Algumas relações entre dimensão, compacidade e completude

Daniela M. Vieira
IME-USP

danim@ime.usp.br

3^o EIAGIME 2010

COMPACIDADE

Comecemos com a seguinte afirmação:

Comecemos com a seguinte afirmação:

Toda sequência limitada de número reais possui uma subsequência convergente.

Comecemos com a seguinte afirmação:

Toda sequência limitada de número reais possui uma subsequência convergente.

Mais conhecida como **Teorema de Bolzano-Weierstrass**.

Comecemos com a seguinte afirmação:

Toda sequência limitada de número reais possui uma subsequência convergente.

Mais conhecida como **Teorema de Bolzano-Weierstrass**.

E se ao invés de números reais, estivermos interessados em vetores do $\mathbb{R}^2$, o que poderíamos dizer de tal afirmação?

Comecemos com a seguinte afirmação:

Toda sequência limitada de número reais possui uma subsequência convergente.

Mais conhecida como **Teorema de Bolzano-Weierstrass**.

E se ao invés de números reais, estivermos interessados em vetores do $\mathbb{R}^2$, o que poderíamos dizer de tal afirmação?

Vamos primeiro estabelecer o que é convergência em $\mathbb{R}^2$.

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\|$

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$,

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$,

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$,

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$, $\cdots$,

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$, $\cdots$, $x^n = (x_1^n, x_2^n)$,

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$, $\cdots$,$x^n = (x_1^n, x_2^n)$, $\cdots$

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$, $\cdots$,$x^n = (x_1^n, x_2^n)$, $\cdots$

Daí não é difícil concluir que $x^n \to x = (x_1, x_2)$ se e somente se

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$, $\cdots$, $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, $\cdots$

Daí não é difícil concluir que $x^n \to x = (x_1, x_2)$ se e somente se

$x_1^n \to x_1$

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3)$, $\cdots$, $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, $\cdots$

Daí não é difícil concluir que $x^n \to x = (x_1, x_2)$ se e somente se

$x_1^n \to x_1$ e

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Daí $|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \|(x_1, x_2)\|$, para $i = 1, 2$.

E uma sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ converge para um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ se:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|x^n - x\| < \varepsilon$.

Mas os elementos da sequência (x^n) são da forma:

$x^1 = (x_1^1, x_2^1),\ x^2 = (x_1^2, x_2^2),\ x^3 = (x_1^3, x_2^3),\ \cdots, x^n = (x_1^n, x_2^n),\ \cdots$

Daí não é difícil concluir que $x^n \to x = (x_1, x_2)$ se e somente se

$x_1^n \to x_1$ e $x_2^n \to x_2$.

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente.

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, da forma $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, da forma $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, a sequência de números reais $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada,

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, da forma $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, a sequência de números reais $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada,

e portanto admite subsequência convergente,

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, da forma $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, a sequência de números reais $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada,

e portanto admite subsequência convergente,

digamos $x_1^{n_k} \to x_1$.

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, da forma $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, a sequência de números reais $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada,

e portanto admite subsequência convergente,

digamos $x_1^{n_k} \to x_1$.

A sequência correpondente $(x_2^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também é limitada em $\mathbb{R}$,

Podemos afirmar que toda sequência limitada de vetores em $\mathbb{R}^2$ admite uma subsequência convergente. Vejamos por que:

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, da forma $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, a sequência de números reais $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada,

e portanto admite subsequência convergente,

digamos $x_1^{n_k} \to x_1$.

A sequência correpondente $(x_2^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também é limitada em $\mathbb{R}$,

portanto possui subsequência convergente $x_2^{n_{k_l}} \to x_2$, quando $l \to \infty$.

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$.

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. $\blacksquare$

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. ∎

Em geral, vale que

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. ■

Em geral, vale que

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ admite subsequência convergente.

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. ■

Em geral, vale que

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ admite subsequência convergente.

Basta repetir este processo n-vezes.

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. ■

Em geral, vale que

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ admite subsequência convergente.

Basta repetir este processo n-vezes.

Lembrando que para
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. ■

Em geral, vale que

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ admite subsequência convergente.

Basta repetir este processo *n*-vezes.

Lembrando que para
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}$.

