From

Imaginary quantity

to

Complexe number

A historical step

Algebra: Celebrating Paulo Ribenboim's Ninetieth Birthday, IME-USP, October 26, 2018
D. Flament (CNRS - Université de Lorraine, Nancy, UMR 7117)

Rafael Bombelli
(1526-1572)

L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
Novamente posta in luce.
(*IN BOLOGNA, Nella Stamperia di Giovanni Rossi, MDLXXII*)

« non si può chiamare ne piú, ne meno, però lo chiamarò *più di meno*, quando egli di doverà aggiongere, e quando si doverà cavare, lo chiamarò *meno di meno*, … »

(libro primo, p. 169)

Deux règles, parmi les huit règles qu'il introduit pour la multiplication de ses **SIGNES**, seront la cause de bien des difficultés :

Più di meno via più di meno, fà meno. (**p.di m. via p.di m. fà m.**)
Meno di meno via meno di meno fà meno. (**m. di m. via m.di m. fà m.**)

Pb. Passage des signes ***p. dm*** et ***m.dm*** aux opérations ***impossibles***, resp. : $+\sqrt{-1^2}$ et $-\sqrt{-1^2}$

Albert Girard (1595-1632)

Invention nouvelle en l'algèbre

(Amsterdam, 1629 ; réimp. par le Dr. D. Bierens de Haan, Leiden, 1884)

"Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le demonstre, …".

Un exemple édifiant :

Si 1 (4) est esgale à 4 (1) - 3, alors … les quatre solutions seront :

$$1$$

$$1$$

$$-1+\sqrt{-2}$$

$$-1-\sqrt{-2}$$

Extraits de
Albert GIRARD (1595-1632)
Invention nouvelle en l'algèbre
(Amsterdam, 1629 ; réimp. par le Dr. D. Bierens de Haan, Leiden, 1884)

"[…] on pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, et qu'il ny a point d'autres solutions, et pour son utilité...".

"[…] on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien ; d'autres moins que rien ; et d'autres enveloppées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables".

Extraits de RENE DESCARTES (1596-1650)
La Géométrie
(Paris, 1637 ; *Livre Troisième*, cités de l'éd. 1664)

***"Que les racines, tant vrayes que fausses peuvent estre reelles ou imaginaires*.**

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toûjours reelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que i'ay dit en chaque Equation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine. " (p. 86)

Observations :
- l'*unité* et les *proportions* pour entendre *La Géométrie* ?
- Annexe [« un essai », comme *La Dioptrique* et *Les Météores*] du *Discours de la méthode, pour bien conduire la raison, & chercher la vérité dans les sciences*. Leyde, 1637.
Regulae ad directionem ingenii (Les *Règles pour la direction de l'esprit*, inachevé 1628-1629. Voir *Œuvres de Descartes*, éd. Ch. Adam et P. Tannery (nouvelle éd de P. Costabel et B. Rochot), Paris, Vrin, CNRS, 1964-74, vol. X (voir par exemple la règle 18)
- « Linéariser » le réel ?
- L'imaginaire en dehors de plan cartésien.
Il faut sortir de la droite pour appréhender l'imaginaire (Wallis, 1695)
- ….

Christiaan HUYGENS (1629-1695) à G. W. LEIBNIZ (1646 - 1716) :

"L'on n'auroit jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fist $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de caché là-dedans qui nous reste incompréhensible."

(lettre du 30 sept. 1675)

G. W. LEIBNIZ à Pierre VARIGNON (1654-1722)

Leibniz parle de **√-1** , comme d'

« un miracle de l'analyse, un monstre du monde idéal, presque un amphibium entre l'être et le non-être. »

(Lettre du 2 février **1702**)

À propos des facteurs imaginaires de $x^4 + a^4$,

$$\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right),\ \left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right),\ \left(x+a\sqrt{\left(-\sqrt{-1}\right)}\right) \text{ et } \left(x-a\sqrt{\left(-\sqrt{-1}\right)}\right)$$

ils sont :

"Un recours merveilleux de l'intelligence divine, une naissance non naturelle dans le royaume de la pensée …"

…, Leonhard EULER (1707-1783), …

$$x\sqrt{-1} = Log.\left(\cos.x + \sin.x\sqrt{-1}\right)$$ **(Roger COTES, 1714)**

***

Problème 1 :

$$0 = Log(+1) = Log(-1)^2 = 2Log(-1), \quad \text{d'où : } Log(-1) = 0$$

$$Log\left(\sqrt{-1}\right) = Log(-1)^{1/2} = \frac{1}{2}Log(-1) = 0, \quad \text{d'où : } Log\left(\sqrt{-1}\right) = 0$$

…

Ex. Une difficulté incontournable.

"Un espace circulaire n'est autre chose qu'un logarithme imaginaire"

(Euler)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{Log.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$ **(Bernoulli, 1728)**

(Euler relève immédiatement la contradiction)

…/…

Abandonner le caractère univoque du logarithme ; tout nombre a une infinité de logarithmes.

EULER à D'ALEMBERT (lettre du 15 avril 1747)

> **"… en général, j'ai trouvé**
>
> $$l.1^p = \pi(mp+n)\sqrt{-1}, \quad l(-1)^p = \pi\left(\tfrac{1}{2}p+mp+n\right)\sqrt{-1} \text{ ;}$$
>
> **où *m* et *n* marquent des nombres entiers tant affirmatifs que négatifs quelconques. Par ce moien toutes les difficultés disparoissent tout à fait qu'on ne sauroit lever en aucune manière si l'on voulait réaliser les logarithmes des nombres négatifs, en fondant que $2l.-1 = l.+1 = 0$, puisque par le même raisonnement on seroit obligé de dire que $l.\sqrt{-1} = 0$ et $l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. (…)"**

Fort du résultat $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$**, et prenant pour** z**,**

d'une part $+v\sqrt{-1}$

et d'une autre part $-v\sqrt{-1}$**,**

(où v est une valeur finie, et $\boldsymbol{i}$ un nombre "infiniment grand").

EULER parvient, respectivement, à :

$$\cos.v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

et

$$\sin.v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

(1740)

"On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus et à des cosinus d'arcs réels."

