O problema de Björling em espaços tridimensionais

Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Universidade Federal do ABC

Preliminares

- **Superfície de Riemann** $(M, \mathrm{d}s^2)$**:**

Preliminares

- **Superfície de Riemann $(M, \mathrm{d}s^2)$:**
  - Variedade complexa de dimensão 1;
  - Superfície munida de uma estrutura conforme.

Preliminares

- **Superfície de Riemann $(M, \mathrm{d}s^2)$:**
  - Variedade complexa de dimensão 1;
  - Superfície munida de uma estrutura conforme.
- **Imersão isométrica orientável $X : M \to \mathbb{R}^3$,**

Preliminares

- **Superfície de Riemann** $(M, \mathrm{d}s^2)$**:**
  - Variedade complexa de dimensão 1;
  - Superfície munida de uma estrutura conforme.
- **Imersão isométrica orientável** $X : M \to \mathbb{R}^3$**,**
- **Aplicação de Gauss** $N : M \to \mathbb{S}^2$**,**

Preliminares

- **Superfície de Riemann** $(M, \mathrm{d}s^2)$**:**
  - Variedade complexa de dimensão 1;
  - Superfície munida de uma estrutura conforme.
- **Imersão isométrica orientável** $X : M \to \mathbb{R}^3$**,**
- **Aplicação de Gauss** $N : M \to \mathbb{S}^2$**,**
- **Curvatura média** $H : M \to \mathbb{R}$ **associada a imersão** X**:**
  - Média aritmética das curvaturas principais do ponto,

Preliminares

- **Superfície de Riemann** $(M, \mathrm{d}s^2)$**:**
  - Variedade complexa de dimensão 1;
  - Superfície munida de uma estrutura conforme.
- **Imersão isométrica orientável** $X : M \to \mathbb{R}^3$**,**
- **Aplicação de Gauss** $N : M \to \mathbb{S}^2$**,**
- **Curvatura média** $H : M \to \mathbb{R}$ **associada a imersão** X**:**
  - Média aritmética das curvaturas principais do ponto,

Superfície Mínima

X é **imersão mínima** se e somente se $H = 0$.

Preliminares

- **Superfície de Riemann** $(M, \mathrm{d}s^2)$**:**
  - Variedade complexa de dimensão 1;
  - Superfície munida de uma estrutura conforme.
- **Imersão isométrica orientável** $X : M \to \mathbb{R}^3$**,**
- **Aplicação de Gauss** $N : M \to \mathbb{S}^2$**,**
- **Curvatura média** $H : M \to \mathbb{R}$ **associada a imersão** X**:**
  - Média aritmética das curvaturas principais do ponto,

Superfície Mínima

X é **imersão mínima** se e somente se $H = 0$.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

Problema de Björling

Determine uma imersão mínima conforme $X : \mathbb{C} \supset M \to \mathbb{R}^3$ tal que:

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

Problema de Björling

Determine uma imersão mínima conforme $X : \mathbb{C} \supset M \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- $X(s, 0) = \beta(s)$;

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

Problema de Björling

Determine uma imersão mínima conforme $X : \mathbb{C} \supset M \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- $X(s, 0) = \beta(s)$;
- $N(s, 0) = V(s)$.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

Problema de Björling

Determine uma imersão mínima conforme $X : \mathbb{C} \supset M \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- $X(s, 0) = \beta(s)$;
- $N(s, 0) = V(s)$.

Caso particular:

Seja $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica parametrizada por comprimento de arco.

Construa uma superfície mínima contendo β como geodésica.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

Problema de Björling

Determine uma imersão mínima conforme $X : \mathbb{C} \supset M \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- $X(s, 0) = \beta(s)$;
- $N(s, 0) = V(s)$.

Caso particular:
Seja $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica parametrizada por comprimento de arco.

Construa uma superfície mínima contendo β como geodésica.

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica orientável com aplicação de Gauss N e curvatura média H.