Logo $(x_1^{n_{k_l}}, x_2^{n_{k_l}}) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, quando $l \to \infty$. ■

Em geral, vale que

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ admite subsequência convergente.

Basta repetir este processo n-vezes.

Lembrando que para
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}$.

Continua valendo que $|x_i| \leq \|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|$, para
$i = 1, 2, \cdots, n$.

E em dimensão infinita?

E em dimensão infinita?

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

E em dimensão infinita?

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Na verdade, é o conjunto de todas as sequências de números reais, que costumamos chamar de s.

E em dimensão infinita?

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Na verdade, é o conjunto de todas as sequências de números reais, que costumamos chamar de s.

s é um espaço vetorial, mas se estivermos interessados em espaços normados de dimensão infinita, temos que considerar certos subespaços de s, como por exemplo;

E em dimensão infinita?

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Na verdade, é o conjunto de todas as sequências de números reais, que costumamos chamar de s.

s é um espaço vetorial, mas se estivermos interessados em espaços normados de dimensão infinita, temos que considerar certos subespaços de s, como por exemplo;

$$\ell_2 = \{x = (x_n) \in s : \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty\}.$$

E em dimensão infinita?

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Na verdade, é o conjunto de todas as sequências de números reais, que costumamos chamar de s.

s é um espaço vetorial, mas se estivermos interessados em espaços normados de dimensão infinita, temos que considerar certos subespaços de s, como por exemplo;

$$\ell_2 = \{x = (x_n) \in s : \sum_{n=1}^\infty (x_n)^2 < \infty\}.$$

Este é o espaços das sequências cuja série dos termos **ao quadrado** é convergente.

E em dimensão infinita?

$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$.

Na verdade, é o conjunto de todas as sequências de números reais, que costumamos chamar de s.

s é um espaço vetorial, mas se estivermos interessados em espaços normados de dimensão infinita, temos que considerar certos subespaços de s, como por exemplo;

$\ell_2 = \{x = (x_n) \in s : \sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 < \infty\}$.

Este é o espaços das sequências cuja série dos termos **ao quadrado** é convergente.

Dentre os espaços de sequências de números reais, o ℓ_2 é o que mais se parece com o $\mathbb{R}^n$.

Por exemplo, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\right)^{1/2}.$$

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\right)^{1/2}.$$

Agora consideremos os seguintes elementos em ℓ_2:

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\right)^{1/2}.$$

Agora consideremos os seguintes elementos em ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$,

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\Big)^{1/2}.$$

Agora consideremos os seguintes elementos em ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$,

$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots)$,

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\right)^{1/2}.$$

Agora consideremos os seguintes elementos em ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$

$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots),$

$\vdots$

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\right)^{1/2}.$$

Agora consideremos os seguintes elementos em ℓ_2:

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$$

$$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

Por exemplo, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ_2,

ao passo que $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ não pertence a ℓ_2.

Em ℓ_2, podemos definir seguinte norma:

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2\right)^{1/2}.$$

Agora consideremos os seguintes elementos em ℓ_2:

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$$

$$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

$$\vdots$$

Seja $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Seja $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Lembre que um conjunto infinito é linearmente independente (l.i.), se qualquer subconjunto finito dele é l.i.

Seja $A = \{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Lembre que um conjunto infinito é linearmente independente (l.i.), se qualquer subconjunto finito dele é l.i.

Daí, concluímos que A é l.i.

Seja $A = \{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Lembre que um conjunto infinito é linearmente independente (l.i.), se qualquer subconjunto finito dele é l.i.

Daí, concluímos que A é l.i. Pois dada uma combinação linear finita dos e_n, da forma:

Seja $A = \{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Lembre que um conjunto infinito é linearmente independente (l.i.), se qualquer subconjunto finito dele é l.i.

Daí, concluímos que A é l.i. Pois dada uma combinação linear finita dos e_n, da forma:

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots, 0, \cdots) = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Seja $A = \{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Lembre que um conjunto infinito é linearmente independente (l.i.), se qualquer subconjunto finito dele é l.i.

Daí, concluímos que A é l.i. Pois dada uma combinação linear finita dos e_n, da forma:

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots, 0, \cdots) = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Teríamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Seja $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

Lembre que um conjunto infinito é linearmente independente (l.i.), se qualquer subconjunto finito dele é l.i.

