_{n_0}| = b_{n_0} - a_{n_0}$, e que, como os intervalos são encaixantes, temos que $b_n - a_n \leq b_{n_0} - a_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$, provando que $b_n - a_n$ converge a 0.

Agora vamos concluir o teorema, isto é, mostaremos que (x_n) converge a x. Seja $\varepsilon > 0$. Como acabamos de mostrar, existe n_0 tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Mas vimos que $x_n \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, para todo $n \geq n_0$, e também $x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Pelo Exercício 5.16 temos, para todo $n \geq n_0$,

$$|x_n - x| \leq |b_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon$$

■

Exercício 5.34. Dê um exemplo de sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não é convergente. Justifique.

Exercício 5.35. Tome $\varepsilon = 0,1$. Para cada sequência do exercício 5.28, encontre, quando existir, um n_0 tal que, para todos $n, m \geq n_0$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Justifique sua resposta, inclusive no caso em que não existir n_0.

5.6 Subsequências

Definição 5.36. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências em um corpo ordenado. Dizemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *subsequência* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência estritamente crescente [2] $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{k_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.37. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em um corpo ordenado, então todas as suas subsequências também são convergentes, e convergem para o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge a x. Seja $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente em $\mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ também converge a x.

Observe que, como $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, temos $k_n \geq n$, para todo n. De fato, podemos provar isso por indução. Temos $k_0 \geq 0$. Suponha, por hipótese indutiva, que $k_n \geq n$. Temos $k_{n+1} > k_n$ e, portanto, como estamos no conjunto dos números naturais, $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$, temos $k_n \geq n_0$ e, portanto

$$|x_{k_n} - x| < \varepsilon,$$

[2] Vale aqui a mesma definição anterior que consideramos quando o contra-domínio é um corpo ordenado. Isto é, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente se $m > n$ implica $k_m > k_n$.

como queríamos. ■

Teorema 5.38. *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente.*

Ideia intuitiva da prova: Usaremos uma técnica chamada "bissecção". Se a sequência é limitada, podemos tomar $I_0 = [a_0, b_0]$ um intervalo fechado que contém todos os pontos da sequência. Basta, para isso, tomar a_0 um limitante inferior da sequência e b_0 um limitante superior. Pegamos o primeiro elemento da sequência como o primeiro elemento da seubsequência que queremos encontrar. Ou seja, $x_{k_0} = x_0$.

Seja c o ponto médio de I_0. Como a sequência é infinita, ou existem infinitos pontos abaixo de c (incluindo c) ou existem infinitos acima de c. Suponha que seja o primeiro caso. Então "apagamos" da sequência os pontos acima de c e consideramos só os que ficam abaixo dele. Encontramos, assim, um intervalo I_1 que possui metade do tamanho de I_0 e contém todos os pontos da nossa "nova sequência". Tomamos x_{k_1} o primeiro ponto da sequência que pertence ao intervalo I_1 e vem depois de x_{k_0} (isto é, $k_1 > k_0$).

Prosseguindo essa construção, os pontos da subsequência que vamos obtendo vão ficando cada vez mais "espremidos" nesses intervalos I_n, que vão ficando cada vez menores à medida que n tende ao infinito. Desse modo, os pontos da subsequência vão ficando muito próximos um dos outros, para n grande, e, portanto, formam uma sequência de Cauchy, que provamos ser convergente.

Para uma demonstração rigorosa, precisamos formalizar esse argumento "e assim por diante" através de uma definição recursiva desses intervalos I_n e da subsequência x_{k_n}. Precisamos, também, determinar em cada momento, um conjunto X_n dos índices da remanescentes da sequência (isto é, aqueles que ainda não "apagamos").

Vamos agora à demonstração rigorosa.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Sejam a_0 um limitante inferior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e b_0 um limitante superior. Tomando $I_0 = [a_0, b_0]$ e $X_0 = \mathbb{N}$, vamos definir recursivamente uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos e uma sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de números reais satisfazendo:

1. $I_n \subset I_{n-1}$, quando $n > 0$;

2. $X_n \subset X_{n-1}$, quando $n > 0$;

3. X_n é infinito;

4. $\{x_k : k \in X_n\} \subset I_n$;

5. $I_n = [a_n, b_n]$ e $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Está claro que I_0 e X_0 satisfazem todos os itens acima, lembrando que 1 e 2 só são considerados quando $n > 0$. Suponha que temos definidos X_i e I_i para i entre 0 e n. Vamos definir X_{n+1} e I_{n+1}.

Considere c o ponto médio de I_n. Isto é, $c = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Por hipótese X_n é infinito e $x_k \in I_n$, para todo $k \in X_n$. Como $I_n = [a_n, c] \cup [c, b_n]$, temos:

$$X_n = \{k \in X_n : x_k \in [a_n, c]\} \cup \{k \in X_n : x_k \in [c, b_n]\}.$$

Como a união de dois conjuntos finitos é um conjunto finito, pelo fato de X_n ser infinito é necessário que pelo menos um dos conjuntos que formam a união acima é infinito.

Se $\{k \in X_n : x_k \in [a_n, c]\}$ é infinito, tome $I_{n+1} = [a_n, c]$ e $X_{n+1} = \{k \in X_n : x_k \in [a_n, c]\}$.

Caso contrário, temos que $\{k \in X_n : x_k \in [c, b_n]\}$ é infinito. Tome $I_{n+1} = [c, b_n]$ e $X_{n+1} = \{k \in X_n : x_k \in [c, b_n]\}$.

As propriedades 1, 2, 3 e 4 da construção recursiva claramente valem para X_{n+1} e I_{n+1}, pela forma como foram definidos. A propriedade 5 segue do fato que c é o ponto médio de I_n e, portanto, I_{n+1} tem metade do tamanho de I_n.

Agora vamos construir recursivamente uma sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ tal que x_{k_n} é convergente. Defina k_0 como 0 e, uma vez definido k_n definimos k_{n+1} como o menor elemento de X_{n+1} maior do que k_n (existe, pois X_{n+1} é infinito). Fica claro, pela construção, que $k_n \in X_n$, para todo n, e, consequentemente, $x_{k_n} \in I_n$.

Vamos mostrar que $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pelo Teorema 5.33, é suficiente mostrar que x_{k_n} é uma sequência de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$. Usando a propriedade arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0}.$$

Podemos provar por indução que $2^n > n$. Portanto

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0}.$$

Logo,

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Tomando a, b tais que $I_{n_0} = [a, b]$, pela condição 5 da construção de I_n, temos

$$b - a < \varepsilon.$$

Note que, para todos $n, m \geq n_0$, temos que x_{k_n} e x_{k_m} pertencem a I_{n_0}. Logo, pelo Exercício 5.16, temos, para todos $n, m \geq n_0$,

$$|x_{k_n} - x_{k_m}| < \varepsilon$$

■

Exercício 5.39. *Para cada uma das sequências em $\mathbb{R}$ abaixo, encontre uma subsequência convergente, se houver. Verifique, também, se a sequência é limitada e se é convergente.*

(a) $x_n = n$;

(b) $x_n = (-1)^n$;

(c) $x_n = (-1)^n n$;

(d) $x_n = \frac{a}{b}$, *se* $n = 2^a(2b - 1)$, *ou* $x_n = 0$, *se* $n = 0$ *(mostre também que* x_n *está bem definido).*

5.7 Limite infinito

Definição 5.40. Dizemos que uma sequência real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a infinito* ou que *o limite da sequência é infinito* se, para todo $A \in \mathbb{R}$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n > A$. Quando isso acontece escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a menos infinito* ou que *o limite da sequência é menos infinito* se, para todo $A \in \mathbb{R}$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n < A$. Quando isso acontece escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Atenção: Uma sequência que tende ao infinito **não** é convergente. Está errado falar que a sequência *converge ao infinito.* A notação $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ é um abuso de notação, pois ∞ e $-\infty$ **não** são números reais. Na verdade, sequer definimos individualmente os símbolos ∞ e $-\infty$, de modo que devemos ler a expressão $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ apenas como uma abreviatura da expressão "a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a infinito", sem interpretar o símbolo de igualdade da maneira usual, como uma igualdade entre dois termos previamente definidos.

Teorema 5.41. *Suponha que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tende a infinito (ou a menos infinito) e que $x_n \neq 0$, para todo n. Então a sequência $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Tome $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Pela definição de limite infinito, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n > A$. Mas isso implica que, para todo $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{x_n} - 0| = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{A} = \varepsilon,$$

provando que a sequência $(\frac{1}{x_n})$ converge a 0.

No caso em que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a menos infinito, procedemos de forma análoga, tomando $A = -\frac{1}{\varepsilon}$ e n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n < A$. Disso segue que, para todo $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{x_n} - 0| = -\frac{1}{x_n} < -\frac{1}{A} = \varepsilon,$$

■

5.8 A sequência a^n

Mostraremos nesta que, para todo número real a entre 0 e 1 a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Lema 5.42. *Sejam $\varepsilon > 0$ um número real e n um número natural. Então*

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$$

Demonstração: Provaremos a desigualdade acima por indução em n. Primeiro observamos que a desigualdade é verdadeira para $n = 0$, pois $(1+\varepsilon)^0$ e $1+0\varepsilon$ são ambos iguais a 1. Suponha que vale $(1+\varepsilon)^n \geq 1+n\varepsilon$. Mostaremos que a desigualdade vale também para $n+1$ no lugar de n.

Temos

$$(1+\varepsilon)^{n+1} = (1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon) \geq (1+n\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1+n\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon^2 \geq 1+(n+1)\varepsilon$$

■

Teorema 5.43. *Em $\mathbb{R}$, se $a > 1$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = a^n$ tende a infinito.*

Demonstração: Fixe $\varepsilon = a - 1$ e seja $A > 0$. Usando a propriedade arquimediana dos números reais, tome n_0 um número natural tal que $n_0 > \frac{A}{\varepsilon}$. Para todo $n \geq n_0$, usando o Lema 5.42 temos

$$a^n = (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + n_0\varepsilon > \frac{A}{\varepsilon}\varepsilon = A.$$

■

Corolário 5.44. *Em $\mathbb{R}$, se $a \in]0,1[$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = a^n$ converge a 0.*

Demonstração: Note que, se $x_n = a^n$, para $a \in]0,1[$, então $\frac{1}{x_n} = (\frac{1}{a})^n$, sendo que $\frac{1}{a} > 1$. Logo, pelo Teorema 5.43 a sequência $\frac{1}{x_n}$ tende a infinito. Como $\frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n$, segue do Teorema 5.41 que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. ■

Exercício 5.45. *Calcule o limite de cada uma das sequências abaixo, inclusive nos casos em que o limite é infinito ou menos infinito.*

(a) $\dfrac{1+2^n}{3^n}$;

(b) $1 + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$;

(c) $\dfrac{3^n}{1+2^n}$;

(d) $\dfrac{2^n + 1}{n^2}$;

(e) $2 - \dfrac{n^2}{n + 5}$.

