

O Problema de Três Corpos Restrito

Fabício Caluza Machado
fabcm1@gmail.com

Junho de 2013

Conteúdo

- 1 Apresentação do Problema
- 2 Formulação Física
- 3 Simulações Numéricas
- 4 Comparação com método de passos fixos
- 5 Pontos de Lagrange (extra)

Apresentação do Problema

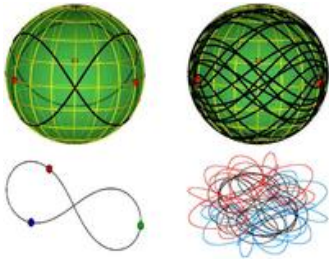
O Problema de Três Corpos

- O problema de Três Corpos consiste em determinar o movimento de três corpos com massa, dadas suas posições e velocidades iniciais e considerando que estes corpos interagem gravitacionalmente entre si (isto é, com uma força de atração, central e proporcional às massas e ao inverso do quadrado da distância entre os corpos).
- Exemplos: a interação entre uma estrela, um planeta e seu satélite, interação entre estrelas (sistemas com múltiplas estrelas são comuns na galáxia!)

O Problema de Três Corpos

- A partir de trabalhos de Heinrich Bruns (1887) e Henri Poincaré (1890) chegou-se à conclusão que o problema não pode ser resolvido em termos de expressões algébricas e integrais [1].
- O problema é extremamente sensível às condições iniciais e existe pesquisa para se determinar sistemas limitados (onde nenhum corpo é ejetado do sistema) e com órbitas fechadas (periódicas) [2].

Physicists Discover a Whopping 13 New Solutions to Three-Body Problem



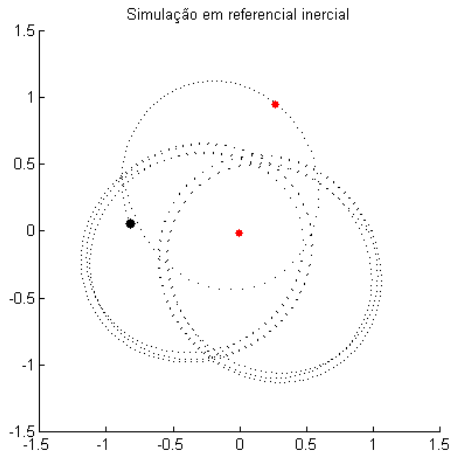
Šuvakov and Dmitrašinović method was to start with an existing solution on a computer simulation and then tweak its initial conditions until a new type of orbit materialized, as they report in a paper in press at Physical Review Letters. "What we did was the most simple-minded thing that you could do," Dmitrašinović says. "We were shocked when we discovered all these things, and we were even more shocked when we discovered that they had not been discovered before us."

in: <http://news.sciencemag.org/sciencenow/2013/03/physicists-discover-a-whopping.html>

O Problema de Três Corpos Restrito

- Uma simplificação do problema anterior. Neste caso, consideramos um terceiro corpo de massa desprezível, isto é, ele sofre influência gravitacional dos outros dois corpos, mas não interfere em seu movimento.
- Exemplos: O sistema Sol-Terra-Lua. Um satélite orbitando a Terra e a Lua.

Simulação 1: referencial inercial



Formulação Física

Sistema de Unidades

Primeiro, definiremos um sistema de unidades que simplifique os parâmetros do problema.

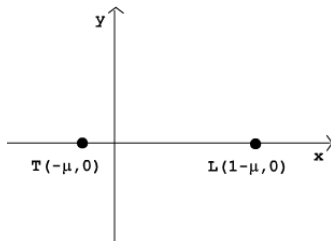
1. A unidade de comprimento será a distância entre a Terra e a Lua: $d_{TL} := 1$
2. A unidade de massa será as somas das massas da Terra e da Lua: $M_T + M_L := 1$
3. A unidade de tempo será tal que a velocidade angular de rotação da Terra e da Lua em torno de seu centro de massa seja igual a 1. Isto é, sendo T_{TL} o período de rotação do sistema, $\frac{T_{TL}}{2\pi} := 1$.