L. Euler,
"Recherches sur les racines imaginaires des équations"
(*H.A.R.S.B.L.* de Berlin (**1751**) 222-288)

"§5. Quoiqu'il semble que la connaissance des racines imaginaires d'une équation ne puisse avoir aucune utilité, vu qu'elles ne fournissent point de solutions en quelque problème que ce soit : néantmoins il est fort important dans toute l'analyse de se rendre familier le calcul des quantités imaginaires. Car non seulement nous en acquérons une connoissance plus parfaite de la nature des équations : mais l'Analyse des infinis en tire des secours très considérables. Car toutes les fois qu'il se présente à intégrer une fraction, il en faut résoudre le dénominateur dans tous ses facteurs simples soit réels ou imaginaires, et de là on tire enfin l'intégrale, qui quoiqu'elle renferme des logarithmes imaginaires, on a des moyens de les réduire à des arcs de cercle réels. Outre cela il arrive souvent qu'une expression, qui renferme les quantités imaginaires, soit néantmoins réelle, et dans ces cas le calcul des imaginaires est absolument nécessaire."

(p. 224)

Élémens d'Algèbre (EULER, an III [1794-95])

Note 143.

"Or puisque tous les nombres qu'il est possible de s'imaginer sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou sont 0 même, il est clair qu'on ne peut pas même compter la racine carrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, et il faut donc dire que c'est une quantité impossible. C'est de cette façon que nous sommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature sont impossibles. On nomme ordinairement ces nombres des quantités imaginaires, parce qu'elles existent purement dans l'imagination."

Note 230.

"… si le logarithme est positif, le nombre est toujours plus grand que l'unité ; mais que si le logarithme est négatif, le nombre est toujours plus petit que 1, et pourtant plus grand que zéro. *Par conséquent*, on ne saurait indiquer des logarithmes de nombres négatifs, et il faut en *conclure* que les logarithmes des nombres négatifs sont impossibles, et qu'ils appartiennent à la classe des quantités imaginaires."

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

(un exemple pris parmi d'autres)

Recherches sur le calcul intégral.

Première partie. De l'intégration des fractions rationnelles.

Mémoire de H.A.R.S.B.L. Berlin (1746) 182-200

• J'ai **démontré** le premier […] que

[PB. 1.] "…toute quantité *imaginaire* donnée à volonté, & de telle forme qu'on voudra, peut toujours se réduire à e+f$\sqrt{-1}$, e & f étant des quantités réelles."

• **J'ai démontré de plus, dans les mêmes mémoires de 1746**, que

[PB. 2.] "… toute racine imaginaire d'une équation quelconque pouvoit toujours se réduire à e+f$\sqrt{-1}$, e & f étant des quantités réelles."

Un **corollaire** de cette proposition, « **démontré fort simplement** » :

[Pb. 3.] "… si e+f$\sqrt{-1}$ est une des racines d'une équation, e-f$\sqrt{-1}$ en sera une autre ; & voilà pourquoi les racines *imaginaires* des équations vont toujours en nombre pair. …"

[Pb. 4.] "… Deux quantités *imaginaires* jointes ensemble peuvent former une quantité réelle ; p. ex. $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}$ est une quantité réelle. …"

"***Propos. II. Soit un multinome quelconque*** $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}\cdots+fx+g$***, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de x, y fasse évanouïr tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité p+q√-1 à substituer à la place de x, & qui rendra ce multinome égal à zéro.***" (p. 189)

"Proposition I. Soit TM une courbe quelconque dont les coordonnées TP = z, PM = y [Fig. 1, 2, 3], & dans laquelle y = 0 ou ∞ lorsque z = 0 Si on prend z, positive ou négative, mais infiniment petite, la valeur de y en z pourra toujours être exprimée par une quantité réelle, lorsque z sera positive: &, lorsque z sera négative, par une quantité réelle, ou par une quantité $p+q\sqrt{-1}$, dans laquelle p & q seront l'un & l'autre réels." (p. 183)

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

(p. 184) "… les Géomètres savent … que toute quantité $\overline{B\sqrt{-1}}^{h}$ peut toujours se réduire à la forme $p+q\sqrt{-1}$, *p* & *q* étant réels."

(p. 185) "… la vraye valeur de *y*, quoiqu'imaginaire"

…/…

(p. 186) "…Si on rapporte la courbe aux coordonnées AC, CT, je dis que l'ordonnée imaginaire, répondante à une abscisse AQ [Fig. 4], infiniment peu plus grande que AC, pourra être supposée = $p+q\sqrt{-1}$. "

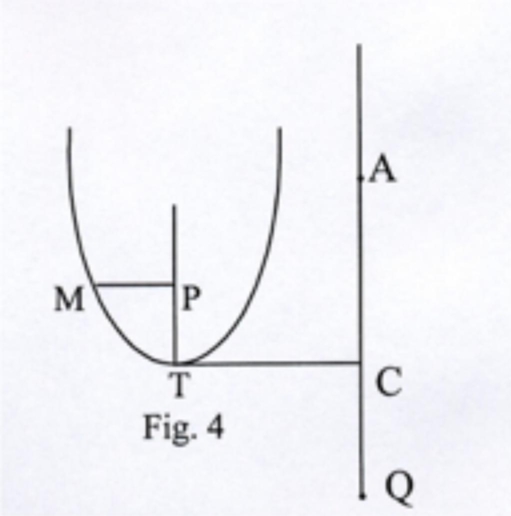

Fig. 4

(p. 187) "… les coordonnées imaginaires répondantes à AQ sont = CT+$p+q\sqrt{-1}$."

…/..

Autres exemples critiques…

"They are useful only in so far as I am able to judge, to darken the very whole doctrine of the equations and to make dark of the things which are in their nature excessively obvious and simple. It would have been desirable in consequence that the negative roots were never allowed in algebra or that they were discarded"

[Francis Maseres,
***A Dissertation on the Negative Sign in Algebra*, 1758]**

Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813)
"Sur la forme des racines imaginaires des équations"
(*H.A.R.S.B.L.* de Berlin (**1772**), p. 222-258)

"Il semble que les Analystes ayent toujours regardé comme vraie cette proposition, que toutes les racines imaginaires des équations peuvent se réduire à la forme $A + B\sqrt{-1}$", *A* & *B* étant des quantités réelles; mais ce n'est que dans ces derniers tems qu'on est parvenu à la démontrer d'une manière rigoureuse & générale.