Exercício 5.46. *Nos casos do exercício 5.45 em que o limite é infinito ou menos infinito, encontre n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n| > 100$.*

Capítulo 6

Séries numéricas e representação decimal

6.1 Séries

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, e sejam $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $n_0 \leq n_1$. Usamos a notação $\sum_{n=n_0}^{n_1} a_n$ para representar a soma de a_{n_0} até a_{n_1}. Formalmente, usando recursão a partir de n_0, definimos:

$$\sum_{n=n_0}^{n_0} a_n = a_{n_0}$$

e

$$\sum_{n=n_0}^{n_1+1} a_n = (\sum_{n=n_0}^{n_1} a_n) + a_{n_1}.$$

Definimos uma *série numérica* – ou simplesmente *série* – como uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para a qual existe uma outra sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_N = \sum_{n=0}^{n=N} a_n$. Dizemos que a série é *convergente* se a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Por um abuso de notação (um dos piores de todo o curso), usamos a notação $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tanto para representar a série $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – que também pode ser escrita como $(\sum_{n=0}^{n=N} a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ – quanto para representar o limite da série, quando esse existir.

Eventualmente usaremos a notação simplificada $\sum a_n$ no lugar de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Os números a_n são chamados de *termos* da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Das propriedades aritméticas dos limites de sequências, e da distributividade, segue facilmente o seguinte teorema:

Teorema 6.1. *Suponha que as séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *convirjam para* a *e* b*, respectivamente, e seja* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Temos que*

(a) *A série* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge para* $a + b$*;*

(b) *A série* $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)$ *converge para* λa*.*

Demonstração: Pelas propriedades comutativa e associativa da adição temos que, para as somas parciais, vale

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Portanto, o item (a) segue da igualdade acima e do teorema sobre o limite da soma de sequências.

Pela propriedade distributiva temos

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

de modo que, da propriedade análoga mostrada para sequências, concluímos o item (b). ■

Exemplo 6.2 (Soma infinita de uma PG)**.** Se $0 < a < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge para $\dfrac{1}{1-a}$.

Demonstração: Usando a distributividade observamos que

$$(\sum_{i=0}^{n} a^i) \cdot (1-a) = (\sum_{i=0}^{n} a^i) - (\sum_{i=0}^{n} a^{i+1})$$

Aplicando a comutatividade e associatividade, "cancelamos" elementos opostos e chegamos na expressão

$$(\sum_{i=0}^{n} a^i) \cdot (1-a) = 1 - a^{n+1}$$

Logo

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Portanto, usando o fato, já provado, que a^n tende a 0, quando $0 < a < 1$, pelas propriedades aritméticas do limite concluímos que o limite acima é $\dfrac{1}{1-a}$. ■

Exercício 6.3. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{6^n}$ converge e calcule o seu limite.

Exercício 6.4. Prove que, se $0 < a < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge para $\dfrac{a}{1-a}$

Teorema 6.5 (Critério de Cauchy)**.** *Uma série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que para todos* $i, j \geq n_0$*, sendo* $j \geq i$*, temos* $|\displaystyle\sum_{n=i}^{n=j} a_n| < \varepsilon$.

Demonstração: O critério de Cauchy segue do teorema que diz que, em um corpo ordenado completo (lembrando que, a partir deste capítulo, estamos assumindo em todos os teoremas que estamos trabalhando nos números reais), uma sequência converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

No caso, se tomarmos $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais, Dados $i \leq j$ temos que

$$|s_j - s_i| = |\sum_{n=i+1}^{n=j} a_n|.$$

Assim, a menos de uma pequena correção por causa do índice (começando de i em vez de $i+1$), a tese do teorema é exatamente a condição da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser de Cauchy. ■

Corolário 6.6. *Se uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0.*

Exercício 6.7. Prove o corolário acima.

Observe que o corolário dá uma condição necessária, mas não suficiente, para a convergência de uma série. Um contra-exemplo é a série harmônica, conforme segue abaixo:

Exemplo 6.8 (Série harmônica)**.** A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Demonstração: Utilizaremos a notação $\mathbb{N}^*$ para $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ou seja, $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Para mostrar que a sequência não converge, basta mostrar que ela não é limitada (pois mostramos que toda sequência convergente é limitada). Para isso é suficiente mostrar que a subsequência $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada.

Vamos "quebrar" a sequência s_{2^n} em $n+1$ partes da seguinte forma: cada "pedaço" começa do termo seguinte ao pedaço anterior e termina na próxima potência de 2. Formalmente, escrevemos

$$s_{2^n} = \sum_{k=0}^{n} A_k,$$

onde $A_0 = 1$ e, para $K \geq 1$,

$$A_k = \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i}.$$

Por exemplo, para $n = 3$, temos

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}),$$

de modo que

$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = \frac{1}{2},$$
$$A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

e

$$A_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}.$$

Está claro que s_{2^n} de fato é a soma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k$.

Observamos que, se $i \leq j$, então $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{j}$ (isso foi provado no capítulo 2). Assim, temos, para cada $k \geq 1$,

$$A_k = \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k} = \frac{2^k}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

Portanto, temos

$$s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2}.$$

logo, dado $A \in \mathbb{R}$, usando a propriedade arquimediana encontramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2A$, de onde segue que $s_{2_n} > A$, provando que a sequência é ilimitada. ■

Uma outra consequência imediata do critério de Cauchy é que se mudarmos uma quantidade finita de termos de uma série, isso não vai mudar o fato dela ser ou não convergente.

Exercício 6.9. Sejam $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries tais que, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, temos $a_n = b_n$, para todo $n > n_0$. Prove que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

Definição 6.10. Uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *absolutamente convergente* se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Teorema 6.11. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração: Consequência do critério de Cauchy e da desigualdade triangular, visto que $\displaystyle|\sum_{n=i}^{n=j} a_n| \leq \sum_{n=i}^{n=j} |a_n|$. ■

Teorema 6.12. *Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série tal que $a_n \geq 0$, para todo n. Temos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, ela é limitada superiormente. Isto é, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n < M$, para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Se $a_n > 0$, para todo n, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é crescente. Como toda sequência convergente é limitada e toda sequência monótona e limitada é convergente (em $\mathbb{R}$), concluímos que uma sequência monótona é convergente se, e somente se, é limitada, de onde segue o teorema. ■

Teorema 6.13 (Critério da comparação)**.** *Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries. Suponha que existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tais que, para todo $n \geq n_0$ temos $|b_n| \leq c a_n$. Temos que, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também converge.*

Exercício 6.14. Prove o critério da comparação.

Exercício 6.15. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge e calcule o seu limite (dica: mostre a igualdade $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e use-a).

Exercício 6.16. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (dica: use o exercício anterior e o critério da comparação).

Exercício 6.17. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge (dica: use o exercício anterior e o critério da comparação).

Para o próximo exercício lembramos a definição recursiva de fatorial: definimos $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1) \cdot (n!)$.

Exercício 6.18. Prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

O próximo exercício introduz a ideia de representação decimal de número real, tema da próxima seção.

Exercício 6.19. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$, para todo $n \geq 1$. Prove que a sequência $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge.

Exercício 6.20. Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$$

6.2 Representação decimal

A representação decimal de um número real não é utilizada com frequência na matemática teórica, mas é bastante comum nas aplicações e na matemática do ensino básico. Por isso é de suma importância para o futuro professor de matemática conhecer melhor essa linguagem, que costuma ser ensinada nos livros de ensino fundamental e médio de maneira superficial e imprecisa. Cabe à disciplina de análise real estudá-la de maneira rigorosa, conforme o padrão de formalismo que estamos seguindo até agora.

Aprendemos no ensino básico três tipos de representações decimais: a representação decimal finita (isto é, que possui apenas uma quantidade finita de algarismos após a vírgula), a dízima periódica infinita (que possui infinitos algarismo após a vírgula, mas que se repetem ciclicamente a partir de algua casa decimal) e a dízima não-periódica. Veremos como formalizar esses conceitos e discutiremos um pouco sobre a caracterização dos números irracionais com as dízimas não-periódicas.

Começaremos provando o seguinte resultado, que nada mais é do que a igualdade 0,999...=1.

Lema 6.21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$

Demonstração: Pela propriedade arquimediana e pelo fato de 10^n ser maior que n (pode-se provar isso facilmente por indução), sabemos que a sequência $\dfrac{1}{10^n}$ converge a 0. E, portanto, a sequência $1 - \dfrac{1}{10^n}$ converge a 1. Então, para provar o lema, é suficiente provar que as somas parciais são iguais a $1 - \dfrac{1}{10^n}$. Isto é, provaremos por indução em n que

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

É fácil verificar que $(*)$ é válido para $n = 1$, pois, nesse caso, a soma parcial é $\dfrac{9}{10}$, que é igual a $1 - \dfrac{1}{10}$.

Suponha que $(*)$ seja verdadeiro para n. Provaremos que vale também para $n + 1$. Isto é, provaremos que vale a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{9}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^{n+1}}.$$

De fato, temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{n+1}} = 1 - \frac{1}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} = 1 - \frac{1}{10^{n+1}}$$

■

Definição 6.22. Uma *representação decimal de um número real* é uma série da forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ ou $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a_n}{10^n}$, onde $a_0 \in \mathbb{N}$ e $a_n \in [0, 9] \cap \mathbb{N}$, para todo $n \geq 1$.

Informalmente, denotamos a série acima por $a_0, a_1a_2\ldots$ ou $-a_0, a_1a_2\ldots$. É claro que isso não é preciso, visto que não descreve exatamente quem são todos os algarismos a_n, e apenas fornecem uma aproximação do número em questão. Por exemplo, quando escrevemos $\pi = 3,14\ldots$, não estamos fornecendo o valor exato de π, mas apenas uma aproximação de π, visto que, a partir da notação $3,14\ldots$ não podemos inferir quais são os próximos algarismos na sequência.

Veremos, a seguir, três fatos:

1. Uma representação decimal é sempre convergente.

2. Todo número real possui uma representação decimal.

3. Se aproximarmos um número real com n casas decimais, o erro é menor que $\frac{1}{10^n}$.

Teorema 6.23. *Toda representação decimal é uma série convergente.*

Demonstração: Como $0 \leq a_n \leq 9$, para todo $n \geq 1$, do Lema 6.21 e do critério da comparação segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge. Portanto, $a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ também converge, visto que somar uma constante a uma sequência convergente (no caso, a sequência das somas parciais) resulta em uma sequência convergente. Logo, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge. Como multiplicar por uma constante (no caso, -1) em uma série não afeta o fato dela ser convergente, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a_n}{10^n}$ também converge. ■

Teorema 6.24. *Toda número real possui uma representação decimal (isto é, todo número real é limite de uma representação decimal).*

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}$. Supomos que $x \geq 0$. No caso de x ser negativo, basta aplicarmos o raciocínio para o oposto de x e multiplicamos a série por -1.

Vamos construir por recursão uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0,9] \cap \mathbb{N}$, para $n \geq 1$, e a seguinte afirmação seja verdadeira:

$$P(n): \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

Para simplificar, escreveremos $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = S_n$.

Defina $a_0 = max\{m \in \mathbb{N} : m \leq x\}$.

Note que a_0 está bem definido. De fato, pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. Pela boa ordem dos números naturais, podemos tomar n como o menor natural tal que $n > x$. Como $x \geq 0$, temos $n > 0$. Logo, se tomarmos $m = n - 1$ temos $m \in \mathbb{N}$ e é o maior natural menor ou igual a x.

Pela definição de a_0, está claro que $a_0 \leq x < a_0 + 1$. Desse modo, provamos que $P(0)$ é verdadeiro.