Daí, concluímos que A é l.i. Pois dada uma combinação linear finita dos e_n, da forma:

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots, 0, \cdots) = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Teríamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Como ℓ_2 possui um conjunto **inifinito** e **l.i.**, concluímos que ℓ_2 possui dimensão infinita.

Existe uma sequência limitada em ℓ_2 que não possui subsequência convergente.

Existe uma sequência limitada em ℓ_2 que não possui subsequência convergente.

É a sequência formada pelos vetores e_n, definidos anteriormente.

Existe uma sequência limitada em ℓ_2 que não possui subsequência convergente.

É a sequência formada pelos vetores e_n, definidos anteriormente.

Observe que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Existe uma sequência limitada em ℓ_2 que não possui subsequência convergente.

É a sequência formada pelos vetores e_n, definidos anteriormente.

Observe que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mais ainda, se $n \neq m$, $n < m$, então:

Existe uma sequência limitada em ℓ_2 que não possui subsequência convergente.

É a sequência formada pelos vetores e_n, definidos anteriormente.

Observe que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mais ainda, se $n \neq m$, $n < m$, então:

$$\|e_n - e_m\| = \|(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, -1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)\| = \sqrt{2}.$$

Existe uma sequência limitada em ℓ_2 que não possui subsequência convergente.

É a sequência formada pelos vetores e_n, definidos anteriormente.

Observe que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mais ainda, se $n \neq m$, $n < m$, então:

$\|e_n - e_m\| = \|(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, -1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)\| = \sqrt{2}$.

Logo $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ter subsequência de Cauchy, muito menos uma subsequência convergente.

Portanto existe um espaço de dimensão infinita (o ℓ_2), que não possui a propriedade de que **toda sequência limitada admite uma subsequência convergente**.

Portanto existe um espaço de dimensão infinita (o ℓ_2), que não possui a propriedade de que **toda sequência limitada admite uma subsequência convergente**.

Será que existe algum espaço de dimensão infinita que possui esta propriedade?

Portanto existe um espaço de dimensão infinita (o ℓ_2), que não possui a propriedade de que **toda sequência limitada admite uma subsequência convergente**.

Será que existe algum espaço de dimensão infinita que possui esta propriedade?

A resposta é **não**, mas antes vejamos outros exemplos de espaços de dimensão infinita.

Espaços de Sequências

Espaços de Sequências

$$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \,:\, (x_n) \text{ é limitada } \},$$

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \ : \ (x_n) \text{ é limitada } \}$,

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \,:\, (x_n)$ é limitada $\}$,

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

$c_0 = \{(x_n) \in s \,:\, x_n \to 0\}$,

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \,:\, (x_n) \text{ é limitada } \}$,

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

$c_0 = \{(x_n) \in s \,:\, x_n \to 0\}$, com a mesma norma de ℓ_∞.

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \ : \ (x_n) \text{ é limitada } \}$,

com a norma $\|x\|_\infty \ = \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

$c_0 = \{(x_n) \in s \ : \ x_n \to 0\}$, com a mesma norma de ℓ_∞.

$\ell_1 \ = \ \{(x_n) \in s \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$,

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \,:\, (x_n) \text{ é limitada } \}$,

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

$c_0 = \{(x_n) \in s \,:\, x_n \to 0\}$, com a mesma norma de ℓ_∞.

$\ell_1 = \{(x_n) \in s \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$,

com a norma $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \ : \ (x_n) \text{ é limitada } \}$,

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

$c_0 = \{(x_n) \in s \ : \ x_n \to 0\}$, com a mesma norma de ℓ_∞.

$\ell_1 = \{(x_n) \in s \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$,

com a norma $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Se $p \in [1, +\infty)$, $\ell_p = \{ (x_n) \in s \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$,

Espaços de Sequências

$\ell_\infty = \{(x_n) \in s \; : \; (x_n) \text{ é limitada } \}$,

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

$c_0 = \{(x_n) \in s \; : \; x_n \to 0\}$, com a mesma norma de ℓ_∞.