La première démonstration qu'on ait donnée de ce beau théorème est celle qui se trouve dans les Mémoires de cette Académie pour l'année 1746, & qui est due à Mr. D'Alembert ;

- cette démonstration est très ingénieuse, & ne laisse, ce me semble, rien à désirer du côté de l'exactitude ;

mais elle est indirecte, étant tirée de la considération des courbes & des suites infinies; & elle porte naturellement à croire qu'on peut arriver au même but par une analyse plus simple, fondée uniquement sur la théorie des équations."

(p. 222)

Pierre-Simon de LAPLACE (1749-1827)

("Sur la résolution des équations. Théorème sur la forme de leurs racines imaginaires". *Leçons Math. Ecole Normale 1795*, 1812. *Œuvres*, t. VII, p. 96)

"Ces passages du réel à l'imaginaire [...] **m'ont conduit aux valeurs de plusieurs intégrales définies** [...]**. On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découverte, pareils à l'induction dont les géomètres font depuis longtemps usage.**

Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précautions et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats."

***

Lazare Nicolas Marguerite CARNOT (1753 – 1823)

(*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. (Paris : Duprat, 1797), ...)

Il s'attachera à écarter les quantités *négatives* et les *imaginaires* des résultats de ses calculs, car il ne cessera de les considérer comme des "**quantités inintelligibles**" résultant de "**fausses suppositions**" et indiquant qu'"**on s'est trompé dans la mise en équation du problème**". Il parle aussi de "**fictions de l'esprit**".

William FREND (1757-1841), *The Principles of Algebra*, London (1796 & 1799 ; *Preface*)

"A number may be greater or less than another number; it may be added to, taken from, multiplied into, or divided by, another number; but in other respects it is very intractable; though the whole world should be destroyed, one will be one, and three will be three, and no art whatever can change their nature. You may put a mark before one, which it will obey; it submits to be taken away from a number greater than itself, but to attempt to take it away from a number less than itself is ridiculous. Yet this is attempted by algebraists who talk of a number less than nothing; of multiplying a negative number into a negative number and thus producing a positive number; of a number being imaginary. Hence they talk of two roots to every equation of the second order, and the learner is to try which will succeed in a given equation; they talk of solving an equation which requires two impossible roots to make it soluble; they can find out some impossible numbers which being multiplied together produce unity. This is all jargon, at which common sense recoils; but from its having been once adopted, like many other figments, it finds the most strenuous supporters among those who love to take things upon trust and hate the colour of a serious thought."

"Newton's dereliction of the principles of reasoning cannot establish the fallacious notion that every equation has as many roots as it has dimensions."

Entre *Géométrie* et *Algèbre* :

… *représenter* géométriquement n'est plus *réaliser*…

G. Wessel [*Essai sur la représentation analytique de la direction, 1797* (1897)],

A. Q. Buée [« Mémoire sur les quantités imaginaires », *Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London,* 1806 ; √-1, signe de perpendicularité],

J-R. Argand [*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 1806 (1813-)],

J. Warren [*Treatise on the geometrical interpretation of the square roots of negatives quantities. Cambridge, 1828*],

C.V. Mourey [*La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires (Paris,* 1828), « … que doit-on-dire des imaginaires ? Pour un esprit qui tient à voir clair [avide de clarté], n'ont-elles pas quelque chose de repoussant ? ». Sa Science, sa Théorie « a deux faces, l'une algébrique et l'autre géométrique. C'est une Algèbre émanée de la Géométrie, c'est une Géométrie généralisée et rendue algébrique. » (Préface, p. vii)],

Entre *nécessité, reconsidération* et *retour* à l'*Algèbre*…

Jean-Robert Argand (1768-1822) [*PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE*. « Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires ; suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analise », *Annales de Mathématiques pures et appliquées* de Gergonne, t. V, 1814, 197-209 ; il dénonce l'application aux i*maginaires* des règles propres aux *réels ;* **Argand** *vs* **Euler**]

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [même après 1831, la *nature métaphysique* de √-1 demeure une interrogation pour lui]

Carl Friedrich GAUSS (1777-1955)

•) **He wants to give an "objective existence" to *imaginary quantities***
•) ***Plane of Argand-Gauss***
•) ***Complex* numbers**
•) **After 1831 he wondered again about the "metaphysical nature" of $\sqrt{-1}$**
• …

« Si les quantités imaginaires sont à retenir en analyse (ce qui, pour bien des raisons, me semble préférable à les rejeter, pourvu qu'elles soient établies sur un fondement solide), il faudrait qu'on puisse les considérer comme aussi possibles que les quantités réelles, et dans ces calculs je préfère renfermer les quantités réelles et imaginaires toutes les deux sous la dénomination commune de **quantités possibles** […]

Je remets pour une autre occasion la justification de ces quantités imaginaires sous forme d'une exposition plus fructueuse de toute cette matière. »

[*Demonstratio nova theorematis omnen functionem algebraicam rationalem integram unius in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadit, 1799. (*Werke*, III, p. 6, note)]

Lettre à Bessel (1811)

« […] de même qu'on puisse se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a + bi$. »

[*Werke*, IV, 193-216]

C. F. GAUSS

Theoria residuorum biquadaticorum. Commentatio secunda

(**15.04.1831**).

[*Werke* 2, Göttingue Acad.(1876) 169-178]

" Campus numerorum complexorum *a+bi* continet

I. numeros reales, ubi $b = 0$, et, inter hos, pro indole ipsius *a*

1) cifram

2) numeros positivos

3) numeros negativos

II. numeros imaginarios, ubi *b* cifrae inaequalis. Hinc iterum distinguuntur

1) numeri imaginarii absque parte reali, i.e. ubi $a = 0$

2) numeri imaginarii cum parte reali, ubi neque *b* neque *a* $= 0$.