Supomos que temos definidos a_k, para $k \leq n$, de modo que $a_k \in [0,9] \cap \mathbb{N}$, se $k \geq 1$, e de modo que $P(n)$ seja verdadeira. Definiremos $a_{n+1} \in [0,9] \cap \mathbb{N}$ de modo a satisfazer $P(n+1)$.

Definimos $a_{n+1} = max\{m \in [0,9] \cap \mathbb{N} : S_n + \frac{m}{10^{n+1}} \geq x\}$.

Observe que, pela hipótese $P(n)$, o conjunto acima é não-vazio, já que $S_n \leq x$ e, portanto, 0 pertence ao conjunto acima. Sendo um conjunto finito de números naturais, ele possui máximo. Pela definição está claro que $S_{n+1} = S_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x$. Portanto, para mostrar $P(n+1)$ resta provar que

$$(*) \qquad S_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} > x.$$

Separaremos a prova em dois casos:

Caso 1: $a_{n+1} < 9$. Neste caso, se $S_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \leq x$, temos

$$S_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} = S_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} = S_n + \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}} \leq x.$$

Como $a_{n+1} < 9$, temos que $a_{n+1} + 1 \in [0,9] \cap \mathbb{N}$, contradizendo a definição de a_{n+1} como o maior inteiro menor ou igual a 9 satisfazendo a desigualdade acima.

Caso 2: $a_{n+1} = 9$. Neste caso, temos

$$S_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} = S_n + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} = S_n + \frac{1}{10^n}.$$

Portanto, pela hipótese indutiva $P(n)$ temos que a expressão acima é maior do que x.

Feita a definição de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e mostrado que vale $P(n)$, falta mostrar que $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Para isso, precisamos provar que S_n converge para x. De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela propriedade arquimediana existe n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por outro lado, por $P(n)$ sabemos que, para todo n,

$$x \in [S_n, S_n + \frac{1}{10^n}[\subset]S_n - \frac{1}{10^n}, S_n + \frac{1}{10^n}[.$$

Por um exercício do capítulo 5, isso significa que $|x - S_n| < \frac{1}{10^n}$.

Portanto, se $n \geq n_0$ temos

$$|x - S_n| < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

provando que S_n converge para x.

■

A princípio, pode existir várias representações decimais para o mesmo número. De fato, o número 1 pode ser escrito como 1,000... ou 0,999.... Mas tirando esses casos em que a partir de um momento todos os algarismos são iguais 9, a representação decimal é única.

Exercício 6.25. Seja $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ uma representação decimal positiva tal que $a_0 = 0$ e existe $n \geq 1$ tal que $a_n \neq 9$. Prove que $x < 1$.

Para explicar a unicidade da representação decimal, a menos de algumas "exceções", introduzimos provisoriamente uma definição:

Definição 6.26. Uma representação decimal $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ é dita *regular* se não termina numa sequência de 9's. Isto é, se para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n > m$ tal que $a_n \neq 9$.

Exercício 6.27. Sejam $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ e $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$ representações decimais regulares. Temos $x = y$ se, e somente se, $a_n = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Um lado da implicação é trivial. A parte não-trivial está em provar que, se as representações decimais são diferentes, então $x \neq y$. Trabalhe primeiro com o caso em que $a_0 \neq b_0$, e use o exercício anterior. Depois "desloque" esse resultado multiplicando por uma potência de 10, e considerando o primeiro n tal que $a_n \neq b_n$.

6.3 Dízima periódica e dízima não-periódica

Definir com rigor o conceito de dízima periódica dá um pouco de trabalho. O que queremos dizer, na definição abaixo, é que, em uma dízima periódica, existem algarismos $b_0, \ldots, b_{k-1}$ (o motivo de começarmos no 0, em vez do 1, e terminarmos no $k-1$, em vez do k, ficará claro daqui a pouco) tais que, a partir de um n_0, os algarismos a_n se alternam ciclicamente entre b_0 a b_{k-1}. Isto é, $a_{n_0} = b_0$, $a_{n_0+1} = b_1$ e assim por diante até $a_{n_0+k-1} = b_{k-1}$. Depois disso, recomeçamos do b_0. Isto é, $a_{n_0+k} = b_0$. Para formalizarmos isso usaremos um pouco de álgebra. Lembramos que, dados um número natural n (dividendo) e um número natural k (divisor) existem únicos números naturais m (quociente) e $j < k$ (resto) tais que $n = mk + j$. Assim, numa dízima como acabamos de descrever, a n-ésima casa decimal (para $n \geq n_0$) será b_j, onde j é o resto da divisão de $n - n_0$ por k.

Essa notação explica porque é melhor enumerar os algarismos do período de b_0 a b_{k-1}, em vez de b_1 a b_k: assim o resto será o índice de b_j, visto que o resto de uma divisão por k é sempre um número natural entre 0 e $k-1$.

Definição 6.28. Dizemos que uma representação decimal $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ ou $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a_n}{10^n}$, para $a_0 \in \mathbb{N}$ e $a_n \in [0,9] \cap \mathbb{N}$, quando $n \geq 1$, é

- *finita* se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$, para todo $n \geq n_0$;
- uma *dízima periódica* se existem $n_0 \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ e inteiros $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ entre 0 e 9 tais que, para todos $m \in \mathbb{N}$ e $j \in [0, k-1] \cap \mathbb{N}$, temos $a_{n_0+mk+j} = b_j$;
- uma *dízima não-periódica* se não é uma dízima periódica.

Observe que, na definição acima, dízima periódica inclui representação decimal finita, tomando $k = 1$ e $b_0 = 0$. Chamaremos de *dízima periódica infinita* uma dízima periódica que não é uma representação decimal finita.

O principal resultado sobre o assunto é o seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada, entre outras referências, no livro, *Análise I*, de Djairo Guedes de Figueiredo:

Teorema 6.29. *Um número real é irracional se, e somente se, sua representação decimal é uma dízima não-periódica.*

Exercício 6.30. Prove uma das implicações do teorema acima: uma dízima periódica é um número racional. Para isso, escreva uma dízima periódica como a soma de uma representação decimal finita (a parte antes de começar o período da dízima) e uma PG.

Capítulo 7

Topologia na reta

A topologia estuda noções de vizinhança e proximidade, abstraindo-as das operações aritméticas dos números reais. A topologia na reta é um bom exemplo do que Polya chamava de "paradoxo da invenção": um problema mais geral às vezes torna-se mais fácil de resolver do que um problema particular. Quando usamos a linguagem da topologia para resolvermos problemas relacionados a convergência de sequências e continuidade de funções, pagamos o preço de usar uma linguagem abstrata demais, que em um primeiro momento pode comprometer a intuição, mas as demonstrações tornam-se muitas vezes mais simples e elegantes. E ainda têm a vantagem de, futuramente, as mesmas demonstrações serem aplicadas em problemas muito mais gerais (sobre espaços de dimensões maiores ou outros espaços topológicos).

Os resultados apresentados aqui se restringem à topologia da reta. Isto é, ao que definiremos como conjuntos abertos e conjuntos fechados em $\mathbb{R}$. Frequentemente não valem em estruturas topológicas gerais (por exemplo, o resultado que afirma que todo compacto é fechado, ou que todo conjunto finito é fechado).

A maior dificuldade inicial que pode ser encontrada nesse assunto é o uso constante de conjuntos de conjuntos. Recomendamos que o estudante reveja o capítulo 1 para relembrar conceitos como união de família de conjuntos. Para facilitar a compreensão do texto, especialmente para aqueles ainda não habituados a trabalhar com conjuntos de conjuntos, adotamos a seguinte convenção de notação: usamos letras minúsculas para representar elementos de $\mathbb{R}$, usamos letras maiúsculas para representar subconjuntos de $\mathbb{R}$, e usamos letras maiúsculas estilizadas (tais como $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{F}$) para representar conjuntos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ (aos quais também usamos a expressão *família de* *conjuntos*).

Denotaremos $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $\mathbb{N}^*$.

7.1 Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Definição 7.1. Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é *aberto* se, para todo $x \in A$, existe um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $x \in]a, b[$ e $]a, b[\subset A$.

Intuitivamente, um conjunto é aberto se todo ponto pertencente a ele "pode se deslocar um pouco pra direita ou pra esquerda sem cair fora do conjunto".

Exemplo 7.2. *Todo intervalo aberto é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja A um intervalo aberto (não-degenerado, trataremos do caso vazio no próximo exemplo). Vimos que A tem uma das formas $]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$, $\mathbb{R}$. Dado $x \in A$, tomamos um intervalo I como $]a, b[$, $]x-1, b[$, $]a, x+1[$ ou $]x-1, x+1[$, respectivamente, para cada uma das formas acima. Temos $x \in I$ e $I \subset A$, provando que A é aberto. ■

Exemplo 7.3. *O conjunto vazio é um conjunto aberto.*

Demonstração: Vale pelo *argumento de vacuidade*. Qualquer fórmula do tipo "para todo $x \in A$ vale $P(x)$" é verdadeira quando tomamos A o conjunto vazio, pois não existe $x \in A$ para atestar o contrário. ■

Exemplo 7.4. *Um intervalo fechado não é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $I = [a, b]$. Seja $]a', b'[$ um intervalo aberto tal que $b \in]a', b'[$. Tomando $y = \frac{b+b'}{2}$, temos $y \in]a', b'[$ e $y \notin I$, mostrando que $]a', b'[$ não está contido em I. ■

A demonstração desse fato mostra mais do que isso: se um conjunto possui máximo ou mínimo então ele não é aberto. Isso porque máximos e mínimos de um conjunto são exemplos de pontos que estão "na beirada" do conjunto, não satisfazendo a definição de conjunto aberto.

Teorema 7.5. *Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de conjuntos abertos. Então $\bigcup \mathcal{C}$ é aberto.*

Demonstração: Seja $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Por definição da união, existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$. Como, por hipótese, V é aberto, existe um intervalo aberto $]a, b[\subset V$ tal que $x \in]a, b[$. Como $]a, b[\subset V$, temos $]a, b[\subset \bigcup \mathcal{C}$, como queríamos provar. ■

Exercício 7.6. Prove que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, para todo conjunto aberto V tal que $x \in V$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n \in V$.

Definição 7.7. Um subconjunto F de $\mathbb{R}$ é *fechado* se $\mathbb{R} \smallsetminus F$ é aberto.

Exercício 7.8. Prove que um intervalo fechado é um conjunto fechado

Exemplo 7.9. $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são conjuntos simultaneamente abertos e fechados.

Quando falarmos de conexidade veremos que esses são, de fato, os únicos subconjuntos abertos e fechados de $\mathbb{R}$.

Teorema 7.10. *Se $\mathcal{C}$ é uma família não-vazia de conjuntos fechados, então $\bigcap \mathcal{C}$ é fechado.*

Demonstração: A hipótese de $\mathcal{C}$ ser não-vazia está colocada para garantir a existência da intersecção, conforme discutimos no capítulo 1.

Seja $\mathcal{D} = \{\mathbb{R} \smallsetminus F : F \in \mathcal{C}\}$. Como cada elemento de $\mathcal{C}$ é fechado, os elementos de $\mathcal{D}$ – que são seus complementos – são abertos. Mostraremos que

$$\mathbb{R} \smallsetminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup \mathcal{D}.$$

De fato, seja $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \bigcap \mathcal{C}$. Isto é, não é verdade que $x \in F$, para todo $F \in \mathcal{C}$. Logo, existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin F$ e, portanto, $x \in \mathbb{R} \smallsetminus F$. Como $\mathbb{R} \smallsetminus F \in \mathcal{D}$, concluímos que $x \in \bigcup \mathcal{D}$.