$\ell_1 = \{(x_n) \in s \; : \; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$,

com a norma $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Se $p \in [1, +\infty)$, $\ell_p = \{ (x_n) \in s \; : \; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$,

com a norma $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Espaços de Funções

Espaços de Funções

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \, : \, f \text{ é contínua em } [a,b]\},$$

Espaços de Funções

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ é contínua em } [a,b]\},$$

com a norma $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ (norma do sup).

Espaços de Funções

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; f \text{ é contínua em } [a,b]\},$$

com a norma $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (norma do sup).

$$P[a,b] = \{p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; p \text{ é um polinômio restrito a } [a,b]\},$$

Espaços de Funções

$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f$ é contínua em $[a,b]\}$,

com a norma $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (norma do sup).

$P[a,b] = \{p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ p$ é um polinômio restrito a $[a,b]\}$, com a mesma norma de $C[a,b]$.

Espaços de Funções

$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; f$ é contínua em $[a,b]\}$,

com a norma $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ (norma do sup).

$P[a,b] = \{p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; p$ é um polinômio restrito a $[a,b]\}$, com a mesma norma de $C[a,b]$.

Ambos são espaços de dimensão infinita,

Espaços de Funções

$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, f$ é contínua em $[a,b]\}$,

com a norma $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (norma do sup).

$P[a,b] = \{p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, p$ é um polinômio restrito a $[a,b]\}$, com a mesma norma de $C[a,b]$.

Ambos são espaços de dimensão infinita,

já que o conjunto $\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n, \cdots\}$ é um subconjunto infinito e l.i. de $P[a,b]$ e de $C[a,b]$.

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Seja e_1 vetor de norma 1 em X.

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Seja e_1 vetor de norma 1 em X.

Considere $F_1 = [e_1]$ subespaço gerado por e_1.

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Seja e_1 vetor de norma 1 em X.

Considere $F_1 = [e_1]$ subespaço gerado por e_1. F_1 é fechado.

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Seja e_1 vetor de norma 1 em X.

Considere $F_1 = [e_1]$ subespaço gerado por e_1. F_1 é fechado.

$dim\, X = \infty$

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Seja e_1 vetor de norma 1 em X.

Considere $F_1 = [e_1]$ subespaço gerado por e_1. F_1 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow$

Se um espaço normado X tem dimensão infinita, então sempre é possível construir uma sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X, tal que $\|e_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|e_n - e_m\| \geq \frac{1}{2}$, para todos $n \neq m$.

Isto é consequência do:

Lema de Riesz. Sejam X um espaço normado, M um subespaço próprio e fechado de X. Dado $0 < \theta < 1$, existe $y \in X$, $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.

Vejamos...

Seja e_1 vetor de norma 1 em X.

Considere $F_1 = [e_1]$ subespaço gerado por e_1. F_1 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_1$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz

Lema de Riesz $\Rightarrow$

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$,

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty$

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow$

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$,

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$,

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in F_2$.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in F_2$.

Em particular, segue que

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in F_2$.

Em particular, segue que $\|e_3 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in F_2$.

Em particular, segue que $\|e_3 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$ e $\|e_3 - e_2\| \geq \frac{1}{2}$.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $F_2 = [e_1, e_2]$ subespaço gerado por e_1 e e_2. F_2 é fechado.

$dim\, X = \infty \Rightarrow F_2$ é subespaço próprio de X.

Lema de Riesz $\Rightarrow$ existe $e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, $\|e_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in F_2$.

Em particular, segue que $\|e_3 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$ e $\|e_3 - e_2\| \geq \frac{1}{2}$.

Procedendo de maneira indutiva, já que X tem dimensão infinita, encontramos a sequência desejada.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Suponha agora que K seja ilimitado.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Suponha agora que K seja ilimitado.Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $\|y_n\| \geq n$.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Suponha agora que K seja ilimitado.Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $\|y_n\| \geq n$. Agora esta sequência (y_n) não pode ter subsequência convergente,

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Suponha agora que K seja ilimitado.Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $\|y_n\| \geq n$. Agora esta sequência (y_n) não pode ter subsequência convergente, já que qualquer subsequência de (y_n) é ilimitada.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Suponha agora que K seja ilimitado.Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $\|y_n\| \geq n$. Agora esta sequência (y_n) não pode ter subsequência convergente, já que qualquer subsequência de (y_n) é ilimitada.Portanto K é limitado.