Priores si placet numeri imaginarii puri, posteriores numeri imaginarii mixti vocari possunt."

Gauss ne revient pas effet sur cette « justification » souhaitée des *quantités imaginaires* », mais on peut néanmoins lire dans sa *Commentatio Secunda* de 1831, à la suite de sa présentation de ce qu'on appelle aujourd'hui le « plan de Gauss » :

« … si l'on veut mettre *+1* pour la relation exprimée auparavant par *+i* nous devons nécessairement mettre *+i* pour la relation exprimée avant par -*1*. Dans le langage des mathématiciens cela veut dire que *+i* est une moyenne proportionnelle entre *+1* et -*1*, et correspond au symbole $\sqrt{-1}$. La démonstrabilité d'une signification intuitive de $\sqrt{-1}$ est donc pleinement justifiée, et nous n'avons plus besoin d'autre chose pour faire entrer le quantités imaginaires dans le domaine des objets réels de l'arithmétique. […] au lieu de donner, à *+1*, -*1*, $\sqrt{-1}$, les noms d'unité positive, négative, imaginaire (ou impossible) on les avait nommés unité directe, inverse, latérale, une pareille obscurité aurait eu de la peine à s'introduire. »

(Gauss, *Werke* II, 176-177)

Augustin Louis CAUCHY (1789-1857)

Des *expressions symboliques* aux *quantités géométriques*

« En analyse, on appelle ***expression symbolique** ou **symbole*** toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. (*Analyse algébrique*, 1821).

« On nomme de même ***équations symboliques*** toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes, ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant et altérant, selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes ou les symboles qu'elles renferment. **L'emploi des expressions ou équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence** .

Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en Analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées *imaginaires*». […]

Les expressions qui renferme $\sqrt{-1}$, sont dites ***imaginaires*** parce qu'elles ne « représentent rien de réel ». Il veut « répudier » le signe $\sqrt{-1}$ « qui n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul ».

Cauchy est aussi celui qui à le plus écrit sur les *imaginaires* : des « entités improprement nommées » , selon lui, « quantités » ou « nombres imaginaires ».

Vers le milieu des années 1840 Cauchy reviendra sur les premières conceptions qui servirent d'introduction aux « imaginaires » et il se proposera cette fois d'aborder le problème du statut des « imaginaires » (Théorie des équivalences algébriques » et « Théorie des quantités géométriques », 1847-1849) :

> « Il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore, et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, **si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires, et la lettre *i* elle-même, à n'être plus que des quantités réelles.** [...]
>
> Dans la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires, la lettre ***i*** cessera de représenter le signe $\sqrt{-1}$, que nous répudierons complètement, ... puisqu'on ne saurait dire ce que signifie ce prétendu signe, ni quel sens on doit lui attribuer.
>
> [...] le meilleur parti à prendre est d'abandonner entièrement l'usage du signe $\boldsymbol{\sqrt{-1}}$, et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie des quantités que j'appellerai ***quantités géométriques***. »

• **1847** ***Mémoire sur les quantités géométriques***

"Nous appellerons *quantité géométrique*, et nous désignerons par la notation r_p le rayon vecteur *OA* dirigé de *O* vers *A*. La longueur de ce rayon, représentée par la lettre *r*, sera nommée la *valeur numérique* ou le *module* de la quantité géométrique r_p ; l'angle *p*, qui indique la direction du rayon vecteur *OA*, sera l'*argument* ou l'*azimuth* de cette même quantité." (p. 176)

"[...] la notion de *quantité géométrique* comprendra, comme cas particulier, la notion de *quantité algébrique*, positive ou négative, et à plus forte raison, la notion de *quantité arithmétique* ou de *nombre*, renfermée elle-même, comme cas particulier, dans la notion de quantité algébrique." (p. 177)

La dernière étape, après celles de Gauss et de Cauchy, s'inscrit aussi dans l'esprit d'ouverture de Argand ; elle aura eu raison entre-temps de l'obstacle le plus difficile : celui du *statut arithmétique* des *imaginaires*. Grâce à elle l'*existence* mathématique du *nombre complexe* sera définitivement acquise.

Outre ce qui revient à Jean-Robert Argand, c'est pour une grande part la réussite de William Rowan Hamilton qui fera pour cela de l'*Algèbre*, entendue comme « exacte contrepartie » de la *Géométrie*, la *Science du Temps Pur*.

Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Algebra and *Pure Time*

“ I habitually desire to find or to make in Algebra a system of demonstrations resting at last on intuitions (…) Algebra may be made to rest on the … *Intuition of time* (…)”

[W.R.H to J.T. Graves, *July* 11, 1835]

A caricatural repossession of an old criticism

"That a greater magnitude may be subtracted from a less, and that the remainder is less than nothing ; that two negative numbers, or numbers denoting magnitudes each less than nothing, may be multiplied the one by the other, and that the product will be a positive number, or a number denoting a magnitude greater than nothing ; and that although the square of a number, or the product obtained by multiplying that number by itself, is therefore always positive, whether the number be positive or negative, yet that numbers, called imaginary, can be found or conceived or determined, and operated on by all the rules of positive and negative numbers, as if they were subject fo those rules, although they have negative squares, and must therefore be supposed to be themselves neither positive nor negative, not yet null numbers, so that the magnitudes which they are supposed to denote can neither be greater than nothing, not less than nothing, nor even equal to nothing."

(WRH, p.4)

Mathematics, an affair of relations, …

À l'égal de **Cauchy,** G. **Peacock** (1791-1858) et en particulier de **Gauss** ([Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentation secunda*" (1831), *Werke* II, p 176 :"**Le mathématicien fait complètement abstraction de la nature des objets et de la signification de leurs relations: il n'a qu'à énumérer les relations et les comparer.**"]), Hamilton est lui aussi dans une Mathématique qui est devenue affaire de relations, après avoir été celle des équations et en passe de devenir celle des « formes » avec Hermann Günther Grassmann ; **mais, il en dit plus** :

"In all Mathematical Science we consider and compare relations. In algebra the relations which we first consider and compare, are relations between successive states of some changing thing or thought. And numbers are the names or nouns of algebra; marks or signs, by which one of these successive states may be remembered and distinguished from another (…) Relations between successives thoughts thus viewed as successives states of one more general and changing thought, are the primary relations of algebra. **[…]**

… with Time and Space we connect all continuous change, and by symbols of Time and Space we reason on and realise progression. Our marks of temporal and local site, our *then* and *there*, are at once signs and instruments of that transformation by which thoughts become things, and spirit puts on body,….