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica orientável com aplicação de Gauss N e curvatura média H.

Proposição

$$\triangle X = 2HN$$

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica orientável com aplicação de Gauss N e curvatura média H.

Proposição

$$\triangle X = 2HN$$

Corolário

X é imersão mínima se e somente se X é aplicação harmônica.

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica orientável com aplicação de Gauss N e curvatura média H.

Proposição

$$\triangle X = 2HN$$

Corolário

X é imersão mínima se e somente se X é aplicação harmônica.

Representação de Weierstrass

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme.

Representação de Weierstrass

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme.

Considere um parâmetro $z = s + it$ do atlas conforme de M.

Representação de Weierstrass

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme.

Considere um parâmetro $z = s + it$ do atlas conforme de M.

Defina:

- $\phi_k = \frac{\partial X_k}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_k}{\partial s} - i\frac{\partial X_k}{\partial t}\right)$,
- $\Phi_k = \phi_k \mathrm{d}z$.

Representação de Weierstrass

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme.

Considere um parâmetro $z = s + it$ do atlas conforme de M.

Defina:

- $\phi_k = \frac{\partial X_k}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_k}{\partial s} - i\frac{\partial X_k}{\partial t}\right)$,
- $\Phi_k = \phi_k \mathrm{d}z$.

Temos:

- X conforme $\Longrightarrow \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- X imersão $\Longrightarrow |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;
- X mínima $\Longrightarrow$ X harmônica $\Longrightarrow$ Φ_k não tem pedíodo real em M, i.e.,
  Se γ é curva fechada em M então

$$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma \Phi_j\right) = 0.$$

Representação de Weierstrass

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme.

Considere um parâmetro $z = s + it$ do atlas conforme de M.

Defina:

- $\phi_k = \frac{\partial X_k}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_k}{\partial s} - i\frac{\partial X_k}{\partial t}\right)$,
- $\Phi_k = \phi_k \mathrm{d}z$.

Temos:

- X conforme $\Longrightarrow \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- X imersão $\Longrightarrow |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;
- X mínima $\Longrightarrow$ X harmônica $\Longrightarrow \Phi_k$ não tem pedíodo real em M, i.e.,
  Se γ é curva fechada em M então

$$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma \Phi_j\right) = 0.$$

Representação de Weierstrass

Proposição

Sejam $P_0, P \in M$ e γ curva em M ligando P_0 a P, e $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Então:

$$X(P) - X(P_0) = \mathrm{Re}\left(\int_\gamma \Phi\right)$$

Representação de Weierstrass

Proposição

Sejam $P_0, P \in M$ e γ curva em M ligando P_0 a P, e $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Então:

$$X(P) - X(P_0) = \mathrm{Re}\left(\int_\gamma \Phi\right)$$

Representação de Weierstrass

Teorema

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M ($i = 1, 2, 3$) tais que:

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M ($i = 1, 2, 3$) tais que:

- $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M ($i = 1, 2, 3$) tais que:

- $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M ($i = 1, 2, 3$) tais que:

- $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;
- Φ_k não tem pedíodo real em M.

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M $(i = 1, 2, 3)$ tais que:

- $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;
- Φ_k não tem pedíodo real em M.

Então, fixado $P_0 \in M$ e definindo $X : M \to \mathbb{R}^3$ por

$$X(P) = \mathrm{Re}\left(\int_{P_0}^{P} \Phi\right),$$

temos que X é imersão mínima conforme.

Representação de Weierstrass

Teorema

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M ($i = 1, 2, 3$) tais que:

- $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;
- Φ_k não tem pedíodo real em M.

Então, fixado $P_0 \in M$ e definindo $X : M \to \mathbb{R}^3$ por

$$X(P) = \mathrm{Re}\left(\int_{P_0}^{P} \Phi\right),$$

temos que X é imersão mínima conforme.

Chamamos (M, Φ) de **Representação de Weierstrass** de X.