Neste sistema de unidades, a constante gravitacional G é igual a 1.

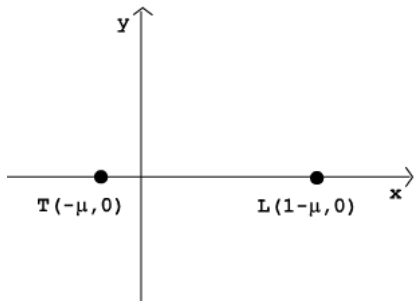
Referencial

Definimos como origem do referencial o centro de massa da Terra e da Lua e consideraremos ambos fixos no eixo x , de modo que suas coordenadas sejam $T = (-\mu, 0)$ e $L = (1 - \mu, 0)$.

$$\mu \text{ deve ser tal que } \mu \cdot M_T = (1 - \mu) \cdot M_L \Rightarrow \mu = \frac{M_L}{M_T + M_L}$$
$$\Rightarrow \mu = 0.012277471.$$



Referencial



Para que as coordenadas da Terra e da Lua sejam fixas, o sistema de referência deve rotacionar junto com estes e portanto ser não inercial. Se (\bar{x}, \bar{y}) forem as coordenadas em um sistema inercial (onde a Terra e a Lua não são fixas, giram), a transformação para o referencial adotado será:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cdot \cos t - y \cdot \sin t \\ \bar{y} = x \cdot \sin t + y \cdot \cos t \end{cases}$$

Equações

O sistema de equações que descreve a trajetória de um satélite no referencial descrito é:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{r_L^3} \begin{pmatrix} x - (1 - \mu) \\ y \end{pmatrix} - \frac{1 - \mu}{r_T^3} \begin{pmatrix} x + \mu \\ y \end{pmatrix}$$

$$r_L = \sqrt{(x - (1 - \mu))^2 + y^2}$$

$$r_T = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$$

Este sistema é obtido diretamente pela aplicação da segunda lei de Newton.

O primeiro termo que compõe a aceleração do satélite é a força centrífuga, o segundo a força de Coriolis (que é sempre ortogonal ao movimento do satélite), o terceiro a força gravitacional exercida pela Lua e o quarto a força gravitacional exercida pela Terra.

Simulações Numéricas

PVI visto em referencial não inercial por 1 ciclo

A primeira simulação realizada foi com as condições iniciais:

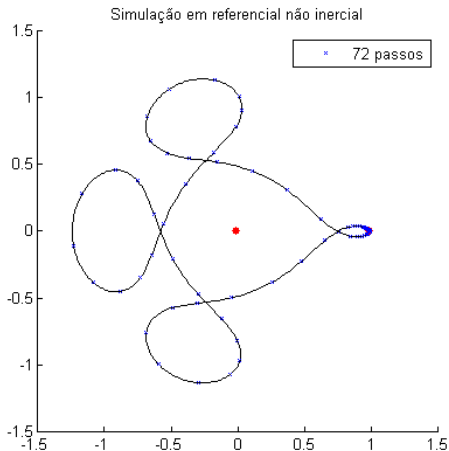
$$y_0 = (0.994, 0, 0, -2.00159)$$

Sendo que a terceira e quarta coordenadas se referem às velocidades \dot{x} e \dot{y} , respectivamente. Estas condições descrevem uma nave inicialmente à direita da Lua e lançada para baixo.

O sistema foi simulado com o método `ode45` do `Matlab`, que é um método de passos adaptativos, que ajusta o tamanho de cada passo de forma a limitar o erro de truncamento local $|e(k)|$ em cada coordenada:

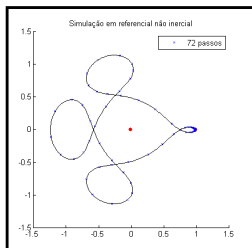
$$|e(k)| \leq \max(\text{RelTol} * \text{abs}(y(k)), \text{AbsTol})$$

Na simulação, foram usados os valores $\text{RelTol} = 10^{-3}$ e $\text{AbsTol} = 10^{-8}$. RelTol expressa a quantidade de algarismos significativos a ser levada em conta, já AbsTol representa a precisão absoluta máxima, que é usada no lugar da precisão relativa quando o valor absoluto de $y(k)$ é muito pequeno.

