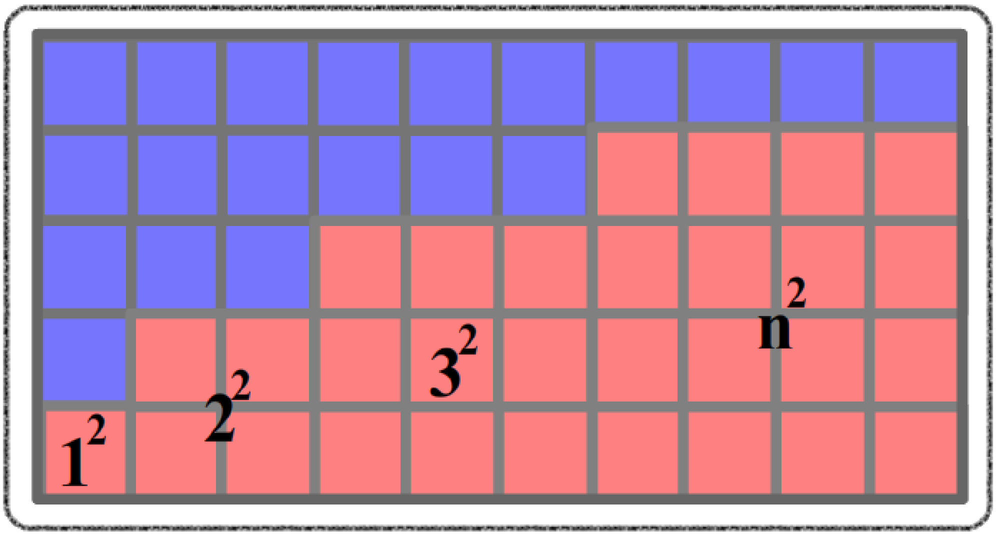
Cálculo de $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Por: Fabrício Caluza Machado



Podemos encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ através de um recurso geométrico, enfileirando quadrados de área equivalente aos termos da soma e envolvendo os quadrados por um retângulo, conforme representado na figura anterior.

Temos que $\sum_{k=1}^{n} k^2$ é igual à área do retângulo menos a área dos quadrados azuis:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = A_{vermelho} = A_{retângulo} - A_{azul}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1).\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} p$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k.(k+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{n.(n+1)}{2}$$

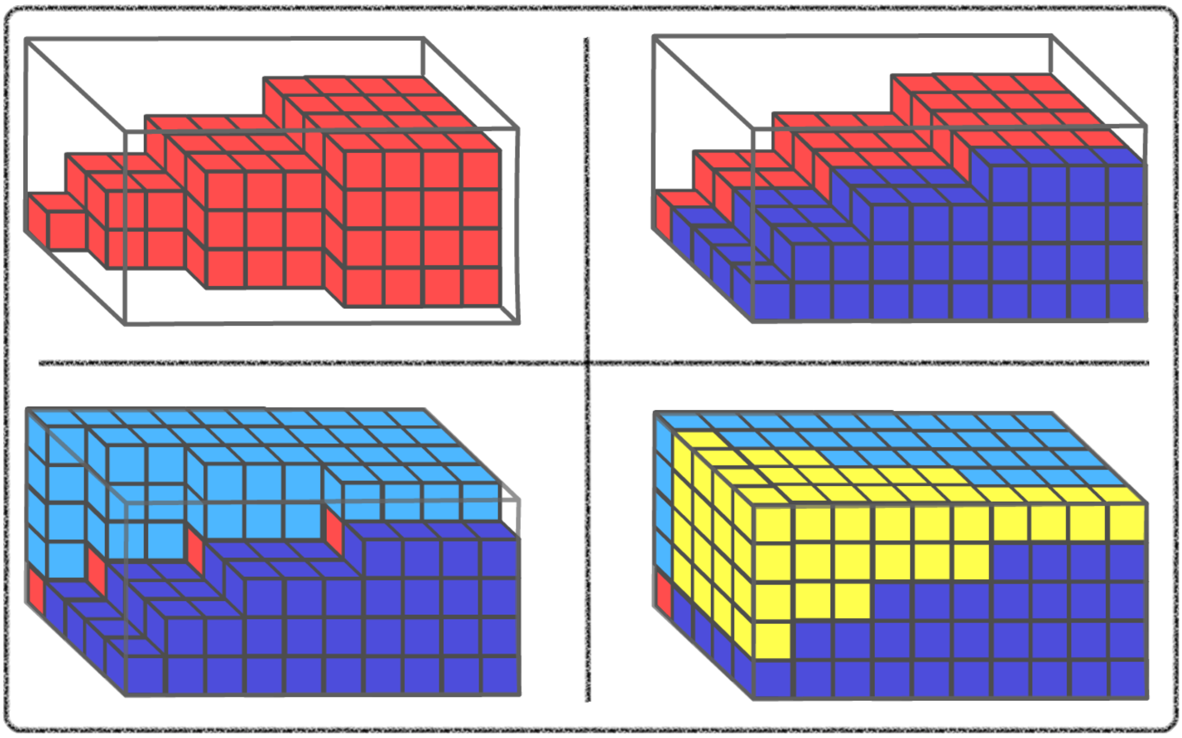
$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n.(n+1).(n+\tfrac{1}{2})$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