Definição

Dizemos que um conjunto K é **compacto** *se toda sequência em K admite uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Seja K compacto e tome $x \in \overline{K}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x$. Como K é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente em K.Logo $x \in K$ e portanto K é fechado.

Suponha agora que K seja ilimitado.Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $\|y_n\| \geq n$. Agora esta sequência (y_n) não pode ter subsequência convergente, já que qualquer subsequência de (y_n) é ilimitada.Portanto K é limitado. ■

Porém, existem conjunto fechados e limitados que não são compactos.

Porém, existem conjunto fechados e limitados que não são compactos.

Considere o conjunto $\{x = (x_n) \in \ell_2 \ : \ \|x\| = 1\}$.

Porém, existem conjunto fechados e limitados que não são compactos.

Considere o conjunto $\{x = (x_n) \in \ell_2 \,:\, \|x\| = 1\}$. Ele é fechado e limitado.

Porém, existem conjunto fechados e limitados que não são compactos.

Considere o conjunto $\{x = (x_n) \in \ell_2 \,:\, \|x\| = 1\}$. Ele é fechado e limitado.

E vimos que este conjunto possui uma sequência que não admite subsequência convergente.

Porém, existem conjunto fechados e limitados que não são compactos.

Considere o conjunto $\{x = (x_n) \in \ell_2 \ : \ \|x\| = 1\}$. Ele é fechado e limitado.

E vimos que este conjunto possui uma sequência que não admite subsequência convergente. Logo não pode ser compacto.

Porém, existem conjunto fechados e limitados que não são compactos.

Considere o conjunto $\{x = (x_n) \in \ell_2 \,:\, \|x\| = 1\}$. Ele é fechado e limitado.

E vimos que este conjunto possui uma sequência que não admite subsequência convergente. Logo não pode ser compacto.

O que está por trás disto tudo é o seguinte teorema:

Teorema

Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:

Teorema

Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:

1. *X tem dimensão finita.*

Teorema

Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:

1. *X tem dimensão finita.*
2. **Todo** *subconjunto fechado e limitado de X é compacto.*

Teorema

Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:

1. *X tem dimensão finita.*
2. **Todo** *subconjunto fechado e limitado de X é compacto.*
3. *A bola unitária fechada de X é compacta.*

Teorema

Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:

1. *X tem dimensão finita.*
2. **Todo** *subconjunto fechado e limitado de X é compacto.*
3. *A bola unitária fechada de X é compacta.*

A bola unitária fechada é o seguinte conjunto:

Teorema

Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:

1. *X tem dimensão finita.*
2. **Todo** *subconjunto fechado e limitado de X é compacto.*
3. *A bola unitária fechada de X é compacta.*

A bola unitária fechada é o seguinte conjunto: $\{x \in X \ : \ \|x\| \leq 1\}$.

COMPLETUDE

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

$x_1 = 2,$

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

$x_1 = 2,$

$x_2 = \frac{3}{2},$

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

$x_1 = 2,$

$x_2 = \frac{3}{2},$

$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} = \frac{17}{12},$

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = \frac{3}{2},$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} = \frac{17}{12},$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{2}{x_3}}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}}{2},$$

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = \frac{3}{2},$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} = \frac{17}{12},$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{2}{x_3}}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}}{2}, \dots$$

Considere a seguinte sequência de números reais, dada de forma recursiva:

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = \frac{3}{2},$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} = \frac{17}{12},$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{2}{x_3}}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}}{2}, \ldots$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é **de Cauchy** se

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é **de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é **de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é **de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é **de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Não é difícil provar que esta sequência (x_n), formada somente por números racionais, converge para $\sqrt{2}$.

Portanto $\mathbb{Q}$ possui sequências que convergem para pontos que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é **de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Um espaço normado X é **completo** se toda sequência de Cauchy for convergente em X.

Num espaço completo,

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto que pertence ao espaço.

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto que pertence ao espaço.

Portanto num espaço incompleto

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto que pertence ao espaço.

Portanto num espaço incompleto existe pelo menos uma sequência cujos termos estão cada vez mais próximos entre si,

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto que pertence ao espaço.