And such a transformation there is, when in Algebra, we contemplate the change of our own thoughts as if it were the progression of some foreign thing, and introduce Numbers as the marks or signs to denote place in that progression. "

([TCD Notebook n°. 24.5, "*Metaphysical Remarks on Algebra*" (February 1831), fol. 49])

A difference…

HAMILTON is not a member of the *English Algebraic School* here, if considering the "band of Peacock" and *Cambridgemen,* understood as the *Philological School.*

According to George PEACOCK :

Symbolical Algebra

"[is] **essentially a science of symbols and their combinations, constructed upon its own rules, which may be applied to arithmetic and all others sciences by interpretation**."

Symbols

"**[are] perfectly general and unlimited both in value and representation, and that operations to which they are subject are equally general likewise. " […]**

"There is nothing in the symbols of algebra that might limit their meaning or their value."

[*Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis*, BAAS, 1834, pp. 194-5]

Principle of the permanence of equivalent forms

"Direct Proposition :

Whatever form is algebraically equivalent to another when expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever those symbols denote."

"Converse Proposition :

Whatever equivalent form is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specific in their value, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as their form."

[*Report*, p. 199]

“Symbolical Algebra”, according to Hamilton …

“When I first encountered that work [*Treatise on Algebra*, 1830], now many years ago, and indeed for a long time afterwards, it seemed to me … that the author designed to reduce algebra to a mere system of symbols, and *nothing more*; an affair of pothooks and hangers, of black strokes upon white paper, to be made according to a fixed but arbitrary set of rules: and I refused, in my own mind, to give the high name of Science to the results of such a system; […] ”

[W.R.H. to Peacock, October 13, 1846]

To be Practical, Filological or Theoretical in Algebra?

Dans une algèbre vue comme « exacte contrepartie de la géométrie », Hamilton distingue trois écoles : *Pratique*, *Philologique* et *Théorique*, suivant que l'on conçoit l'algèbre comme un *Art*, une *Langue* ou une *Science*; un « instrument », une « langue » ou une « contemplation ».

Il reconnait se différencier de ses proches contemporains à la fois dans l'esprit et dans la façon de concevoir l'étude de la *Science*, sur des "essential and permanent things" (Lettre à Aubrey De Vere, 9 février 1831).

Il met l'accent sur l'orientation de sa propre activité (*Theoretical School*) par rapport à celle de ces contemporains : il n'est pas question d'appliquer des règles existantes à un problème donné (*Practical School*), ni de trouver de nouvelles notations ou formulations qui remplaceraient celles déjà existantes (*Philological School*).

Il se propose de « construire » la *Science* qui redonnera vie à la « belle statue morte » (*i.e.* l'algèbre). (Lettre à Aubrey De Vere, 13 mai 1835)

(Hamilton, W. R., 1837, 2)

Science

Hamilton est parfaitement conscient du caractère discordant de son approche qui associe volontairement mathématiques et métaphysique pour la recherche du premier principe d'une

> **« *Science* précisément dite ; stricte, pure et indépendante, déduite de ses propres principes intuitifs par des raisonnements valides ».**

Cette *Science* fera de l'algèbre bien plus qu'un *système de règles* ou d'*expressions* : elle fera d'elle un *« Système de Vérités »*.

L' « *Intuition du TEMPS* » est pour lui le premier *rudiment*.

Time and Algebra … according to Hamilton

The greatest discoveries in algebra, according to Hamilton, have a close relationship with the concept of "time".

Some of his typical examples are:

- **Isaac Newton (1643-1727) : "Fuxionary Theory"**

- **John Napier (1550-1617) :Discovery of the logarithm**

  Pb: To compare "progressions"

- **J.-L. Lagrange : Algebra as "Science of Functions"**

  Pb. : "connecting *change* with *change*"

“ **It is impossible to treat Algebra as a *Science* at all (I say not as an Art or a Language), without invoking more or less the aid of this Intuition. Pure time - the before and after ; precedence, subsequence, and simultaneity ; continuous indefinite progression from the past through the present to the futur - this thought, or intuition, or form of the human mind, appears to me to force itself upon me whenever I seek to *analyse* what I and others *mean*, as the *object reasoned upon*, in Algebraic Science: though I willingly admit that the *Time* thus considered is *Pure* (just as the Space of the geometers is Pure),** and does not depend on any phenomenal marks or measures, nor need use the notion of Cause and Effect.

The *moment* is to Algebra, with me, what the *point* is to Geometry ; *transitions, intervals*, from one moment to another, are analogous to finite straight lines, while Time itself may be conceived or pictured (as indeed metaphysicians generally admit) under the image of an indefinite straight line ; and *number* is the ratio of one such transition to another, or the complex relation between them, determined partly by their relative largeness and partly by their relative direction, and being therefore essentially distinguishable into two opposite classes, or capable of two opposite affections, according as the two related transitions or steps in time agree or differ in direction. **Thus, positive and contrapositive numbers meet me upon the very threshold of Algebra ; and coupled or conjugate numbers supply me … with all that I want of imaginaries**.

This *Synthesis* of Algebra, or the building of it up anew (in its most essential parts) **from the Idea of Pure Time** is what has lately occupied me …"

[W.R.H. to J. T. Graves, *July* 11, **1835**]

Science of "Pure Time"; Between Kant and Hamilton

L'approche de Hamilton n'est pas entièrement redevable ni même réductible à l'influence qu'exercera sur lui la *Critique de la raison pure* de Kant :

-) Plusieurs de ses manuscrits témoignent que ses idées sur la relation entre temps et l'algèbre sont déjà très avancées, bien avant qu'il ne puisse enfin commencer à lire directement en allemand cet ouvrage à partir du mois d'octobre 1831.