Reciprocamente, seja $x \in \bigcup \mathcal{D}$. Existe $V \in \mathcal{D}$ tal que $x \in V$. Mas $V = \mathbb{R} \smallsetminus F$, para algum $F \in \mathcal{C}$. Logo, $x \notin F$ e, portanto, $x \notin \bigcap \mathcal{C}$. Mas, como $V \subset \mathbb{R}$, temos $x \in \mathbb{R}$, provando que $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \bigcap \mathcal{C}$.

Pelo Teorema 7.5, o conjunto $\bigcup \mathcal{D}$ é aberto. Logo, $\bigcap \mathcal{C}$ é fechado, como queríamos.

■

7.2 Pontos de aderência e pontos de acumulação

As definições que se seguem se referem a como se comporta um ponto x pertencente a $\mathbb{R}$ em relação a algum subconjunto A de $\mathbb{R}$.

Não estranhe que, dentro do contexto da topologia, chamamos um número real de *ponto*. Como todos sabem, podemos pensar no conjunto dos números reais como uma reta. Essa visualização geométrica é particularmente útil quando trabalhamos com a topologia dos números reais, em que a ordem dos números importa mais do que as operações entre eles. Sempre lembrando: visualizações geométricas são importantes para termos uma intuição sobre os resultados e definições que trabalhamos, e também nos ajudam a encontrar o caminho de uma demonstração rigorosa. Mas essas nunca podem entrar nas demonstrações como um argumento válido para justificar alguma passagem.

Definição 7.11. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que x é:

(a) um *ponto isolado* de A se existe um intervalo aberto I tal que $I \cap A = \{x\}$ (isto é, x é o único ponto que pertence ao intervalo I e ao conjunto A);

(b) um *ponto de aderência* de A se para todo intervalo aberto I, se $x \in I$ então $I \cap A \neq \emptyset$;

(c) um *ponto de acumulação* de A se para todo intervalo aberto I, se $x \in I$ então existe $y \neq x$ tal que $y \in I \cap A$.

Ou seja, um ponto de aderência de um conjunto A é um ponto que ou pertence a A ou está tão próximo dele que qualquer intervalo aberto contendo x "encontra" alguém de A. Essa intersecção entre I e A pode ser o próprio ponto x. Já na definição de ponto de acumulaçao exigimos um pouco mais: a intersecção entre I e A precisa conter alguém mais além do próprio x.

Exercício 7.12. *Considere $A =]0,1[\cup \{2\}$. Encontre todos os pontos isolados, todos os pontos de aderência e todos os pontos de acumulação de A. Justifique, usando as definições.*

Exercício 7.13. *Prove que, para todos $x \in \mathbb{R}$ e todo $A \subset \mathbb{R}$, temos que x é ponto de aderência de A se, e somente se, x é ponto de acumulação ou ponto isolado de A.*

Teorema 7.14. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Temos que*

(a) *x é um ponto de aderência de A se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x tal que $x_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(b) *x é um ponto de acumulação de A se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x tal que $x_n \in A$ e $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 7.15. Prove o teorema acima.

Definição 7.16. Denotamos por $\overline{A}$ o conjunto de todos os pontos de aderência de A.

Claramente, $A \subset \overline{A}$.

Teorema 7.17. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Temos:*

(a) *$\overline{A}$ é fechado;*

(b) *Se $A \subset F$ e F é fechado, então $\overline{A} \subset F$;*

(c) *$A = \overline{A}$ se, e somente se, A é fechado.*

Demonstração: Mostremos a parte (a). Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$. Como x não é ponto de aderência de A, existe um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $x \in]a, b[$ e $]a, b[\cap A = \emptyset$. Observe que nenhum $y \in]a, b[$ é ponto de aderência de A, pois o mesmo intervalo $]a, b[$ testemunha isso. Portanto, $]a, b[\cap \overline{A} = \emptyset$. Logo, $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$, provando que $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ é fechado.

Para a parte (b), seja F fechado tal que $A \subset F$. Mostraremos que $\overline{A} \subset F$ pela contrapositiva: se $x \notin F$ então $x \notin \overline{A}$.

Seja $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Como F é fechado, existe um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $]a, b[\cap F = \emptyset$. Em particular, $]a, b[\cap A = \emptyset$, pois $A \subset F$. Logo, x não é ponto de aderência de A. Isto é, $x \notin \overline{A}$.

O item (c) segue imediatamente dos anteriores. Se $A = \overline{A}$, pelo item (a) temos que A é fechado. Reciprocamente, se A é fechado, como $A \subset A$, pelo item (b) concluímos (tomando $F = A$) que $\overline{A} \subset A$. Mas já sabemos que $A \subset \overline{A}$. Logo, $A = \overline{A}$.

■

7.3 Conjuntos compactos

Dizemos que um subconjunto A da reta é *compacto* se, sempre que cobrimos A com uma quantidade infinita de conjuntos ou intervalos abertos, uma quantidade finita desses conjuntos já é suficiente para cobrir A. Formalizaremos melhor essa definição.

Definição 7.18. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Um conjunto $\mathcal{C}$ de conjuntos abertos é um *recobrimento aberto* de A se $A \subset \bigcup \mathcal{C}$.

Exemplo: tome $A =]0, \infty[$ e $\mathcal{C} = \{]\frac{1}{n}, n[: n \in \mathbb{N}^*\}$. Observe que cada elemento de $\mathcal{C}$ é um conjunto aberto, e que, dado qualquer $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in]\frac{1}{n}, n[$. Em outras palavras, existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$. Ou seja, $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Como tomamos x qualquer, concluímos que $A \subset \bigcup \mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{C}$ é um recobrimento de A.

Note que, nesse caso, vale a igualdade: $A = \bigcup \mathcal{C}$. Mas isso não é necessário na definição de recobrimento. Assim, $\mathcal{C}$ também é recobrimento de $]0, 1]$, ou de qualquer outro subconjunto de A. Mas repare que $\mathcal{C}$ **não** é recobrimento de $[0, 1]$, pois 0 não pertence a nenhum dos conjuntos listados em $\mathcal{C}$.

Definição 7.19. Um subconjunto C de $\mathbb{R}$ é dito *compacto* se, para todo $\mathcal{C}$ recobrimento aberto de C existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ que também é um recobrimento aberto de C.

Nesse caso, chamamos $\mathbb{D}$ de *subrecobrimento finito* de $\mathcal{C}$.

No exemplo anterior, a família $\mathcal{C}$ prova que o conjunto $]0, \infty[$ **não** é compacto. De fato, se tomarmos $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ finito, existe o máximo dentre todos os n's tais que intervalo $]\frac{1}{n}, n[$ pertence a $\mathcal{D}$. Tomando $x = \frac{1}{2n}$, temos que $x \in]0, \infty[$, mas não pertence a nenhum dos intervalos que estão em $\mathcal{D}$.

Neste momento convém alertar o leitor para um possível erro de argumentação. Para provar que um conjunto C *não* é compacto, basta exibir *um* recobrimento de C que não admite subrecobrimento finito, como acabamos de fazer para o conjunto $]0, \infty[$. Mas se mostrarmos que um recobrimento aberto de C admite subrecobrimento finito, *isso não prova que C é compacto*, porque para fazê-lo precisamos mostrar que *todo* recobrimento aberto admite subrecobrimento finito.

Com isso percebemos que provar que um conjunto é compacto é bem mais complicado que provar que um conjunto não é compacto. Mas mostraremos um teorema que simplificará bastante esse trabalho, caracterizando os conjuntos compactos com os fechados limitados.

Lema 7.20. *Todo conjunto compacto é limitado.*

Demonstração: Mostraremos que um conjunto ilimitado não pode ser compacto. De fato, seja $A \subset \mathbb{R}$ ilimitado e tome $\mathcal{C} = \{]-n, n[: n \in \mathbb{N}^*\}$. Da propriedade arquimediana segue que $\mathcal{C}$ é um recobrimento aberto de A, pois dado $x \in A$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ maior que x e maior que $-x$. Teremos $x \in]-n, n[$.

Seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ finito. Mostraremos que $\mathcal{D}$ não é recobrimento aberto de A. Seja $n_0 = max\{n \in \mathbb{N} :]-n, n[\in \mathcal{D}\}$ (o máximo existe porque o conjunto é finito). Como A não é limitado, ou ele é ilimitado superiormente ou é ilimitado inferiormente (ou ambos). No primeiro caso, tomamos $x \in A$ tal que $x > n_0$. No segundo caso, tomamos $x \in A$ tal que $x < n_0$. Em ambas as situações temos $x \notin]-n, n[$, para qualquer $]-n, n[\in \mathcal{D}$, provando que $\mathcal{D}$ não é recobrimento de A. ■

Lema 7.21. *Todo conjunto compacto é fechado.*

Demonstração: Faremos a prova novamente pela contrapositiva: se A não é fechado então A não é compacto.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ não fechado. Pelo Teorema 7.17, temos $\overline{A} \neq A$. Como $A \subset \overline{A}$, os dois conjuntos serem diferentes significa que existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin A$. Ou seja, existe um ponto de aderência de A que não pertence a A. Fixe tal x.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os abertos da forma $]-\infty, x-\varepsilon[\cup]x+\varepsilon, \infty[$, para $\varepsilon > 0$. Temos que $A \subset \bigcup \mathcal{C}$. De fato, se $y \in A$, temos $y < x$ ou $y > x$ (pois $x \notin A$). Tomando $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$, temos $y < x - \varepsilon$ ou $y > x + \varepsilon$ (verifique, analisando os dois casos). Isto é, $y \in]-\infty, x-\varepsilon[\cup]x+\varepsilon, \infty[$, que, por sua vez, pertence a $\mathcal{C}$.

Vamos mostrar agora que $\mathcal{C}$ não admite subrecobrimento finito para A. Seja $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito. Tome δ o menor número real tal que $]-\infty, x-\delta[\cup]x+\delta, \infty[\in \mathcal{C}'$ (existe, pois o conjunto é finito). Como $x \in \overline{A}$, temos, pela definição de ponto de aderência, que existe $y \in A \cap]x-\delta, x+\delta[$. Isto é, $y \in A$ e $x - \delta < y < x + \delta$.

Vamos mostrar que $y \notin \bigcup \mathcal{C}'$. De fato, se $V \in \mathcal{C}'$, temos que $V =]-\infty, x-\varepsilon[\cup]x+\varepsilon, \infty[$, para algum $\varepsilon > 0$. Pela forma como escolhemos δ, temos que $\delta \leq \varepsilon$. Logo,

$$x - \varepsilon \leq x - \delta < y < x + \delta \leq x + \varepsilon,$$

provando que $y \notin V$. Portanto, $\mathcal{C}'$ não é um subrecobrimento finito para A. ■

Exercício 7.22. Prove que todo subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}$ possui máximo e mínimo.

Dica: Suponha que $A \subset \mathbb{R}$ não possui máximo. Considere $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os abertos da forma $]-\infty, x[$, para $x \in A$. Prove que esse conjunto é um recobrimento de A que não admite subrecobrimento finito. Proceda analogamente no caso de A não possuir mínimo.