Teorema *(Representação de Weierstrass)*

Sejam Φ_i 1-formas complexas em M $(i = 1, 2, 3)$ tais que:

- $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$;
- $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0$;
- Φ_k não tem pedíodo real em M.

Então, fixado $P_0 \in M$ e definindo $X : M \to \mathbb{R}^3$ por

$$X(P) = \mathrm{Re}\left(\int_{P_0}^{P} \Phi\right),$$

temos que X é imersão mínima conforme.

Chamamos (M, Φ) de **Representação de Weierstrass** de X.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e:

- $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular analítica;
- $V : I \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial analítico unitário ao longo de β tal que $\langle \beta', V \rangle = 0$;

Problema de Björling

Determine uma imersão mínima conforme $X : \mathbb{C} \supset M \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- $X(s, 0) = \beta(s)$;
- $N(s, 0) = V(s)$.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Teorema *Problema de Björling em* $\mathbb{R}^3$

Existe uma única solução para o problema de Björling para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Teorema *Problema de Björling em* $\mathbb{R}^3$

Existe uma única solução para o problema de Björling para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

- Existe $M \subset \mathbb{C}$ aberto simplesmente conexo com $I \subset M$, tal que β e V admitem extensões holomorfas em M, e tal que $X : M \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(z) = \mathrm{Re}\left(\beta(z) + i\int_{s_0}^{z} V(w) \times \beta'(w)\mathrm{d}w\right)$$

é uma solução para o problema de Bjorling.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Teorema *Problema de Björling em* $\mathbb{R}^3$

Existe uma única solução para o problema de Björling para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

- Existe $M \subset \mathbb{C}$ aberto simplesmente conexo com $I \subset M$, tal que β e V admitem extensões holomorfas em M, e tal que $X : M \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(z) = \mathrm{Re}\left(\beta(z) + i\int_{s_0}^{z} V(w) \times \beta'(w)\mathrm{d}w\right)$$

  é uma solução para o problema de Bjorling.
- Se $X_1 : M_1 \to \mathbb{R}^3$ e $X_2 : M_2 \to \mathbb{R}^3$ são soluções para o problema de Björling, então

$$X_1|_{M_1 \cap M_2} = X_2|_{M_1 \cap M_2}$$

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

Teorema *Problema de Björling em* $\mathbb{R}^3$

Existe uma única solução para o problema de Björling para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

- Existe $M \subset \mathbb{C}$ aberto simplesmente conexo com $I \subset M$, tal que β e V admitem extensões holomorfas em M, e tal que $X : M \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$X(z) = \mathrm{Re}\left(\beta(z) + i\int_{s_0}^{z} V(w) \times \beta'(w)\mathrm{d}w\right)$$
é uma solução para o problema de Bjorling.
- Se $X_1 : M_1 \to \mathbb{R}^3$ e $X_2 : M_2 \to \mathbb{R}^3$ são soluções para o problema de Björling, então
$$X_1|_{M_1 \cap M_2} = X_2|_{M_1 \cap M_2}$$

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

"Demonstração"

- Defina $\Phi : M \to \mathbb{C}^3$ por

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\beta'(z) + iV(z) \times \beta'(z)\right).$$

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

"Demonstração"

- Defina $\Phi : M \to \mathbb{C}^3$ por
$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\beta'(z) + iV(z) \times \beta'(z)\right).$$

- Observe que Φ obedece as hipóteses do teorema da representação de Weierstrass.

- Defina $\Phi : M \to \mathbb{C}^3$ por

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\beta'(z) + iV(z) \times \beta'(z)\right).$$

- Observe que Φ obedece as hipóteses do teorema da representação de Weierstrass.
- Defina

$$X(z) = 2\mathrm{Re}\left(\int_{s_0}^{z} \Phi(w)\right).$$

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

"Demonstração"

- Defina $\Phi : M \to \mathbb{C}^3$ por

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\beta'(z) + iV(z) \times \beta'(z)\right).$$

- Observe que Φ obedece as hipóteses do teorema da representação de Weierstrass.
- Defina

$$X(z) = 2\mathrm{Re}\left(\int_{s_0}^{z} \Phi(w)\right).$$

- Conclua observando que X obedece as hipóteses do problema de Björling.