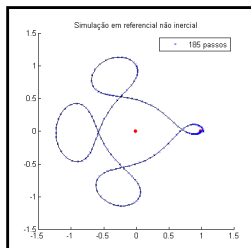


Em azul, os pontos realmente calculados pelo método. A trajetória desenhada foi obtida via interpolação a partir destes pontos.

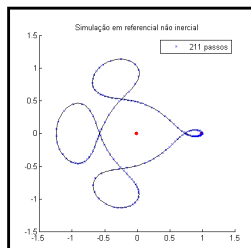
Comparação entre diferentes solvers



ode45



ode23



ode113

Comparação entre diferentes solvers

Comparação entre diferentes solvers para a simulação do mesmo PVI.

	ode45	ode23	ode113
n° passos	72	185	211
n° avaliações	517	613	438
tempo (s)	0.061676	0.071082	0.205601

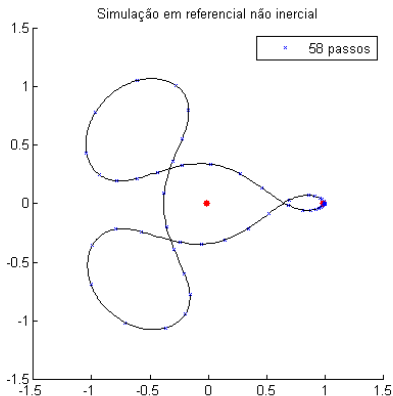
$$y_0 = (0.994, 0, 0, -2.00159), \text{ RelTol} = 10^{-3}, \text{ AbsTol} = 10^{-8}$$

PVI com condições iniciais ligeiramente alteradas

A simulação seguinte foi realizada com condições iniciais ligeiramente alteradas:

$$y_0 = (0.994, 0, 0, -2.0317)$$

(no teste anterior, tínhamos $y_0 = (0.994, 0, 0, -2.00159)$).



Observa-se que neste caso a trajetória foi bem diferente, o que demonstra a instabilidade do sistema em relação às condições iniciais e à necessidade de um método com controle de erro para a simulação.

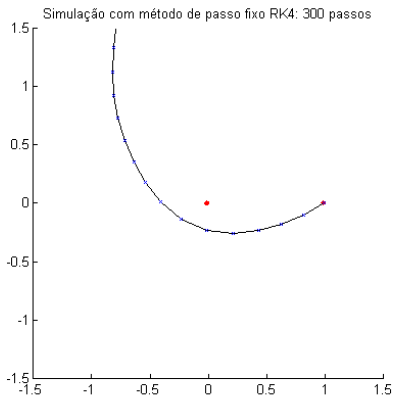
Comparação com método de passos fixos

Runge-Kutta 4

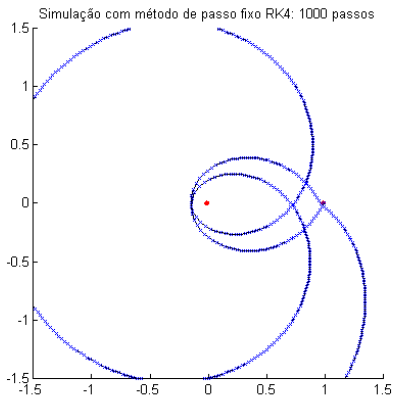
Para comparação com os resultados obtidos pelo método de passo adaptativo, foi implementado o método de Runge-Kutta de ordem 4 clássico, com passos fixos.

A seguir, as órbitas obtidas na simulação do primeiro PVI apresentado, com condição inicial $y_0 = (0.994, 0, 0, -2.00159)$ e diversos números de passos.