Lema 7.23. *Se C é compacto e F é um subconjunto fechado de C, então F é compacto.*

Demonstração: Sejam C e F como no enunciado. Seja $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de F. Tome $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup (\mathbb{R} \setminus F)$. Mostremos que $\mathcal{C}'$ é um recobrimento aberto de C. Primeiro notemos que $\mathbb{R} \setminus F$ é aberto, pois F é fechado. Seja $x \in C$. Se $x \in F$, como assumimos que $\mathcal{C}$ é um recobrimento de F, existe $V \in \mathcal{C}$ (e, portanto, em $\mathcal{C}'$) tal que $x \in V$. Se $x \notin F$, temos $x \in \mathbb{R} \setminus F$, que é um elemento de $\mathcal{C}'$. De qualquer modo temos $x \in \bigcup \mathcal{C}'$, provando que $\mathcal{C}'$ é um recobrimento aberto de C.

Como C é compacto, existe $\mathcal{D}' \subset \mathcal{C}'$ finito tal que $C \subset \bigcup \mathcal{D}'$. Tome $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \setminus \{\mathbb{R} \setminus F\}$.

Notemos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ e é finito. Falta mostrar que $\mathcal{D}$ é recobrimento de F. Seja $x \in F$. Como $F \subset C$ e $\mathcal{D}'$ é um recobrimento aberto de C, existe $V \in \mathcal{D}'$ tal que $x \in V$. Mas V não pode ser $\mathbb{R} \setminus F$, visto que $x \in F$. Logo, $V \in \mathcal{D}$. ■

Lema 7.24. *Todo intervalo fechado $[a, b]$ é compacto.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Mostraremos que $[a, b]$ é compacto. Seja $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de $[a, b]$. Considere o seguinte conjunto:

$$S = \{x \in [a, b+1] : \text{ existe } \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \text{ finito tal que } [a, x] \subset \bigcup \mathcal{D}\}$$

O conjunto S é não-vazio, pois $a \in S$. De fato, o intervalo $[a, a]$ é o conjunto unitário $\{a\}$, e um conjunto unitário é claramente compacto (tome como subrecobrimento de $\mathcal{C}$ o conjunto $\{V\}$, onde V é um aberto pertencente a $\mathcal{C}$ tal que $a \in V$). Como $S \subset [a, b+1]$, então S é limitado superiormente. Portanto, S possui supremo.

Tome s o supremo de S. Mostraremos que $s > b$. Isso será suficiente, pois implica que existe $c > b$ tal que $c \in S$. Logo, existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ recobrimento finito de $[a, c]$. Como $[a, b] \subset [a, c]$, também será recobrimento de $[a, b]$.

Portanto, para concluir o lema, suporemos, por absurdo, que $s \leq b$ e chegaremos a uma contradição.

Como $a \leq s \leq b$ e $\mathcal{C}$ é um recobrimento de $[a, b]$, existe um aberto $V \in \mathcal{C}$ tal que $s \in V$. Como V é aberto, existe um intervalo aberto $]a', b'[\subset V$ tal que $s \in]a', b'[$. Como $a' < s$, pela definição de supremo existe $c > a'$ tal que $c \in S$. Logo, existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ finito tal que

$$[a, c] \subset \bigcup \mathcal{D}.$$

Agora tome $d = \frac{s+b'}{2}$. Temos $s < d < b'$ e $[c, d] \subset]a', b'[\subset V$. Portanto

$$[a, d] \subset \bigcup (\mathcal{D} \cup \{V\})$$

Mas $\mathcal{D} \cup \{V\}$ também é um subconjunto finito de $\mathcal{C}$. Concluímos, assim, que $d \in S$, contradizendo com o fato de s ser supremo de S e termos $d > s$. ∎

Teorema 7.25. *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração: Se $C \subset \mathbb{R}$ é compacto, então pelos Lemas 7.20 e 7.21 temos que C é fechado e limitado. Se C é fechado e limitado, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset [-n, n]$ (usando que C é limitado). Pelo Lema 7.24, $[-n, n]$ é compacto e, pelo Lema 7.23, temos que C é compacto. ∎

7.4 Conjuntos conexos

Um subconjunto da reta é *conexo* se ele não pode ser separado por dois abertos em duas partes não-vazias. Para explicar formalmente o que significa essa "separação por abertos", definimos conexidade conforme segue.

Definição 7.26. Dizemos que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é *desconexo* se existem abertos V_1 e V_2 tais que

- $A \cap V_1 \neq \emptyset$;

- $A \cap V_2 \neq \emptyset$;
- $A \subset V_1 \cup V_2$;
- $A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é dito *conexo* se não é desconexo. Isto é, se para todos abertos V_1 e V_2 satisfazendo $A \cap V_1 \neq \emptyset$, $A \cap V_2 \neq \emptyset$ e $A \subset V_1 \cup V_2$, temos $A \cap V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

Teorema 7.27. *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, é um intervalo.*

Demonstração: Começaremos pela parte mais fácil: se A é conexo então A é um intervalo. Faremos a prova pela contrapositiva: se A não é um intervalo então ele é desconexo.

Dizer que A não é um intervalo significa que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a, b \in A$, $c \notin A$ e $a < c < b$. Tome $V_1 =]-\infty, c[$ e $V_2 =]c, \infty[$. Temos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (e, em particular, $A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$). Como $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R} \setminus \{c\}$, e $c \notin A$, temos $A \subset V_1 \cup V_2$. Além disso, temos $a \in A \cap V_1$ e $b \in A \cap V_2$, provando que esses conjuntos não são vazios. Mostramos, assim, que A não é conexo.

Agora mostraremos que os intervalos são conexos. Seja A um intervalo. Sejam V_1 e V_2 abertos tais que $A \cap V_1 \neq \emptyset$, $A \cap V_2 \neq \emptyset$ e $A \subset V_1 \cup V_2$. Mostraremos que $A \cap V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

Tome $a \in A \cap V_1$ e $b \in A \cap V_2$. Se $a = b$ temos $a \in A \cap V_1 \cap V_2$, concluindo o que queríamos. Então assumimos que $a \neq b$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $a < b$ (basta trocarmos V_1 com V_2 caso valha $b < a$).

Seja

$$s = sup\{x \in A \cap V_1 : x \leq b\}$$

Note que o supremo de fato existe, pois o conjunto da direita é não-vazio (a pertence a ele) e limitado superiormente por b.

Como $a \leq s \leq b$ e A é um intervalo, temos $s \in A$. Como $A \subset V_1 \cup V_2$, temos que s pertence a um desses abertos. Dividiremos o restante da demonstração em dois casos.

Caso 1: $s \in V_1$. Como V_1 é aberto, existe um intervalo $]a', b'[\subset V_1$ tal que $s \in]a', b'[$. Podemos assumir que $b' \leq b$, pois, se não for, basta trocarmos b' por b. Seja $c = \frac{s+b'}{2}$. Temos $s < c < b' \leq b$. Como A é um intervalo, temos $a \in A$. Como $]a', b'[\subset V_1$, temos $c \in V_1$. Logo, $c \in A \cap V_1$ e $c > s$, contradizendo a definição de s.

Caso 2: $s \in V_2$. Como V_2 é aberto, existe um intervalo $]a', b'[\subset V_2$ tal que $s \in]a', b'[$. Como $a' < s$, pela definição de s existe $c > a'$ tal que $c \in A \cap V_1$. Mas $c \in]a', b'[\subset V_2$. Logo, $c \in A \cap V_1 \cap V_2$, provando o que queríamos. ■

Corolário 7.28. *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.*

Demonstração: Suponha que exista V_1 aberto e fechado que não é o conjunto vazio nem todo o $\mathbb{R}$. Isso significa que, se tomarmos $V_2 = \mathbb{R} \setminus V_1$, temos que V_2 é aberto e não-vazio (pois $V_1 \neq \mathbb{R}$). Logo, V_1 e V_2 são abertos disjuntos e não-vazios cuja união é igual a $\mathbb{R}$, contradizendo que $\mathbb{R}$, por ser um intervalo, é conexo. ■

Na prova acima foi usado o axioma do supremo. Notamos que a definição de conjunto aberto – bem como todas as definições topológicas subsequentes, como a de conjunto fechado, compacidade e conexidade – pode ser aplicada a qualquer corpo ordenado. Feito isso, deixamos o seguinte exercício ao leitor:

Exercício 7.29. Prove que um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é completo se, e somente se, X é conexo.

Dica: Uma direção é imediata do Teorema 7.27. A outra direção pode ser provada pela contrapositiva: se $(X, +\cdot, <)$ não é completo então X não é conexo. Para isso, use o axioma de Dedekind, que já foi provado ser equivalente ao axioma do supremo.

Capítulo 8

Limite e continuidade de funções

Neste capítulo formalizaremos dois dos conceitos mais importantes estudados em Cálculo: limite e continuidade de funções reais.

Frequentemente usaremos a abordagem topológica desses conceitos, e veremos como essa é útil para demonstrar resultados clássicos de cálculo, como o teorema do valor intermediário e o teorema de Weierstrass.

8.1 Limite de função

Definição 8.1. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Sejam a um ponto de acumulação de A e L um número real. Dizemos que L é *limite* de $f(x)$, quando x tende a a (ou, simplesmente, $f(x)$ *tende* a L quando x tende a a) se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \smallsetminus \{a\}$, se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observe que, na definição de limite, não importa o qua acontece com a função no ponto a, mas, sim, próximo a a. Por isso é necessário que na definição a seja um ponto de acumulação do domínio de f (isto é, está arbitrariamente próximo de pontos do domínio), mesmo que não necessariamente pertença ao domínio.

Teorema 8.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, a um ponto de acumulação de A e L um número real. São equivalentes:*

(a) *L é limite de $f(x)$ quando x tende a a;*

(b) *Para toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $A \setminus \{a\}$ *que converge a* a*, temos que* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L*.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que (a) implica (b). Suponha que L é limite de $f(x)$ quando x tende a a. Para mostrarmos (b), seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $A \setminus \{a\}$ que converge a a. Mostraremos que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x-a| < \delta$, então, para todo $x \in A \setminus \{a\}$, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $|x_n - a| < \delta$. Como $x_n \in A \setminus \{a\}$, para todo n, isso significa, pela hipótese sobre δ, que, se $n \geq n_0$, então $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, provando que $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Mostremos a outra direção, isto é, (b) implica (a). Faremos a prova pela contrapositiva, isto é, não (a) implica não (b). Vamos supor que (a) seja falso. Para escrevermos a negação de (a), lembramos das seguintes regras lógicas:

- Negar que "para todo x vale $P(x)$" equivale a dizer que "existe x para o qual não vale $P(x)$";
- Negar que "P implica Q" significa que "vale P e não vale Q".

Assim, aplicando as regras acima na definição de limite, concluímos que negar (a) equivale a dizer que:

> Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in A \setminus \{a\}$ tal que $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Fixe $\varepsilon > 0$ como acima. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, aplicando a hipótese acima para $\delta = \frac{1}{n}$ encontramos $x_n \in A \setminus \{a\}$ tal que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Claramente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a (usando a propriedade arquimediana) e $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge a L. Portanto, (b) é falso, como queríamos provar. ■

Uma vez provado o teorema acima, os resultados seguintes seguem imediatamente dos correspondentes mostrados para limite de sequência.

Teorema 8.3. *Sejam* $A \subset \mathbb{R}$*,* f *e* g *funções de* A *em* $\mathbb{R}$ *e* a *um ponto de acumulação de* A*.*

(a) *O limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *é único, quando existe. Isto é, se* L_1 *e* L_2 *são ambos limites de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a*, então* $L_1 = L_2$

(b) *Se $f(x)$ tende a L_1 e $g(x)$ tende a L_2, quando x tende a a, então $f(x)+g(x)$ tende a L_1+L_2 e $f(x)\cdot g(x)$ tende a $L_1\cdot L_2$, quando x tende a a;*

(c) *Se $f(x)$ tende a L, quando x tende a a, e se $L\neq 0$ e $f(x)\neq 0$, para todo $x\in A$, então $\frac{1}{f(x)}$ tende a $\frac{1}{L}$, quando x tende a a.*

Como o limite é único, escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se L é limite de $f(x)$ quando x tende a a.

Assim como fizemos com sequências, podemos definir limite infinito e limite no infinito, mas deixamos essas definições como exercício.

Exercício 8.4. Defina limite no infinito e limite infinito. Isto é, defina o sentido da frase "*quando x tende a a (ou infinito, ou menos infinito), $f(x)$ tende a L (ou infinito, ou menos infinito)*". Faça todas as oito definições restantes.

Usamos as notações $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, para os casos acima.

Exercício 8.5. Sejam $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de a tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Supondo $f(x)\neq 0$, para todo $x\in A$, prove que $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$.

8.2 Continuidade

Definição 8.6. Sejam $A\subset\mathbb{R}$ e $a\in A$ não isolado. Uma função f de $A\subset\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é *contínua em $a\in A$* se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dizemos que f é *contínua* se é contínua em todo $a\in A$.

Observe que a não pode ser isolado, para que possamos calcular o limite. Mas também podemos convencionar que f é sempre contínua em um ponto isolado (todavia, durante este curso, não trabalharemos com funções que têm ponto isolado no domínio).

Teorema 8.7. *Sejam f uma função de $A\subset\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $a\in A$ um ponto não isolado. São equivalentes:*

(a) *f é contínua em a;*

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $x \in A$, *se* $|x - a| < \delta$ *então* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$*;*

(c) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* A *que converge a* a, *então a sequência* $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $f(a)$*;*

(d) *Para todo aberto* V *tal que* $f(a) \in V$, *existe um aberto* W *tal que* $x \in W$ *e* $f[W \cap A] \subset V$.

Demonstração: A equivalência entre (a) e (b) é imediata da definição de limite, tomando $f(a)$ no lugar de L. A única observação é que, se $x = a$, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Isso torna a implicação "se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$" automaticamente verdadeira, para $x = a$. Por esse motivo, trocar "$x \in A \smallsetminus \{a\}$" na definição de limite por "$x \in A$" na definição de continuidade não altera a veracidade da sentença.

A equivalência entre (a) e (c) segue imediatamente do Teorema 8.2, com a mesma observação acima sobre o que acontece no ponto a (se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é eventualmente constante igual a a, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ obviamente converge a $f(a)$).

Vamos provar a equivalência entre (b) e (d). Primeiro, suponhamos (b) verdadeiro e mostremos (d). Seja V aberto tal que $f(a) \in V$. Conforme vimos no capítulo anterior, isso significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subset V$.

Usando a hipótese (b), tome $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Defina $W =]a - \delta, a + \delta[$. Se $x \in A \cap W$, temos $|x - a| < \delta$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Logo, $f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subset V$, provando que $f[W \cap A] \subset V$.

Reciprocamente, suponhamos que vale (d) e mostremos (b). Seja $\varepsilon > 0$. Considere $V =]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$. Por (d), existe um aberto W tal que $a \in W$ e $f[W \cap A] \subset V$. Como W é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $]a - \delta, a + \delta[\subset W$. Se $x \in A$ e $|x - a| < \delta$, temos $x \in]a - \delta, a + \delta[$ e, portanto, $x \in W \cap A$. Por hipótese, isso implica que $f(x) \in V$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, como queríamos provar. ■

Exercício 8.8. Prove, usando diretamente a definição dada pelo item (b) do teorema 8.7, que as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são contínuas:

(a) $f(x) = x$;

(b) $f(x) = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$ constante e todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = 3x + 2$.

Exercício 8.9. Prove que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos do domínio.

Exercício 8.10. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, se x é racional, e $f(x) = 0$, se x é irracional. Prove que f é descontínua em todos os pontos.

Exercício 8.11. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, se x é irracional e $f(x) = \frac{1}{q}$, se x é um número racional cuja fração na forma irredutível é $\frac{p}{q}$ (no caso $x = 0$, defina $f(0) = 1$). Prove que f é contínua em x se, e somente se, x é irracional.

Exercício 8.12. Prove o *teorema da conservação do sinal*: se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $a \in A$ é tal que $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap A$.

Naturalmente, o teorema da conservação do sinal vale também se substituirmos "$f(a) > 0$" e "$f(x) > 0$" por "$f(a) < 0$" e "$f(x) < 0$", respectivamente. A demonstração é análoga.

A seguir, daremos uma equivalência topológica para a definição de continuidade que será útil para provarmos dois dos teoremas mais importantes do cálculo.

Lembremos de algumas definições conjuntísticas. Se f é uma função de A em $\mathbb{R}$ e B é um subconjunto de A, definimos

$$f[B] = \{f(x) : x \in B\}.$$

Se B está contido em $\mathbb{R}$, definimos

$$f^{-1}[V] = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

Teorema 8.13. *Seja f uma função de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. São equivalentes:*

(a) *f é contínua;*

(b) *Se V é aberto, então existe um aberto W tal que $f^{-1}[V] = W \cap A$.*

Demonstração: Façamos (a) implica (b). Seja V aberto.

Para cada $x \in f^{-1}[V]$, pelo teorema 8.7, item (d), como $f(x) \in V$, existe um aberto W_x tal que $x \in W_x$ e $f[W_x \cap A] \subset V$. Tome $W = \bigcup_{x \in f^{-1}[V]} W_x$. Como é uma união de conjuntos abertos, W é aberto. Mostremos que

$$f^{-1}[V] = W \cap A$$

De fato, se $x \in f^{-1}[V]$, temos $x \in W_x \subset W$ e, pela definição de $f^{-1}[V]$, $x \in A$. Logo, $x \in W \cap A$. Por outro lado, se $x \in W \cap A$, existe algum $y \in f^{-1}[V]$ tal que $x \in W_y$. Portanto, $x \in W_y \cap A$. Mas, por hipótese, $f[W_y \subset A] \subset V$, o que significa que $f(x) \in V$ e, portanto, $x \in f^{-1}[V]$, como queríamos. ■

Corolário 8.14. *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e A é compacto, então $f[A]$ é compacto.*

Demonstração: Sejam f e A como na hipótese. Mostremos que $f[A]$ é compacto. Seja $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de $f[A]$. Pelo teorema 8.13, para cada $V \in \mathcal{C}$, existe um aberto W_V tal que

$$(*) \qquad W_V \cap A = f^{-1}[V].$$

Seja $\mathcal{D} = \{W_V : V \in \mathcal{C}\}$. Vejamos que $\mathcal{D}$ é um recobrimento aberto de A. De fato, dado $x \in A$, como $\mathcal{C}$ é recobrimento aberto de $f[A]$, existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) \in V$ e, portanto, $x \in f^{-1}[V]$. Como também temos $f(x) \in A$, concluímos que $x \in W_V$. Com isso provamos que todo ponto de A pertence a algum aberto que está em $\mathcal{D}$, provando que esse é um recobrimento aberto de A.

Como A é compacto, $\mathcal{D}$ admite um subrecobrimento finito. Ou seja, existem abertos $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{C}$ tais que $\{W_{V_1}, \ldots, W_{V_n}\}$ é um recobrimento de A. para concluir o corolário, falta provarmos que $\{V_1, \ldots, V_n\}$ é um recobrimento de $f[A]$.

De fato, seja $y \in f[A]$. Isto é, $y = f(x)$, para algum $x \in A$. Como $\{W_{V_1}, \ldots, W_{V_n}\}$ é um recobrimento de A, existe algum i entre 1 e n tal que $x \in W_{V_i}$. Logo, por $(*)$, temos $x \in f^{-1}[V_i]$, e isso implica que $f(x) \in V_i$. Como $f(x) = y$, provamos o que queríamos ■

Corolário 8.15. *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e A é conexo, então $f[A]$ é conexo.*

Demonstração: Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $A \subset \mathbb{R}$. Mostraremos que, se A é conexo, a imagem de f também é um conjunto conexo. Faremos a prova pela contrapositiva: se $f[A]$ é desconexo então A é desconexo.

Suponha que $f[A]$ é desconexo. Isto é, existem abertos V_1 e V_2 tais que

1. $f[A] \subset V_1 \cup V_2$;

2. $V_1 \cap f[A] \neq \emptyset$;

3. $V_2 \cap f[A] \neq \emptyset$;

4. $V_1 \cap V_2 \cap f[A] = \emptyset$.

Pelo teorema 8.13, existem abertos W_1 e W_2 tais que

$$(*) \qquad W_1 \cap A = f^{-1}[V_1] \text{ e } \mathrm{W_2 \cap A = f^{-1}[V_2]}.$$

Para mostrar que A é desconexo, falta provarmos os itens 1 a 4 acima, substituindo V_1, V_2 e $f[A]$ por W_1, W_2 e A, respectivamente.

Se $x \in A$, então, por 1, $f(x) \in V_1$ ou $f(x) \in V_2$. Portanto, $x \in f^{-1}[V_1]$ ou $x \in f^{-1}[V_2]$, de onde segue, por $(*)$, que $x \in W_1$ ou $x \in W_2$. Com isso provamos que $A \subset W_1 \cup W_2$.

Como $V_1 \cap f[A] \neq \emptyset$, existe y pertencente a essa intersecção. Como $y \in f[A]$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $x \in f^{-1}[V_1]$ e, por $(*)$, $x \in W_1 \cap A$. Logo, $W_1 \cap A \neq \emptyset$.

Analogamente provamos que $W_2 \cap A \neq \emptyset$.

Falta provar que $W_1 \cap W_2 \cap A = \emptyset$. Suponha que essa intersecção seja não-vazia. Seja $x \in W_1 \cap W_2 \cap A$. Por $(*)$, temos $x \in f^{-1}[V_1]$ e $x \in f^{-1}[V_2]$. Logo, $f(x) \in V_1 \cap V_2 \cap f[A]$, contradizendo a hipótese 4.

Concluímos que W_1 e W_2 "separam" o conjunto A, provando que esse é desconexo. ■

Corolário 8.16 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então a imagem de f possui máximo e mínimo.*

Demonstração: Vimos, no capitulo anterior, que $[a, b]$, por ser um intervalo fechado e limitado, é compacto e conexo. Logo, pelos corolários 8.14 e 8.15 a imagem de f também é um conjunto compacto e conexo. Pelos teoremas 7.25 e 7.27 isso implica que a imagem de f é um intervalo fechado (é um intervalo, pois é conexo, e é fechado porque todo compacto é um conjunto fechado e limitado e os únicos intervalos que são fechados e limitados são os intervalos fechados). Mas, por definição de intervalo fechado, isso significa que a imagem de f possui máximo e mínimo. ■

Se x é um elemento do intervalo $[a, b]$ tal que $f(x)$ é o máximo da imagem de f, dizemos que x é um *ponto de máximo* da função f. Analogamente, se $f(x)$ é o mínimo da imagem de f, dizemos que x é um *ponto de mínimo* de f. Note que nem ponto de máximo nem ponto de mínimo necessariamente é único, pois, se a função não é injetora, pode haver dois pontos diferentes do domínio que possuem a mesma imagem.

