Somatórios: uma interpretação geométrica

Fabrício Caluza Machado
fabcm1@gmail.com

VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

Introdução

Este trabalho apresenta deduções para expressões de somatórios do tipo $S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$. Complementando o método de prova por indução, aqui serão exibidas interpretações geométricas para essas fórmulas.

O trabalho foi apresentado na disciplina MA 732 - Tópicos Especiais de Álgebra, com a professora Maria Sueli Marconi Roversi.

$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

Aqui, o somatório é calculado através do "empilhamento de quadrados".

$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

Isto é possível envolvendo os quadrados por um retângulo de dimensão conhecida,

$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

e descontando a área da região complementar (azul), que vemos ser igual à área vermelha.

$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

O que permite a dedução da fórmula.

$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

Nesse caso, o processo é parecido.

$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

Os quadrados são envolvidos por um retângulo de dimensão conhecida (a largura corresponde ao somatório $S_1(n)$),

$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

e a região complementar (azul) é calculada com um somatório duplo.

$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

O que permite a dedução da fórmula de $S_2(n)$, usando o resultado para $S_1(n)$.

As idéias apresentadas nesses dois vídeos podem ser estendidas de duas formas para expoentes maiores.

A primeira, tridimensional e específica para $S_3(n)$ e a segunda, bidimensional, mas que permite a dedução de fórmulas para $S_r(n)$ através de uma relação recursiva.

$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

Este somatório é calculado "empilhando-se" cubos.

$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

Os cubos são envolvidos por um paralelepípedo de dimensão conhecida (a largura corresponde ao somatório $S_1(n)$),

$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

a região complementar (azul) é calculada com um somatório duplo (usando-se a expressão para S_2).

$S_3(n) = \sum_{k=3}^n k^3$

assim como a região em azul claro.

$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

a região em amarelo também pode ser obtida com um somatório. Observe que a largura do bloco k é igual à do cubo atrás, mas sua altura e profundidade são iguais a $(n + 1 - k)$.

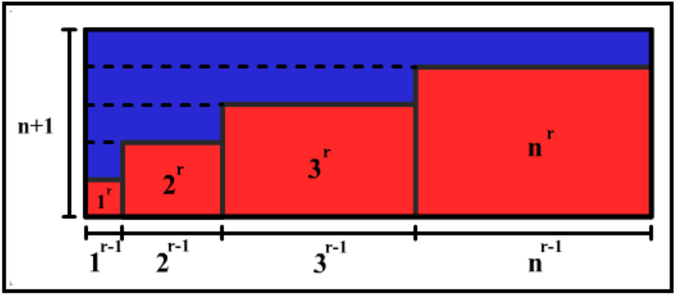
$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

a região em amarelo também pode ser obtida com um somatório. Observe que a largura do bloco k é igual à do cubo atrás, mas sua altura e profundidade são iguais a $(n + 1 - k)$.

$S_3(n) = \sum_{k=3}^{n} k^3$

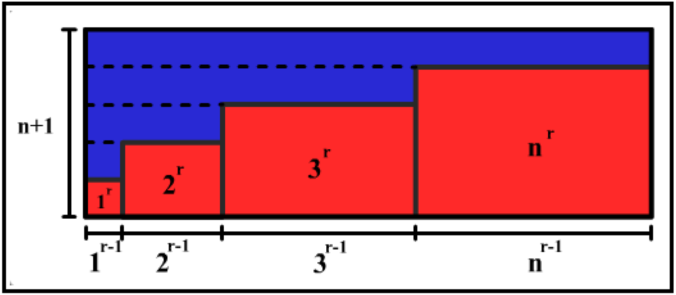
E assim, a fórmula para $S_3(n)$ pode ser deduzida com alguma manipulação algébrica e usando-se os resultados para $S_1(n)$ e $S_2(n)$ já conhecidos.

$S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$



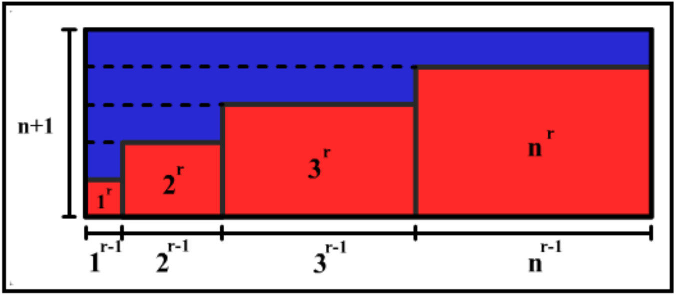
Nessa figura, estamos empilhando retângulos de comprimento k^{r-1} e altura k, de modo que o somatório $S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$ pode ser identificado com a área da região vermelha.

$S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$



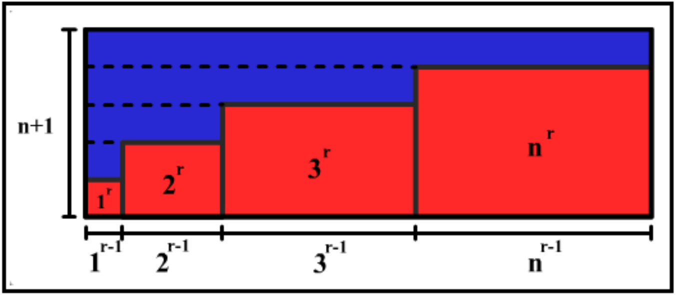
A área do retângulo é $(n+1).S_{r-1}(n)$ e a área azul pode ser expressa pelo somatório duplo $\sum_{k=1}^{n} S_{r-1}(k)$, de modo que obtemos a relação:

$S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$



$$S_r(n) + \sum_{k=1}^{n} S_{r-1}(k) = (n+1).S_{r-1}(n)$$

$S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$



$$S_r(n) + \sum_{k=1}^{n} S_{r-1}(k) = (n+1).S_{r-1}(n)$$

que pode ser usada para se deduzir $S_r(n)$ a partir de relações anteriores. Fazendo $r = 2$ temos exatamente o desenvolvimento mostrado anteriormente.

Obrigado pela atenção!

Fabrício Caluza Machado
fabcm1@gmail.com
www.ime.unicamp.br/~ra102174
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP