

Simulação de um pêndulo duplo flexível

Fabício Caluza Machado
fabcm1@gmail.com

VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

Introdução

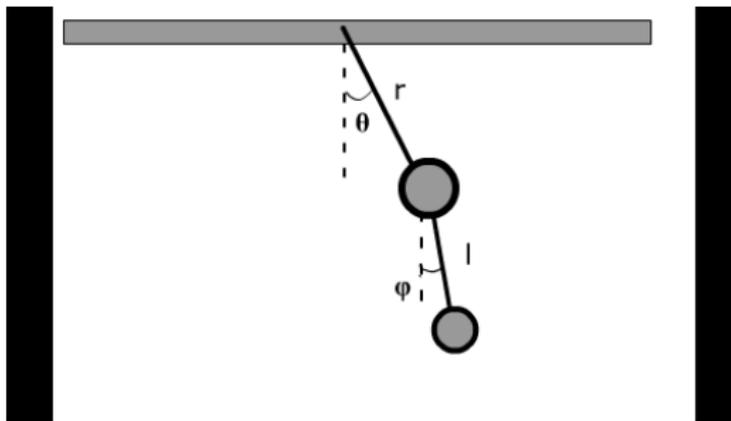
- Neste trabalho, foi criado um simulador de um pêndulo duplo com hastes flexíveis.
- Além de simular o sistema em tempo real, o programa contém opções interativas, que permitem ao usuário alterar parâmetros do sistema durante a simulação.
- Por fim, é observada a não conservação da energia total do sistema, pelo método numérico.

Etapas

A produção desse simulador pode ser dividida em 3 etapas:

1. Modelagem Física
2. Métodos Numéricos
3. Implementação

Coordenadas



O sistema físico simulado consiste em duas massas acopladas por molas, que também são pêndulos. Esse sistema possui quatro graus de liberdade, podendo ser descrito através dos comprimentos das duas molas (r e l) e ângulos de rotação (θ e φ).

Coordenadas

O sistema físico simulado consiste em duas massas acopladas por molas, que também são pêndulos. Esse sistema possui quatro graus de liberdade, podendo ser descrito através dos comprimentos das duas molas (r e l) e ângulos de rotação (θ e φ).

Coordenadas

O sistema físico simulado consiste em duas massas acopladas por molas, que também são pêndulos. Esse sistema possui quatro graus de liberdade, podendo ser descrito através dos comprimentos das duas molas (r e l) e ângulos de rotação (θ e φ).

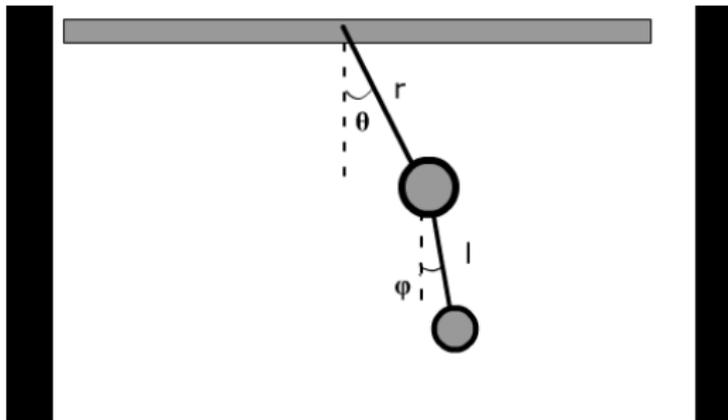
Coordenadas

O sistema físico simulado consiste em duas massas acopladas por molas, que também são pêndulos. Esse sistema possui quatro graus de liberdade, podendo ser descrito através dos comprimentos das duas molas (r e l) e ângulos de rotação (θ e φ).

Coordenadas

O sistema físico simulado consiste em duas massas acopladas por molas, que também são pêndulos. Esse sistema possui quatro graus de liberdade, podendo ser descrito através dos comprimentos das duas molas (r e l) e ângulos de rotação (θ e φ).

Coordenadas



O sistema físico simulado consiste em duas massas acopladas por molas, que também são pêndulos. Esse sistema possui quatro graus de liberdade, podendo ser descrito através dos comprimentos das duas molas (r e l) e ângulos de rotação (θ e φ).

Equações de Lagrange

Escrevendo as energias cinética (T) e potencial (U) do sistema em função dessas quatro coordenadas, podemos obter as equações do movimento de Lagrange do sistema

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Onde $L = T - U$ e q é uma das quatro coordenadas.

Aplicando ao sistema, este é descrito através de um sistema de quatro equações diferenciais de segunda ordem.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta - \phi) & 1 & -r \cdot \sin(\theta - \phi) & 0 \\ m_1 + m_2 & m_2 \cdot \cos(\theta - \phi) & 0 & m_2 \cdot l \cdot \sin(\theta - \phi) \\ l \cdot \sin(\theta - \phi) & 0 & r \cdot l \cdot \cos(\theta - \phi) & l^2 \\ 0 & m_2 \cdot r \cdot \sin(\theta - \phi) & -(m_1 + m_2) & -m_2 \cdot r \cdot l \cdot \cos(\theta - \phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{l} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} l \cdot \phi^2 + g \cdot \cos \phi - \frac{k_2}{m_2} (l - b) + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta - \phi) + r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta - \phi) \\ (m_1 + m_2) \cdot (r \cdot \dot{\theta}^2 + g \cdot \cos \theta) + m_2 \cdot l \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\theta - \phi) - k_1 \cdot (r - a) \\ -g \cdot l \cdot \sin \phi - 2 \cdot l \cdot \dot{l} \cdot \dot{\phi} - 2 \cdot l \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta - \phi) + r \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta - \phi) \\ (m_1 + m_2) \cdot (2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + g \cdot r \cdot \sin \theta) + 2 \cdot m_2 \cdot r \cdot l \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\theta - \phi) + m_2 \cdot r \cdot l \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\theta - \phi) \end{pmatrix}$$

Estas equações são um sistema linear, que determina as derivadas de segunda ordem das coordenadas em função das próprias coordenadas e suas derivadas de primeira ordem.

Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)

O programa simula a evolução desse sistema através de um método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4):

$$\dot{y} = f(t, y)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

onde:

y_n é a aproximação do método para as coordenadas em

$$t_n = t_0 + n.h$$

$$k_1 = h.f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h.f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h.f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h.f(t_n + h, y_n + k_3)$$

- Observe que, sendo um método iterativo, os erros causados por suas aproximações são cumulativos.
- Isso altera características importantes do sistema sendo simulado, notadamente a conservação de energia, que veremos, deixa de ocorrer.

O programa

O programa foi feito em Flash e possui diversas interatividades.

O programa

Possui menus, onde as coordenadas podem ser acompanhadas e alteradas.

O programa

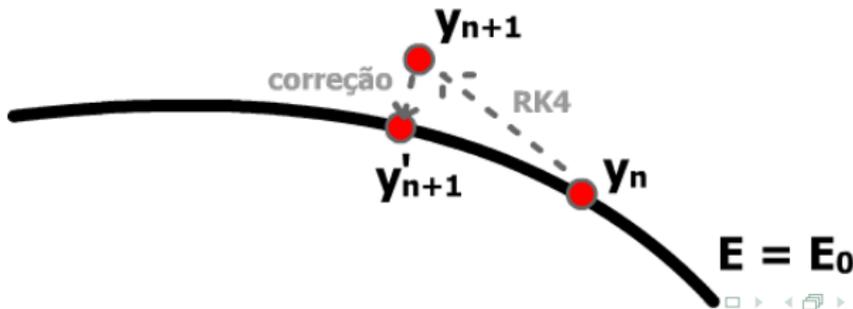
É um menu onde parâmetros do sistema, como o valor das massas e a constante elástica das molas, podem ser alterados.

O problema com o RK4

- Como o método RK4 apenas leva em conta as equações diferenciais, ele deixa de considerar características especiais do sistema. No caso, o fato do sistema ser conservativo. A simulação acaba 'dissipando' a energia do sistema, com o passar do tempo.
- Esta característica é conhecida na literatura[3] e existem outros métodos capazes de obter melhores resultados nesse sentido.

Uma possível correção

- Neste trabalho, não foi feito um estudo mais aprofundado sobre métodos alternativos de simulação. Entretanto, foi implementada uma correção mais "simples", também sugerida em [3].
- A idéia é enxergar a energia como um campo escalar no espaço de fases do sistema (coordenadas e suas derivadas) e, após cada iteração do RK4, fazer uma pequena correção no ponto calculado, usando o gradiente como direção de movimento.



Comparação

Essa simulação compara versões do simulador com e sem a correção.

Comparação

Observe a energia sendo exibida no canto superior (o seu valor absoluto não é relevante, devido à escolha do referencial).

Comparação

Aqui o vídeo pula para 70s de simulação. Observe que o sistema da esquerda está claramente dissipando movimento.

Bibliografia



[Gomes Ruggiero, Márcia A. e Rocha Lopes, Vera Lúcia da. 1997]

Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais. 2a. ed, Pearson Education do Brasil.



[Thornton, S.T. e Marion, J.B. 2004]

Classical Dynamics of Particles and Systems. 5a ed. Saunders College Publ.



[Zhang, Fei 1742] Fei Zhang.

Energy corrections in Hamiltonian dynamics simulations.
Computer Physics Communications 99 53-58

Obrigado pela atenção!

Fabrício Caluza Machado

fabcm1@gmail.com

Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica - UNICAMP

Agradecimentos a Ronaldo Vieira, pelas dicas e
colaboração.