Corolário 8.17 (Teorema do valor intermediário)**.** *Suponha que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e que A é um intervalo. Sejam $a, b \in A$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < c < f(b)$ ou $f(b) < c < f(a)$. Então existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) = c$.*

Demonstração: É fácil verificar que a restrição de uma função contínua é contínua (verifique isso). Logo, se f é contínua $f|_[a, b]$ é contínua em $[a, b]$. Logo, pelo corolário 8.15, a imagem de $f|_[a, b]$ é um conjunto conexo e, portanto, um intervalo. Logo, dado c como nas condições do teorema, por c estar entre dois pontos da imagem ele também pertence à imagem. Isso significa que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$. Como $c \neq f(a)$ e $c \neq f(b)$, não podemos ter $x = a$ nem $x = b$. Logo, $x \in]a, b[$. ■

Exercício 8.18. Prove para todo número real positivo a e todo natural $n \geq 1$ existe um único $x > 0$ tal que $x^n = a$.

Dica: Use o teorema do valor intermediário para mostrar a existência. Para a unicidade, prove que a função $f(x) = x^n$, quando restrita aos positivos, é injetora.

Definição 8.19. Dados $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, definimos a *raiz n-ésima de a* como o único $x > 0$ tal que $x^n = a$, e denotamo-la por $\sqrt[n]{a}$.

Lembremos que a definição de raiz n-ésima de a é o número *positivo* cuja n-ésima potência é a. Então que fique claro que $\sqrt{4} = 2$, e não "*mais ou menos* 2", como erroneamente dizem alguns alunos de ensino médio (e alguns professores, talvez?). Até porque essa é uma questão de lógica matemática: não podemos usar a mesma notação para dois significados diferentes, a menos que tenha uma variável nela (nesse caso, a notação ainda tem um significado só, mas depende de conhecermos o valor dessa variável). Ou seja, só pudemos introduzir a notação $\sqrt{4}$ porque sabemos que essa tem um significado bem determinado, livre de ambiguidade.

Exercício 8.20. *Sejam a, b números reais positivos e $n \geq 1$ natural. Prove que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.*

Exercício 8.21. Com base no exercício 8.18, conclua que o teorema do valor intermediário não vale se trabalharmos com o conjunto dos números racionais no lugar dos reais. Reveja todo o processo de demonstração desse teorema (incluindo todos os resultados anteriores usados na demonstração) e discuta onde foi usado o axioma do supremo.

Ainda há outras consequências importantes do teorema e dos corolários acima. Tais resultados são essenciais para definirmos funções simples, conhecidas desde o ensino médio, como a potência para expoente qualquer e o logaritmo. Antes de prosseguirmos enunciando esses resultados, introduzimos algumas definições já vistas para sequências.

Definição 8.22. Seja f uma função de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é *crescente* se $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$, e *decrescente* se $x \leq y$ implica $f(x) \geq f(y)$. Dizemos que f é *monótona* se é crescente ou decrescente.

Assim como fizemos com sequências, podemos diferenciar *crescente* de *estritamente crescente* (quando $x < y$ implica $f(x) < f(y)$), e o mesmo para *decrescente* e *estritamente decrescente*. Porém, nas aplicações que faremos, consideraremos funções injetoras, e, nesse caso, os conceitos são claramente equivalentes.

Teorema 8.23. *Seja f uma função injetora e contínua de A em $\mathbb{R}$, onde A é um intervalo. Então f é monótona.*

Demonstração: Suponha que f, como nas hipóteses do teorema. Mostraremos, primeiro, que em cada intervalo, o máximo e o mínimo da função estão nos extremos.

> **Afirmação:** se $a, b \in A$ e $a < b$, não existe $c \in]a, b[$ tal que $f(a) < f(c)$ e $f(b) < f(c)$, ou tal qie $f(a) > f(c)$ e $f(b) > f(c)$.

De fato, suponha que exista $c \in]a, b[$ satisfazendo $f(a) < f(c)$ e $f(b) < f(c)$. Tome y o máximo entre $\frac{f(a)+f(c)}{2}$ e $f\frac{f(b)+f(c)}{2}$. Pelo teorema do valor intermediário (corolário 8.17) existem $x_1 \in]a, c[$ e $x_2 \in]c, b[$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$, contradizendo que f é injetora e provando a afirmação.

Agora suponhamos que f não seja monótona. Isso quer dizer que "em algum trecho ela cresce e em outro ela decresce". Ou seja, existem $x, y, z, w \in A$ tais que $x < y$, $z < w$, $f(x) < f(y)$ e $f(z) > f(w)$. Chegaremos a uma contradição com a afirmação. Embora não é difícil verificar tal contradição, o trabalho desta demonstração, pra ser completa, é separar em casos que contemplam todas as possibilidades de posições relativas entre x, y, z e w. Faremos essa divisão em casos detalhadamente.

Caso 1: $w \leq x$**.** Nese caso temos $z < w \leq x < y$. Suponha $f(w) \leq f(x)$. Tome $a = z$, $b = y$ e $c = w$. Temos $f(c) = f(w) < f(z) = f(a)$ e $f(c) = f(w) \leq f(x) < f(y) = f(b)$, contradizendo a afirmação. Se $f(w) > f(x)$ procedemos analogamente, tomando $c = x$.

Nos próximos casos, assumimos que $x < w$ (a negação do caso 1) e analisaremos se cada um dentre y e z pertence ao intervalo $]x, w[$.

Caso 2: $y, z \in]x, w[$**.** Tome $c = y$ se $f(y) \geq f(z)$ ou $c = z$, caso contrário. Tomando $a = x$ e $b = w$, teremos $f(c) > f(a)$ e $f(c) > f(b)$, contradizendo a afirmação.

Caso 3: $y \in]x, w[$ **e** $z \notin]x, w[$**.** Como $z < w$, de $z \notin]x, w[$ deduzimos que $z \leq x$. Se $f(y) \geq f(z)$, tome $a = x$, $b = w$ e $c = y$. Temos $f(c) = f(y) > f(x) = f(a)$. Por outro lado, $f(c) = f(y) \geq f(z) > f(w) = f(b)$, contradizendo a afirmação. Se $f(y) < f(z)$, tome $a = z$, $c = x$ e $b = y$. Teremos $f(c) = f(x) < f(y) = f(b)$ e $f(c) = f(x) < f(y) < f(z) = f(a)$ (e, em particlar, isso prova também que, nesse caso, $z < x$), contradizendo a afirmação.

Caso 4: $z \in]x, w[$ **e** $y \notin]x, w[$**.** Como no caso anterior, temos $x < z < w \leq y$. Se $f(w) < f(y)$, teremos $w \neq y$ e basta tomarmos $a = z$, $c = w$ e $b = y$ para contradizermos a afirmação. Se $f(w) \geq f(y)$, tome $a = x$, $c = z$ e $b = y$, e teremos $f(c) > f(a)$ e $f(c) > f(b)$.

Caso 5: $y, z \notin]x, w[$**.** Nesse caso, como $x < y$ e $z < w$, temos $z \leq x < w \leq y$. Se $f(x) < f(w)$, como $f(w) < f(z)$, em particular temos $z \neq x$ e, portanto, $z < x$. Tome $a = z$, $c = x$ e $b = w$. Teremos $f(c) < f(a)$ e $f(c) < f(b)$. Se $f(x) \geq f(w)$, pela injetividade de f temos que $f(x) > f(w)$. Como $f(y) > f(x)$, teremos $y \neq w$ e, portanto, $w < y$. Tome $a = x$, $c = w$ e $b = y$. Teremos $f(c) < f(a)$ e $f(c) < f(b)$.

■

Corolário 8.24. *Se f é uma função injetora e contínua de A em $\mathbb{R}$ e A é um intervalo aberto, então a imagem de f também é um intervalo aberto.*

Demonstração: Pelo corolário 8.17, a imagem de f é um intervalo. Para mostrar que é aberto basta mostrarmos que não tem máximo nem mínimo. Suponha que a imagem de f tenha máximo, e seja a um ponto de máximo. Isto é, para qualquer $x \in A$ temos $f(x) \leq a$. Como A não tem máximo nem mínimo, existem $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 < a < x_2$. Por hipótese, $f(x_1) \leq a$ e $f(x_2) \leq a$. Como f é injetora, temos $f(x_1) < a$ e $f(x_2) < a$. Mas isso contradiz que, pelo teorema 8.23, a função f tem que ser monótona. ■

Teorema 8.25. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função bijetora e contínua, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e A é um intervalo. Então $f^{-1} : B \longrightarrow A$ também é contínua.*

Demonstração: Sejam $b \in B$, $\varepsilon > 0$ e $a = f^{-1}(b)$. Pelo corolário 8.24, tomando $I =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ temos que $f[I]$ é um intervalo aberto $]c, d[$, Tomando δ o mínimo entre $d-b$ e $b-c$ temos que $]b-\delta, b+\delta[\subset f[I]$. Assim, se $y \in B$ e $|y-b| < \delta$, temos que $y \in f[I]$. Logo, existe $x \in I$ tal que $f(x) = y$. Como f é inversível, pois é bijetora, $f^{-1}(y) = x \in I$, o que implica que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$. Prova-se, assim, que f^{-1} é contínua. ■

8.3 Exemplos de funções contínuas

Vimos, no exercício 8.8, que a função identidade ($f(x) = x$) e as funções constantes são contínuas. Do teorema 8.3, segue que soma e produto de funções contínuas (definidas em um mesmo domínio) são contínuas, bem como o quociente de funções contínuas (definido nos pontos onde o denominador é diferente de zero).

Com isso já garantimos que os polinômios e quocientes de polinômios são exemplos de funções contínuas. A composição de funções contínuas – tomando o cuidade, quando necessário, de restringir as funções ao domínio correto para que a composição esteja bem definida – é uma função contínua, conforme mostra o próximo teorema.

Teorema 8.26. *Sejam $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$ funções contínuas, onde A, B e C são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então $f \circ g : A \longrightarrow C$ é contínua.*

Demonstração: Sejam f e g como no enunciado. Usaremos o item (d) do teorema 8.7 para provar que $f \circ g$ é contínua.

Sejam $x \in A$, $y = g(a)$ e $z = f(y)$. Seja V um aberto tal que $z \in V$. Como f é contínua, existe um aberto W tal que $y \in W$ e $f[W \cap B] \subset V$. Como g é contínua, existe um aberto U tal que $x \in U$ e $g[U \cap A] \subset W$. Mas, como $f[U \cap A] \subset B$, temos $g[U \cap A] \subset W \cap B$. Logo, $(f \circ g)[U \cap A] \subset V$, provando que $f \circ g$ é contínua.