Obs. Seria natural considerarmos o retângulo sem a linha superior, que só possui quadrados azuis e é claro que isso não afetaria a obtenção do mesmo resultado para a soma dos quadrados vermelhos. Entretanto, isso dificulta um pouco as contas, pois os somatórios relativos à área azul passam a ser até (n-1) e não até n e teríamos que somar e subtrair termos para obtermos as mesmas equações.

Cálculo de $\sum_{k=1}^{n} k^3$

É possível aplicar um método semelhante ao usado anteriormente para obtermos uma expressão para $\sum_{k=1}^{n} k^3$, entretanto, agora os desenhos serão em 3 dimensões e as contas um pouco maiores.



Representamos o somatório através da justaposição de cubos vermelhos e os envolvemos por um paralelepípedo de dimensões $(n+1).(n+1).\sum_{k=1}^{n} k$. De novo, escolhemos um paralelepípedo de dimensões (n+1) e não n, como poderia parecer mais natural, para simplificar as contas que virão a seguir.

Temos que o valor do somatório $\sum_{k=1}^{n} k^3$ é igual ao volume total do paralelepípedo menos o volume não ocupado, que é dividido em três regiões: azul escuro, azul claro e amarelo:

$$V_{vermelho} = V_{paralelepípedo} - V_{azul\ escuro} - V_{azul\ claro} - V_{amarelo}$$

$$V_{vermelho} = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$V_{paralelepípedo} = (n+1)^2.\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)^3}{2}$$

$$V_{azul\ escuro} = V_{azul\ claro} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} p^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3+3k^2+k}{6}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{n.(n+1).(2n+1)}{12} + \frac{n.(n+1)}{12} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{n.(n+1)^2}{6}$$

$$V_{amarelo} = \sum_{k=1}^{n} k.(n+1-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k(n+1)^2 - 2k^2(n+1) + k^3)$$

$$= (n+1)^2.\sum_{k=1}^{n} k - 2.(n+1).\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \frac{n.(n+1)^3}{2} - \frac{n.(n+1)^2.(2n+1)}{3} + \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= -\frac{n.(n+1)^2.(n-1)}{6} + \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Substituindo os volumes na primeira equação:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n.(n+1)^3}{2} - 2\left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{n.(n+1)^2}{6}\right) - \left(-\frac{n.(n+1)^2.(n-1)}{6} + \sum_{k=1}^{n} k^3\right)$$

$$\frac{8}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n.(n+1)^3}{2} - \frac{n.(n+1)^2}{3} + \frac{n.(n+1)^2.(n-1)}{6}$$

$$8\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n.(n+1)^2}{2}.(\,3(n+1) - 2 + n - 1\,)$$

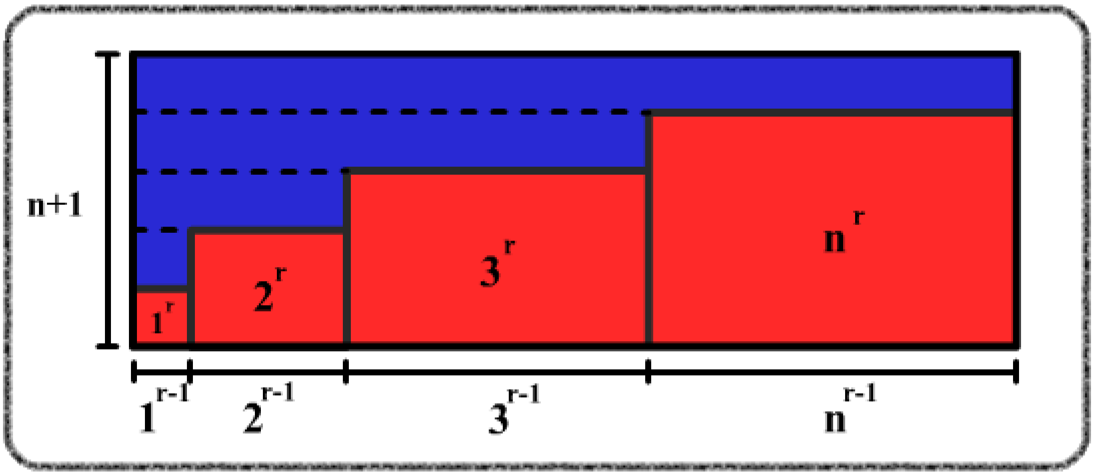
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n.(n+1)^2}{16}.4n$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}}$$