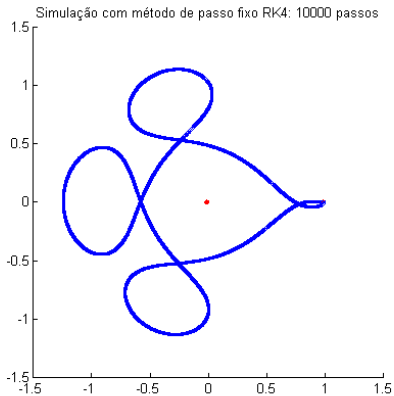
300 passos



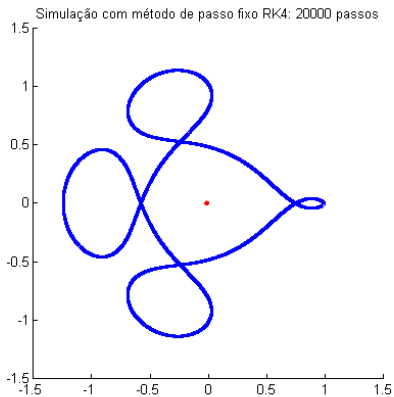
1000 passos



10000 passos



20000 passos



Pontos de Lagrange (extra)

Pontos de Lagrange

- Os pontos de Lagrange são pontos de equilíbrio do sistema, isto é, condições iniciais que geram soluções estacionárias.
- O sistema considerado neste trabalho possui exatamente 5 pontos de equilíbrio, denominados $L1$, $L2$, $L3$, $L4$ e $L5$. No sistema Terra-Lua e no sistema Terra-Sol, estes pontos são importantes para o uso de satélites.
- Para compreendê-los, é útil analisar o *potencial generalizado* do sistema.

Potenciais

Lembrando, as forças que agem sobre a partícula são:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{r_L^3} \begin{pmatrix} x - (1 - \mu) \\ y \end{pmatrix} - \frac{1 - \mu}{r_T^3} \begin{pmatrix} x + \mu \\ y \end{pmatrix}$$

$$r_M = \sqrt{(x - (1 - \mu))^2 + y^2}$$

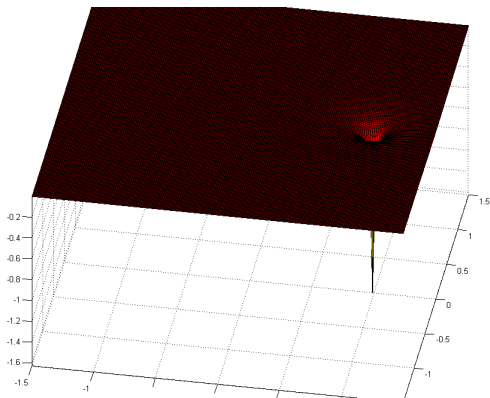
$$r_E = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$$

- O sistema é não conservativo, pois possui uma força que depende da velocidade da partícula (força de Coriolis). Isto significa que não é possível definir um campo potencial que represente as forças no sistema.

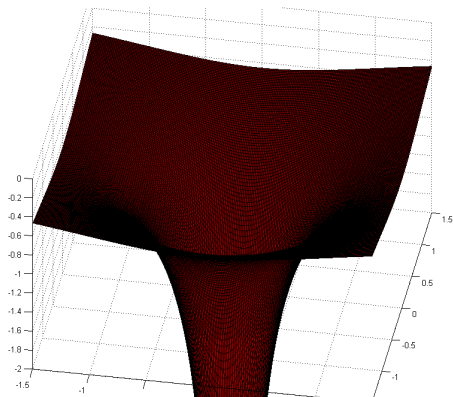
Potenciais

- Ainda assim, podemos considerar um *potencial generalizado*, baseado apenas nas forças que não dependem da velocidade (afinal, para a análise dos pontos de equilíbrio, podemos considerar a velocidade nula). Este sistema será conservativo.
- O potencial do sistema pode ser calculado como a soma dos potenciais de cada uma das forças. No caso da força gravitacional, temos $U_{GT} = \frac{\mu-1}{r_T}$ e $U_{GL} = \frac{-\mu}{r_L}$ e no caso da força centrífuga, temos $U_C = -\frac{r^2}{2}$.