■

Agora trataremos de definir a função a^x, para $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Lembramos a definição de a^x para $x \in \mathbb{Z}$:

Definição 8.27. Sejam $a \neq 0$ um número real e n um número natural. Definimos:

- $a^n = 1$, se $n = 0$;
- $a^{n+1} = a \cdot a^n$, se $n > 0$;
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Assumiremos, sem provar, as propriedades conhecidas de potenciação (para expoentes inteiros): $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ e $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Fixemos $a > 0$. Vamos primeiro definir a^x para x positivo e racional. Lembramos que, no exercício 8.18, provamos a existência de raiz n-ésima de números positivos, para qualquer n inteiro positivo. Então podemos definir $a^{\frac{p}{q}}$ como $\sqrt[q]{a^p}$, mas, para isso, precisamos provar que essa definição não muda quando trocamos uma fração por outra equivalente. Ou seja, precisamos provar o seguinte lema:

Lema 8.28. *Sejam $a > 0$ e m, p, q inteiros positivos. Temos $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{mp}}$.*

Demonstração: Seja $x = \sqrt[mq]{a^{mp}}$. Pela unicidade da existência da raiz, e sabendo que a raiz é, por definição, sempre um número positivo, para provarmos o lema basta provarmos que $x^q = a^p$.

Por definição de x temos que $x^{mq} = a^{mq}$. Usando as propriedades que conhecemos sobre potências com expoentes inteiros, temos que $(x^q)^m = (a^q)^m$. Sendo x^q e a^q ambos números positivos, isso implica que $x^q = a^q$, como queríamos (fica como exercício provar, por indução, que se $y \neq z$ e ambos são positivos, então $y^m \neq z^m$, para todo $m \geq 1$ inteiro). ■

Definição 8.29. Sejam $a > 0$ e x um número racional. Definimos $a^x = \sqrt[q]{a^p}$, onde $x = \frac{p}{q}$, para $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Observe que a definição acima coincide com a de potência para expoente natural, quando x é um número natural. Portanto, não há ambiguidade na notação a^n, quando enxergamos n como um número natural ou como um número racional.

Exercício 8.30. Prove que, se r e s são números racionais e a e b são números reais positivos, então:

(a) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$;

(b) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;

(c) $(a^r)^s = a^{rs}$.

Dica: Use as propriedades correspondentes para os números naturais e o exercício 8.20.

Lema 8.31. *Seja $a > 0$. Defina $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = a^x$. Então a função f é estritamente crescente, se $a > 1$, e estritamente decrescente se $a < 1$.*

Demonstração: Sejam $x < y$ números racionais. Observe que, se $x > 0$, $a^x > 1$, e, se $x < 0$, $a^x < 1$. Se $x = 0$ sabemos que $a^x = 1$. Assim, Podemos assumir que x e y são ambos positivos ou ambos negativos. Primeiro assumimos que são ambos positivos.

Reduzindo ambas as frações a um mesmo denominador, consideramos $x = \frac{p}{n}$ e $y = \frac{q}{n}$, onde p, q e n são inteiros positivos. Como $x < y$, temos $p < q$. Suponhamos, por absurdo, que $a^y \leq a^x$. Isto é, $\sqrt[n]{a^q} \leq \sqrt[n]{a^p}$. Como ambos os lados são positivos, elevar os dois lados por n preserva a desigualdade. Logo, $a^q \leq a^p$. Como $q > p$, podemos escrever $q = p + k$, onde k é um inteiro positivo. Assim, temos

$$a^{p+k} \leq a^p.$$

Pelas propriedades da potência (para expoente inteiro) temos

$$a^p \cdot a^k \leq a^p.$$

Como $a^p > 0$, podemos multiplicar ambos os lados pelo seu inverso, obtendo

$$a^k \leq 1,$$

absurdo, pois $a > 1$ e $k \geq 1$.

No caso $a < 1$, procedemos analogamente, mas assumimos, por absurdo, que $a^y \geq a^x$. Na última passagem acima, chegamos em $a^k \geq 1$, o que é falso quando $a < 1$ e $k \geq 1$.

Agora supomos que $x < y < 0$. É fácil verificar que $(\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$ e que $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. portanto, temos $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ e $a^y = \frac{1}{a^{-y}}$. Como $x < y$, temos $-y < -x$ e, como ambos são positivos, $a^{-y} < a^{-x}$, quando $a > 1$. Logo,

$$\frac{1}{a^{-x}} < \frac{1}{a^{-y}}.$$

Mas isso significa exatamente

$$a^x < a^y,$$

provando que a função é crescente também para os valores negativos.

Se $a < 1$, usamos argumentos análogos para provar que f é decrescente.
■

No caso $a = 1$, a função é constante e igual a 1.

Corolário 8.32. *Sejam $a > 1$ e x números reais. O conjunto* $\{a^r : r \in \mathbb{Q}$ e r < x$\}$ *é limitado superiormente.*

Demonstração: Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq m$ (exite, pela propriedade arquimediana). Pelo lema 8.31, se $r < x \leq m$ então $a^r < a^m$, provando que a^m é um limitante superior do conjunto acima. ■

Definição 8.33. Sejam $a > 1$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Definimos $a^x = sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ e r} < \text{x}\}$.

Assim concluímos a definição de a^x, para todo x real.

Antes de provarmos que a função a^x é contínua, mostraremos um lema.

Lema 8.34. *Se $a > 1$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dada por $x_n = \sqrt[n]{a}$ tende a 1.*

Demonstração: Segue do lema 8.31 que a função x_n é decrescente, visto que $x_n = a^{\frac{1}{n}}$. Claramente $x^n > 1$, para todo n. Portanto, a sequência é limitada inferiormente. Pelo exercício 5.24, sabemos que o ínfimo da sequência é o seu limite (porque ela é limitada inferiormente e decrescente), e que o ínfimo é maior ou igual a 1 (pois 1 é limitante inferior). Seja b esse ínfimo. Mostremos que $b = 1$. Suponha que $b > 1$. Pelo teorema 5.43, b^n tende a infinito. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > a$, absurdo, pois $b \leq \sqrt[n]{a}$. ■

Teorema 8.35. *Sejam $a > 1$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = a^x$. Então f é contínua, crescente, injetora, e tem imagem $]0, \infty[$.*

Demonstração: Mostremos, primeiro, que f é crescentes. Sejam $x < y$ pertencentes a $\mathbb{R}$. Mostremos que $f(x) < f(y)$.

Se x e y são racionais, $f(x) < f(y)$, pelo lema 8.31.

Usando o exercício 2.14, fixemos $z \in]x, y[$ racional

Suponha que x é racional e y é irracional. Como $a^y = sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}$ e $r < y\}$, temos $a^z \leq a^y$, pois pertence ao conjunto do qual a^y é o supremo. Como f é estritamente crescente quando restrita aos racionais, $a^x < a^z \leq a^y$, provando que $f(x) < f(y)$.

Se x é irracional e y é racional, pelo lema 8.31, se $r < x$ então $a^r < a^z$. Logo, a^z é limitante superior do conjunto $\{a^r : r \in \mathbb{Q}$ e $r < x\}$, do qual a^x é supremo. Portanto, $a^x \leq a^z < a^y$, concluindo que $f(x) < f(y)$.

Se x e y são ambos irracionais, repetindo os argumentos dos casos anteriores, temos $f(x) < f(z) < f(y)$. Provamos, assim, que f é estritamente crescente. Em particular, é injetora.

Mostremos que f é contínua. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Usando o lema 8.34, tome $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}$$

Seja p o maior inteiro tal que $\frac{p}{2n_0} < x$.

Tome δ o mínimo entre $x - \frac{p}{2n_0}$ e $\frac{p+2}{2n_0} - x$. Daí segue que, se $|y-x| < \delta$, então $y \in]\frac{p}{2n_0}, \frac{p+2}{2n_0}[$. Como a função f é crescente , isso implica que

$$a^y \in]a^{\frac{p}{2n_0}}, a^{\frac{p+2}{2n_0}}[.$$

Usando o exercício 5.16 e o fato de a^x também pertencer ao intervalo acima, concluímos que, se $|y-x| < \delta$, então

$$|f(y) - f(x)| < |a^{\frac{p+2}{2n_0}} - a^{\frac{p}{2n_0}}| = a^{\frac{p}{2n_0}} |a^{\frac{2}{2n_0}} - 1| < a^{\frac{p}{2n_0}} \frac{\varepsilon}{a^x} < \varepsilon.$$

Falta provarmos que a imagem de f é $]0, \infty[$. Como a^x é sempre positivo, sabemos que a imagem de f está contida em $]0, \infty[$. Além disso, pelo teorema do valor intermediário sabemos que a imagem é um intervalo. Para provarmos que é todo o intervalo $]0, \infty[$ basta mostrarmos duas coisas:

1. Dada $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x < \varepsilon$;

2. Dado $M > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x > M$.

Comecemos provando a segunda parte. Dado $M > 0$, pelo teorema 5.43 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > M$. Para a primeira parte, basta tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > \frac{1}{\varepsilon}$, e teremos $a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \varepsilon$. ■

Exercício 8.36. Suponha que $0 < a < 1$ e f é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, definindo a^x como $(\frac{1}{a})^{-x}$. Prove que f é decrescente, injetora, contínua e tem imagem $]0, \infty[$.

O teorema e exercício anteriores nos permitem introduzir a definição de logaritmo.

Definição 8.37. Dados $a > 0$ e $x > 0$, definimos $\log_a x$ como $f^{-1}(x)$, onde f é a função dada por $f(y) = a^y$.

Dos teoremas 8.25 e 8.35 seguem o seguinte corolário:

Corolário 8.38. *Seja $a > 0$. A função $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ é contínua e bijetora em $\mathbb{R}$.*

8.4 Propriedades operatórias da potência e do logaritmo

Apresentamos, aqui, um roteiro – formado por uma sequência de exercicios com dicas – para provar as principais propriedades operatórias das funções a^x e $\log_a x$.

Exercício 8.39. Se $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$, então $a^x = sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\}$.

Dica: Note que essa é a definição para o caso em que x é irracional, mas não quando x é racional. Para mostrar que é verdadeiro também quando x é racional, use o teorema 8.35.

Exercício 8.40. Sejam $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que:

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

(b) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Dica: Use os exercícios 8.30 e 8.39, e o teorema 3.17 (c). Faça primeiro o caso em que $a, b > 1$ e depois mostre como generalizar para quaisquer a, b positivos.

Exercício 8.41. Sejam $a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $(a^x)^y = a^{xy}$.

Dica: Considere primeiro o caso em que $a > 1$ e $x, y > 0$. Tome $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de racionais que convergem a x e a y, respectivamente (por que existem?). Use os teoremas 8.2 e 8.35.

Exercício 8.42. Prove as seguintes propriedades de logaritmo, tomando a, b, c, x, y números reais positivos:

(a) $\log_a a^x = x$;

(b) $a^{\log_a x} = x$;

(c) $\log_a x^y = y \log_a x$;

(d) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;

(e) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Bibliografia

Bibliografia

[1] Aragona, J. *Números Reais*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010.

[2] Avila, G. *Análise Matemática para Licenciatura*, 3ª ed. São Paulo, Editora Blücher, 2006.

[3] Halmos, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. São Paulo, Polígono, 1973.

[4] Lima, E. L. *Curso de Análise, Volume 1*, 10ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2000.

[5] Milies, F. C. P., Coelho, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática*. São Paulo, Edusp, 2000.

[6] Miraglia, F. *Teoria dos Conjuntos: um Mínimo*. São Paulo, Edusp, 1992.

[7] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis*, 3ª ed. McGraw-Hill Book Company, Cingapura, 1976.

[8] Russell, B.; Whitehead, A. N. *Principia Mathematica*. 2.ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[9] Stoll, R. R. *Set Theory and Logic*. Nova York, Dover Publications, 1979.