Cálculo de $\sum_{k=1}^{n} k^r$

- <u>Relação de recorrência:</u>

Ainda que para r = 2 a interpretação geométrica do somatório tenha sido uma solução simples, vimos que para r = 3 o método ficou bem mais complicado e não é possível generalizá-lo para r > 3. Entretanto, existe outra forma de generalizar o enfileiramento de quadrados que resulta em uma expressão de recorrência para $S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$, permitindo seu cálculo a partir das expressões de potências menores. A ideia se baseia na seguinte interpretação geométrica:



Nessa figura, estamos empilhando retângulos de comprimento k^{r-1} e altura k, de modo que o somatório $S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$ pode ser identificado com a área da região vermelha. A área do retângulo é $(n+1).S_{r-1}(n)$ e a área azul pode ser expressa pelo somatório duplo $\sum_{k=1}^{n} S_{r-1}(k)$, de modo que obtemos a relação:

$$\boldsymbol{S_r(n) + \sum_{k=1}^{n} S_{r-1}(k) = (n+1).S_{r-1}(n)}$$

<u>Exemplo de aplicação:</u>

- $\mathbf{r = 3}$

$$\mathrm{S_3(n) + \sum_{k=1}^{n} S_2(k) = (n+1).S_2(n)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{S_3(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k.(k+1)(2k+1)}{6} = (n+1).\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}} \Rightarrow$$

$$\mathrm{S_3(n) + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} (2k^3 + 3k^2 + k) = (n+1).\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}} \Rightarrow$$

$$\mathrm{\frac{4}{3}S_3(n) + \frac{1}{2}\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\frac{n.(n+1)}{2} = (n+1).\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}\mathrm{S}_3(\mathrm{n}) = \frac{\mathrm{n}.(\mathrm{n}+1)}{2.6}.(2.(2\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+1) - (2\mathrm{n}+1) - 1)$$
$$\frac{4}{3}\mathrm{S}_3(\mathrm{n}) = \frac{\mathrm{n}.(\mathrm{n}+1)}{2.6}.((2\mathrm{n}+1)^2 - 1)$$
$$\frac{4}{3}\mathrm{S}_3(\mathrm{n}) = \frac{\mathrm{n}.(\mathrm{n}+1)}{2.6}.2.(\mathrm{n}+1).2\mathrm{n}$$

$$\mathbf{S_3(n)} = \frac{\mathbf{n^2(n+1)^2}}{\mathbf{4}}$$

- <u>Polinômios Geradores:</u>

Uma outra abordagem que pode ser tomada para o cálculo do somatório $\sum_{k=1}^{n} k^r$ é através de meios algébricos, e não mais geométricos.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2} = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4} = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$

Observando as expressões dos três primeiros somatórios, observamos que para r de 1 a 3, a expressão para $\sum_{k=1}^{n} k^r$é um polinômio de grau $r+1$. Assumindo que esse padrão se mantém (essa afirmação pode ser provada através da relação de recorrência), podemos encontrar uma expressão para $\sum_{k=1}^{n} k^r$na forma de um polinômio p(n) de grau $r+1$ e determinar seus coeficientes através das condições: $p(0) = 0$ e $p(n) - p(n-1) = n^r \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Uma vez encontrado um polinômio que atenda às duas condições, o polinômio terá valor igual ao somatório para todo n por indução.

Como exemplo, encontraremos a fórmula de $\sum_{k=1}^{n} k^4$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = p(n) = a_5 n^5 + a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

$$p(0) = 0 \to a_0 = 0$$

$$p(n) - p(n-1) = n^4 \ \ \forall n$$

$$\to \ a_5 n^5 + a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n - a_5(n-1)^5 - a_4(n-1)^4 - a_3(n-1)^3 \\ - a_2(n-1)^2 - a_1(n-1) = n^4$$

$$\rightarrow a_5n^5 + a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n - a_5(n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n^1 - 1) \\ - a_4(n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) - a_3(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \\ - a_2(n^2 - 2n + 1) - a_1(n - 1) - n^4 = 0$$

$$\rightarrow (a_4 + 5a_5 - a_4 - 1)n^4 + (a_3 - 10a_5 + 4a_4 - a_3)n^3 + (a_2 + 10a_5 - 6a_4 + 3a_3 - a_2)n^2 \\ + (a_1 - 5a_5 + 4a_4 - 3a_3 + 2a_2 - a_1)n + (a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1) = 0$$

Como esse polinômio é igual a 0 para todo n, seus coeficientes são todos iguais a zero, portanto:

$$5a_5 - 1 = 0 \rightarrow a_5 = \frac{1}{5},$$

$$-2 + 4a_4 = 0 \rightarrow a_4 = \frac{1}{2},$$

$$2 - 3 + 3a_3 = 0 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$-1 + 2 - 1 + 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a_1 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{30}$$

$$\therefore \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{k^4} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \boldsymbol{\frac{n.(n+1).(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

- <u>Referência:</u>

Algumas digressões científicas: *bbonagura.blog.uol.com.br/*