-) Des lettres adressées à ses amis Adare, William Wordsworth et Aubrey De Vere témoignent que Hamilton « reconnaît » ses propres idées plus qu'il ne les « découvre » chez Kant, son oracle ; cependant, la *Kritik der Reinen Vernunft* lui apportera non seulement la confirmation et le bien-fondé de ses propres idées, mais aussi d'utiles clarifications et, surtout, il trouvera là ce qui lui manquait d'assurance et de courage pour oser enfin braver l'opposition de ses "amis mathématiciens" qui depuis le début cherchèrent à le dissuader de poursuivre dans cette voie !

The *Science of Pure Time*

La *Science mathématique du Temps* est "co-extensive" et "identique" à l'*Algèbre*, pour autant que l'Algèbre elle-même est une *Science*.

“Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time.”

[1835]

(*Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 17, part 1 (1837), 293–422.)

"I by no mean dispute the possibility of constructing a consistent and useful system of algebraical calculations, by starting with the notion of *integer number* ; unfolding that notion into its necessary consequences, expressing those consequences with the help of *symbols*, which are already general in *form*, although supposed at first limited in their signification, or *value* ; and then, by *definition*, for the sake of *symbolic generality*, *removing* the *restrictions* which the original notion had imposed ; and so resolving to *adopt*, as perfectly *general* in *calculation*, what had been only *proved* to be *true* for a certain subordinate and limited extent of *meaning*."

... /...

“But I confess that I do not find myself able to frame a distinct *conception of number*, without *some* reference to the thought of *time*, although this reference may be of a somewhat abstract and transcendental kind. I cannot fancy myself as *counting* any set of things, without first *ordering* them, and treating them as *successive*: however *arbitrary* and *mental* (or *subjective*) this assumed succession may be. And by consenting to *begin* with this abstract notion (or pure intuition) of TIME, as the *basis* of the exposition of those axioms and inferences which are to be expressed by the symbols of algebra […] is still appears to me that an advantage would be gained: because the necessity for any merely *symbolical extension* of formulæ would be at least considerably *postponed* thereby.”

… / …

His theory

“[I]s deduced from the intuition of Original Mental Form of Time: the opposition of the (so-called) Negatives and Positives being referred by him, not the opposition of the operations of increasing and diminishing a *magnitude*, but to the simpler and more extensive contrast between the relations of *Before* and *After*, or between the directions of *Forward* and *Backward* ; and *Pairs of Moments* being used to suggest a *Theory of Conjugate Functions*, which gives reality and meaning to conceptions that were before imaginary, impossible or contradictory, because Mathematicians had derived them from the bounded notion of *Magnitude*, instead of the original and comprehensive thought of ORDER IN PROGRESSION.”

The text is in three parts, edited in reverse order of their production:

- ***Introductory Remarks* (5p.)**
- ***Essay on Algebra as the Science of Pure Time* (95p.)**
- ***Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples* (29p.)**

In est parfaitement clair que l'on n'a pas simplement affaire à un article de métaphysique sur l'algèbre.

Il ne faut pas simplement y voir, ce que de nombreux lecteurs ont fait, une "anti-symbolical-algebra". Une telle perception, alliée à l'utilisation du temps, a conduit les quelques lecteurs à rejeter cet écrit, et les possibles lecteurs (souvent même, seul l'intitulé suffira à les dissuader).

En général, on convient que L'*Essai* a été écrit comme une esquisse d'axiomatisation de l'analyse, qui se révèlera pour Hamilton une entrée en matière suffisamment solide pour permettre d'arithmétiser les nombres complexes et, finalement, de découvrir les quaternions. L'influence de ces derniers sur le développement de l'analyse vectorielle et l'algèbre moderne est profonde et incontestée. Dans ces contributions aux mathématiques réside la valeur de l'*Essai*.

L'*Essai* ne doit pas être placé parmi les productions « métaphysiques », jugées comme parasites, et trop souvent écartées des mathématiques. C'est un écrit qui fait réaliser de notables progrès aux mathématiques en écartant la plupart des difficultés qui nuisaient alors à la bonne marche de l'algèbre et qui alimentaient un flot soutenu de critiques. Bien sûr, que l'on puisse détacher le « nombre » de sa stricte dépendance à la « grandeur » est une chose concevable, substituer à celle-ci l' « ordre en progression » puis finalement un "temps pur" soulève d'autres problèmes et est contestable.

Mais force est de constater que ce texte participe à un courant novateur, à l'ouverture sur les algèbres modernes.

Théorie des couples (définitions : somme et produit, les problèmes des constantes de structure (dites *multiplicatives* par lui), critères de simplicité, esthétique, …)

• La théorie existe dès 1826 : raisons de sa tardive publication en 1834 et de son intégration-rapprochement dans l'*Essay* de 1835.

Hamilton recherche l'"inner meaning" de quantités imaginaires ; sa "Theorie des Fonctions Conjuguées ou Couples Algébriques", est "…published to make manifest that hidden meaning, and to show, by this remarkable instance, that expressions which seem according to common views to be merely symbolical [Rappelons que Cauchy parle à la même époque d'"expressions symboliques" (1821) en se référant aux "quantités imaginaires"], and quite incapable of being interpreted, may pass into the world of thoughts, and acquire reality and significance, if Algebra be viewed as not a mere Art or Language, but as a Science of Pure Time." (p. 96)

Les nouvelles théories auront raison des difficultés des anciennes ; il ne s'agira plus de "quantités négatives" et "imaginaires", mais de "contra-positifs" et de "couples". Les principes usuels propres aux quantités imaginaires seront clarifiés. Ainsi, Hamilton pouvait enfin montrer aux détracteurs de J. T. Graves que, loin de s'en tenir simplement à la démonstration de la "nécessité symbolique" des formules utilisées, il était maintenant possible de les "interpréter" et de révéler leur "sens caché" (*hidden meaning*) : des expressions qui selon l'avis général étaient simplement symboliques, et tout à fait incapable d'interprétation, pouvaient en passant dans le monde des idées acquérir réalité et signification, si l'Algèbre était vue comme la Science du Temps Pur. La nouvelle algèbre proposait à la doctrine des quantités imaginaires et négatives une "illustration", ou "élucidation", plus complète que le seul jeu d'opérations algébriques et les propriétés d'une langue symbolique.