Portanto num espaço incompleto existe pelo menos uma sequência cujos termos estão cada vez mais próximos entre si, e de certa forma acumulando-se em torno de um ponto

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto que pertence ao espaço.

Portanto num espaço incompleto existe pelo menos uma sequência cujos termos estão cada vez mais próximos entre si, e de certa forma acumulando-se em torno de um ponto que não pertence ao espaço.

Num espaço completo, se os termos de uma sequência estão cada vez mais próximos entre si, então esta sequência deve estar acumulando-se em torno de um ponto que pertence ao espaço.

Portanto num espaço incompleto existe pelo menos uma sequência cujos termos estão cada vez mais próximos entre si, e de certa forma acumulando-se em torno de um ponto que não pertence ao espaço.

$\mathbb{Q}$ não é completo.

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a, b]$, com a norma do sup, é incompleto.

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a, b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a, b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i$

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a,b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a,b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

converge para a função e^x,

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a,b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

converge para a função e^x, que não é um polinômio.

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a, b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

converge para a função e^x, que não é um polinômio.

O seguinte subespaço de ℓ_2 é incompleto:

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a,b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

converge para a função e^x, que não é um polinômio.

O seguinte subespaço de ℓ_2 é incompleto:

c_{00}

Mais exemplos de espaços normados incompletos.

$P[a, b]$, com a norma do sup, é incompleto. De fato, a sequência de polinômios dada por

$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

converge para a função e^x, que não é um polinômio.

O seguinte subespaço de ℓ_2 é incompleto:

$c_{00} =\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in s \, : \, x_n \neq 0$ apenas para um número finito de índices.$\}$.

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$,

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x$

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Logo $\frac{2}{r}(z - x) = \frac{y}{\|y\|} \in F$

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Logo $\frac{2}{r}(z - x) = \frac{y}{\|y\|} \in F \Rightarrow$

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Logo $\frac{2}{r}(z - x) = \frac{y}{\|y\|} \in F \Rightarrow y \in F$,

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Logo $\frac{2}{r}(z - x) = \frac{y}{\|y\|} \in F \Rightarrow y \in F$, contradição.

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Logo $\frac{2}{r}(z - x) = \frac{y}{\|y\|} \in F \Rightarrow y \in F$, contradição. ■

Sejam X um espaço normado e F um subespaço próprio de X. Então $int(F) = \emptyset$.

Seja $y \in X$ tal que $y \notin F$.

Supondo que se tenha algum $x \in int(F)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset F$.

Então $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x \in B(x, r) \subset F$.

Logo $\frac{2}{r}(z - x) = \frac{y}{\|y\|} \in F \Rightarrow y \in F$, contradição. ∎

Teorema de Baire Seja X um espaço normado completo tal que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, onde cada F_n é um subconjunto fechado de X. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável:

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$,

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$,

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e cada F_n é fechado.

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e cada F_n é fechado.

Teorema de Baire

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e cada F_n é fechado.

Teorema de Baire $\Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e cada F_n é fechado.

Teorema de Baire $\Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_{n_0}) \neq \emptyset$,

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e cada F_n é fechado.

Teorema de Baire $\Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_{n_0}) \neq \emptyset$,
o que é um absurdo.

Teorema

Seja X um espaço de dimensão infinita, normado e completo. Então qualquer base algébrica de X é não-enumerável.

Vamos supor por absurdo que X admita uma base enumerável: $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$.

Consideremos $F_n = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, o subespaço (próprio) de X gerado por $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Então $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e cada F_n é fechado.

Teorema de Baire $\Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_{n_0}) \neq \emptyset$, o que é um absurdo. $\blacksquare$

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$,

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$,

$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots)$,

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$

$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots),$

$\vdots$

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$,

$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots)$,

$\vdots$

$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$,

Não existe norma que torne $P[a, b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$

$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots),$

$\vdots$

$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$

$\vdots$

Não existe norma que torne $P[a,b]$ completo.

Idem para c_{00}.

Relembremos dos seguintes elementos de ℓ_2:

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$$

$$e_2 = (0, 1, \cdots, 0, \cdots),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

$$\vdots$$

O conjunto $A = \{e_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ não é uma base algébrica de ℓ_2.

MUITO OBRIGADA!