O problema de Björling em $\mathbb{R}^3$

"Demonstração"

- Defina $\Phi : M \to \mathbb{C}^3$ por

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\beta'(z) + iV(z) \times \beta'(z)\right).$$

- Observe que Φ obedece as hipóteses do teorema da representação de Weierstrass.
- Defina

$$X(z) = 2\mathrm{Re}\left(\int_{s_0}^{z} \Phi(w)\right).$$

- Conclua observando que X obedece as hipóteses do problema de Björling.

Representação de Weierstrass

Generalizações

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Representação de Weierstrass

Generalizações

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

Representação de Weierstrass

Generalizações

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;

Representação de Weierstrass
Generalizações

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;
- Grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda [Mercuri-Montaldo-Piu]
  - Heisenberg Tridimensional Nil^3;
  - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;
- Grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda [Mercuri-Montaldo-Piu]
  - Heisenberg Tridimensional Nil^3;
  - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Alguns casos em aberto:

Representação de Weierstrass

Generalizações

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;
- Grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda [Mercuri-Montaldo-Piu]
  - Heisenberg Tridimensional Nil^3;
  - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Alguns casos em aberto:

- A esfera $\mathbb{S}^n$;

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;
- Grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda [Mercuri-Montaldo-Piu]
  - Heisenberg Tridimensional Nil^3;
  - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Alguns casos em aberto:

- A esfera $\mathbb{S}^n$;
- O grupo solúvel tridimensional Sol^3;

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;
- Grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda [Mercuri-Montaldo-Piu]
  - Heisenberg Tridimensional Nil^3;
  - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Alguns casos em aberto:

- A esfera $\mathbb{S}^n$;
- O grupo solúvel tridimensional Sol^3;
- Recobrimento universal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$;

Representação de Weierstrass

Generalizações

Pode-se generalizar o teorema da representação de Weierstrass trocando-se $\mathbb{R}^3$ por outros espaços ambientes.

Casos resolvidos:

- Espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$;
- Grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda

  [Mercuri-Montaldo-Piu]
  - Heisenberg Tridimensional Nil^3;
  - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;

Alguns casos em aberto:

- A esfera $\mathbb{S}^n$;
- O grupo solúvel tridimensional Sol^3;
- Recobrimento universal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$;

Björling Problem

Generalizações

Existência & Unicidade

Casos já estudados:

- $\mathbb{R}^3$;

Existência & Unicidade

Casos já estudados:

- $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{L}^3$ [L.J. Alías, R.M.B. Chaves, P. Mira];

Existência & Unicidade

Casos já estudados:

- $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{L}^3$ [L.J. Alías, R.M.B. Chaves, P. Mira];
- Grupos de Lie Tridimensionais munidos de métrica invariante à esquerda; [F. Mercuri, I.I. Onnis]

Existência & Unicidade

Casos já estudados:

- $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{L}^3$ [L.J. Alías, R.M.B. Chaves, P. Mira];
- Grupos de Lie Tridimensionais munidos de métrica invariante à esquerda; [F. Mercuri, I.I. Onnis]

Para $M = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{L}^3$ existe uma fórmula explícita para as soluções do Problema de Björling.

Existência & Unicidade

Casos já estudados:

- $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{L}^3$ [L.J. Alías, R.M.B. Chaves, P. Mira];
- Grupos de Lie Tridimensionais munidos de métrica invariante à esquerda; [F. Mercuri, I.I. Onnis]

Para $M = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{L}^3$ existe uma fórmula explícita para as soluções do Problema de Björling.

Obrigado!