Il n'est bien sûr pas question d'aborder ici cette « science du temps pur », sa « révélation », ni la marche résolue de sa « coïncidence » et « identification » avec l'*Algèbre ;* cette étude de Hamilton exige d'être abondamment détaillée pour être entendue.

End of the first *imaginaries*

Le développement de la théorie des *couples* est calqué sur celui de la théorie des *nombres simples* ; c'est sans aucun doute le progrès le plus décisif accompli par Hamilton dans cette voie : en dépit du fait que cela sera un autre événement révolutionnaire pour le développement des mathématiques futures, la découverte des quaternions ne fait figure que de second rôle dans cette approche constructive.

Une fois conçue l'idée d'un *instant* A_1, qu'il appelle *instant primaire*, on peut en imaginer un autre, A_2, appelé *instant secondaire* s'en chercher dans l'immédiat à savoir s'il suit, précède ou coïncide avec A_1. On conçoit ces deux instants comme formant un couple désigné par (A_1, A_2) (nommé *couple-instant*) ; un choix de notation qui symbolise l' « indifférence relationnelle » actuelle de ces instants.

Soit un autre couple (B_1, B_2) ; on définit une *relation ordinale* entre celui-ci et le précédent. On a une « comparaison » entre couples qui se fait entre d'*instant* à *instant* : de *primaire* à *primaire*, $B_1 - A_1$, et de *secondaire à secondaire*, $B_2 - A_2$; cette comparaison peut être désignée séparément, par « $B_1 - A_1$, $B_2 - A_2$ », ou « collectivement », par le *couple-relation* ($B_1 - A_1$, $B_2 - A_2$).

Par analogie avec la théorie des instants, ce couple de relations entre instants peut être représenté comme une relation complexe entre couples, notée : (B_1,B_2)-(A_1,A_2). De la comparaison de ces deux dernières notations, résulte : $(B_1 - A_1, B_2 - A_2) = (B_1,B_2)-(A_1,A_2)$. Au lieu de comparer ainsi un couple de relations ordinales entre instants, ou une relation entre deux couples d'instants, Hamilton envisage un *couple de pas*, "un simple pas complexe qu'on peut appeler un *couple-pas* d'un *couple-instant* à un autre, servant à engendrer (synthétiquement) un *couple-instant* à partir de l'autre" (p. 87) :

$$(B_1, B_2) = (\mathrm{a}_1+A_1,\mathrm{a}_2 + A_2) = (\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) + (A_1,A_2) = \{(B_1,B_2)-(A_1,A_2)\} + (A_1,A_2)\ ;$$

où a_1 et a_2, sont respectivement le "pas primaire" et le "pas secondaire" du couple $(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$.

De tels couples se *composent* et *décomposent* ; on peut définir leur "multiplication" par un *nombre*. Ainsi, il établit :

$$(b_1,b_2) + (a_1,a_2) = (b_1+a_1,\ b_2+a_2)$$
$$(b_1,b_2) + (a_1,a_2) = (a_1,a_2) + (b_1,b_2)$$
$$(a_1,a_2) = (a_1,0) + (0,a_2)$$
$$(c_1,c_2) + (b_1,b_2) + (a_1,a_2) = (c_1+b_1+a_1,\ c_2+b_2+a_2) = (a_1,a_2) + (b_1,b_2) +(c_1,c_2),\ \&c.$$
$$(b_1,b_2) - (a_1,a_2) = (b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$
$$(a_1,a_2) = (0,0) + (a_1,a_2) = +\ (a_1,a_2)$$
$$(-a_1,-a_2) = (0,0) - (a_1,a_2) = -\ (a_1,a_2) \text{ (le \textit{couple-pas opposé})}.$$

Il introduit l'engendrement d'une suite de *couples-pas* à partir d'un *couple-instant* et un *couple-pas*, puis celle d'une suite de *couples-pas multiples* et définit les *sous-multiples* et les *fractions* d'un *couple-pas*.
Il définit la multiplication d'un *couple-pas*, (a_1,a_2), par un nombre (commensurable ou incommensurable, positif, contra-positif ou nul), a, en posant :

$$a \times (a_1,a_2) = (aa_1,aa_2),\ \text{ et l'on peut aussi écrire } \frac{(aa_1,aa_2)}{(a_1,a_2)} = a \ \text{ (\textit{rapport})}.$$

La grande difficulté de sa théorie des couples est constituée par la multiplication et la division générales d'un *couple-pas* $(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$ par un *couple-nombre* (a_1,a_2), grâce aux résultats qui précèdent elle est réduite à la multiplication $(0,a_2)$ $(0,\mathrm{a}_2)$, dont le résultat se ramène à la forme $(\gamma_1 a_2\mathrm{a}_2,\gamma_2 a_2\mathrm{a}_2)$. Simplicité et esthétique le conduisent à conclure que le "choix le plus simple" pour ses "constantes multiplicatives" (nos actuelles *constantes de structure*), γ_1 et γ_2, est $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = 0$. D'où :

$$(a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = (a_1\mathrm{a}_1 - a_2\mathrm{a}_2,\ a_2\mathrm{a}_1 + a_1\mathrm{a}_2).$$

Pour les *couples-nombres*, on a en général les définitions suivantes (dont on a vu ce qu'il disait) :

$$(b_1,b_2) + (a_1,a_2) = (b_1+a_1,\ b_2+a_2)\ ;$$
$$(b_1,b_2) - (a_1,a_2) = (b_1-a_1,\ b_2-a_2)\ ;$$
$$(b_1,b_2)(a_1,a_2) = (b_1,b_2) \times (a_1,a_2)\ (b_1a_1-b_2a_2,\ b_2a_1+a_1a_2)\ ;$$
$$\frac{(b_1,b_2)}{(a_1,a_2)} = \left(\frac{b_1a_1+b_2a_2}{a_1^2+a_2^2},\frac{b_2a_1-b_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)$$

Finalmente, depois de endereçar os poderes de um par-número (por um número inteiro, um número simples e finalmente por qualquer par-número), ele chega à identificação esperada $\sqrt{-1} = (0,1)$:

"In the THEORY OF SINGLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is *absurd*, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is *significant*, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely [...] the *principal square-root of the couple* $(-1, 0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever,

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}\,,$$

interpreting the symbols a_1 and a_2, in the expression $a_1 + a_2\sqrt{-1}$, as denoting the pure primary couples $(a_1, 0)$ $(a_2, 0)$, [...] and interpreting the symbol $\sqrt{-1}$, in the same expression, as denoting the secondary unit or pure secondary couple $(0, 1)$."

(*Essay*, p. 107)

Seu texto termina com uma esperança, de publicar no futuro próximo muitas outras aplicações dessa abordagem, especialmente para uma "Teoria dos Tripletos" e Conjuntos de Momentos, Passos e Números, que inclui sua teoria dos pares.

A delayed reaction ...

"A distinguished analyst calls Algebra the science of *pure time* [...] The notions of *time, succession*, and *number* are so nearely related that we have no doubt very admissible conventions would make this true."

[A. De Morgan, *A Treatise of Calculus of Functions*, note *, p. 43. (Extracted from the *Encyclopædia Metropolitana*)], London, printed for Baldwin and Cradock, 1836.]

"I am very sensible that, besides general dulness and heaviness of style, there is too much obscurity, in my Essay on *Algebra as the Science of Pure Time*, and one thing I am, and was, prepared to admit, nay, if it had seemed needful, to contend for, that Algebra does not require, for its foundation as a science, any knowledge or conception of the actual succession of events, or of the relation of cause and effect ; continuous progression appeared and still appears to me sufficient ; but this, I thought and think, is the essential element in the conception of what I call *pure time*."

[W.R.H. to A. de Morgan, *May* 12, 1841]

From *triplets* to *quaternions, octonions and beyond ;*
a way to algebras.

Hamilton : "Liberator of Algebra"

La découverte des quaternions surprendra tous ceux occupés à rechercher un calcul de triplets ; les réactions de J. T. Graves ou de A. De Morgan sont révélatrices :

•) Le premier, tout en s'interrogeant sur la liberté que l'on a de "créer arbitrairement des imaginaires" et de les doter de "propriétés surnaturelles" , déclare que "Hamilton *fait* ses quantités imaginaires" ;

•) pour le second, les "imaginaires" constitutifs d'un quaternion "ne sont pas des déductions, mais des inventions : *leurs lois d'action l'un sur l'autre sont assignées* …". Ce n'était pas le non-respect de l'égalité *AB=BA* qui constituait le vrai problème de De Morgan, Ch. et J. T. Graves, James Mac Cullagh (1809-1847) et de tous ceux qui s'occupaient de triplets, mais l'abandon de la commutativité dans un tel contexte d'extension où était alors exigé de s'en tenir strictement aux règles symboliques de l'*algèbre commune*.

Il est illusoire et injustifié de croire que Hamilton reconnaissait là avoir découvert une algèbre non commutative (ce qu'elle sera) : sa quête était d'une autre nature ; la recherche était celle d'un calcul de triplets qui généraliserait la théorie des couples algébriques, un calcul dont les éléments devaient renvoyer à l'arithmétique et à l'ensemble de ses lois ; le nombre restait encore pour Hamilton une entité simple. C'est aussi pour cette raison que De Morgan ne reconnaîtra dans les quaternions qu'un système triple « avec un agent indéterminé en plus » ; un système « imparfait » qui ne mettait pas un terme à ses propres recherches.

Cependant, pour Hamilton et dans la suite de ses premières recherches, cette algèbre quadruple était également un nouveau *système d'imaginaires en Algèbre*.

A necessary but not without reluctancy "conversion" to the *Philological* approach of Peacock and his "Brother-Band" …

"[T]o some extent I have become a convert to the views of these authors, so far as to admit that there is a sort of symbolical science, or science of language, which well deserves to be studied, abstraction being made for a while of meaning, or of interpretation; and forms of expression being treated as themselves the subject-matter to be studied: in short, I feel an increased sympathy with, and fancy that I better understand that Philological School …"

[W.R.H. to R.P. Graves, *April* 30, 1846]

La rupture avec sa métaphysique de l'algèbre était consommée, du moins exigeait-elle de sérieux aménagements à la suite de la découverte des quaternions :

l'objet créée n'était pas du seul ressort du "temps pur", n'était pas une entité "purement arithmétique", pas un "nombre" dans le seul sens que lui avait réservé Hamilton.

L'impuissance de Hamilton à trouver une "signification géométrique" pertinente l'obligera à insister sur le caractère "symbolique" du quaternion, à voir en lui un "opérateur" (sa découverte des biquaternions en 1844 avait une première fois favorisé déjà une cette tendance symbolique).

C'est aussi une partielle capitulation qui s'opérait ainsi : après avoir longtemps et publiquement insisté sur la différence de son approche en algèbre, fait valoir son appartenance à l'"Ecole théorique", il devra admettre que sa "Science du Temps Pur" ne sera plus tant "co-extensive" et "identique" à l'Algèbre, mais une plus modeste "Suggesting Science", voire une "Suggestive Science". Hamilton se rapprochera du point de vue plus exclusivement symbolique de ses opposants.

"Of course I do not concede to those worthy gentlemen [*i.e.* Cauchy, De Morgan, Graves, Cayley] that there is anything absurd, unintelligible, or contradictory, in the quaternions, but have thought that there was a sort of historical propriety in calling (in the *Magazine*) those quaternions '**a new system of imaginaries in algebra**'. […]

My own direction of extension of the theory of imaginaries appears to be quite different from the line taken by some acute writers in the *Cambridge* Journal, […] On the whole my habit is to be dissatisfied with mere signs, and to look always for things signified. But the fundamental notion of TIME appears to me a basis deep and wide enough for any super-structure of the sort."

[W.R.H. to Professor Young, *June* 19, 1847]

I contradict nothing, which can fairly be regarded as essential to older algebra. […] I sometimes claim to be regarded **not as a destructive innovator, but as a constructive** …"

[W.R.H. to Professor Young, *July* 10, 1847]

Thank you, obrigado