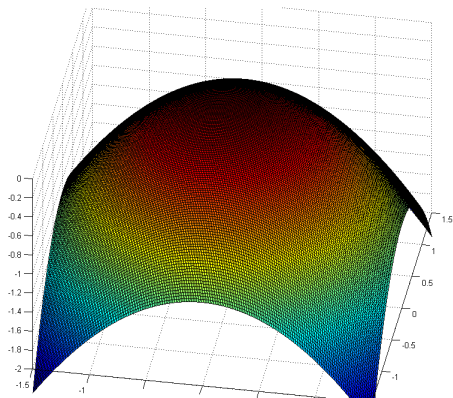
Potencial gravitacional da Lua



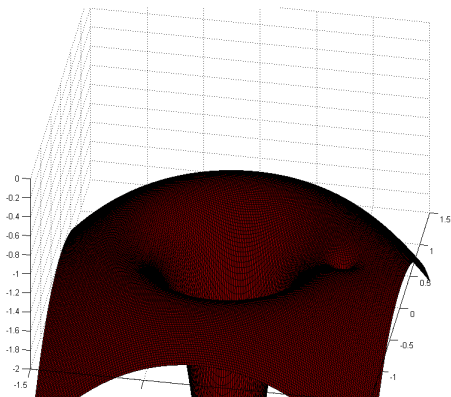
Potencial gravitacional da Terra



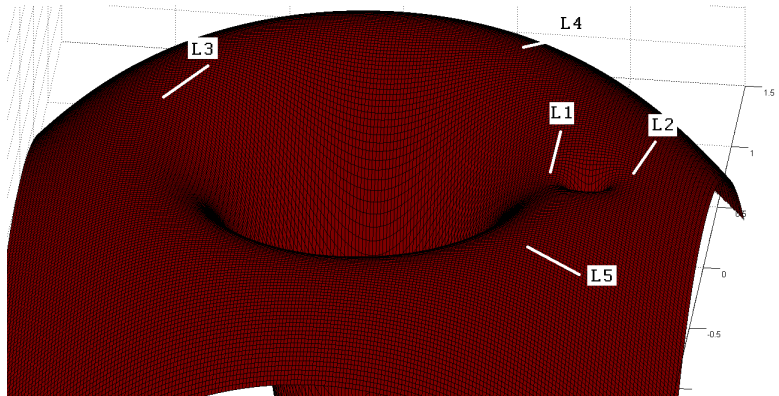
Potencial da força centrífuga



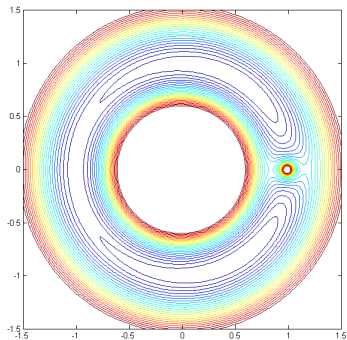
Potencial generalizado do sistema Terra-Lua








Pontos de Lagrange



Pontos de Lagrange



-  WOLFRAM, Stephen *A new kind of science* Champaign, IL: Wolfram Media, c2002.
-  Šuvakov, Milovan and Dmitrašinović, V. *Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits*, Phys. Rev. Lett. 110, 114301 (2013)
-  U. M. Ascher and L. R. Petzold *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equation*, Philadelphia: SIAM, 1998.
-  C. H. Edwards Jr. and D. E. Penney, *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno*, 3ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1995.
-  Cornish, Neil J., *The Lagrangian Points*, Montana State University - Department of Physics. Retrieved 29 July 2011.

Disponível em: <http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf>

Obrigado pela atenção!

Fabrício Caluza Machado

fabcm1@gmail.com

www.ime.unicamp.br/~ra102174

Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica - UNICAMP