# Invariantes e a Conjectura Jacobiana

Ricardo dos Santos Freire Jr.

IME–USP

Seja $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $f$ tem inversa global. Então $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Keller (1939):

Toda aplicação $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, tal que cada componente $f_i$ é um polinômio de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$ de coeficientes inteiros e de determinante Jacobiano identicamente 1, possui uma inversa $g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de mesmas propriedades?

É equivalente à mesma questão com os coeficientes das componentes polinomiais de $f$ em $\mathbb{C}$.

Uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ polinomial, i.e., sendo cada função coordenada $f_i$ um polinômio complexo em $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, tal que $\det f'(x) \equiv 1$ será chamada de **aplicação de Keller**.

**Conjectura Jacobiana (de Keller) [CJ($n$)]**

*Se $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de Keller, então $f$ é inversível.*

Quando $f$ é linear sabemos que $f$ é inversível se, e somente se, $f$ é injetora.

Para aplicações polinomiais é provada por Bialynicki-Birula e Rosenlicht, e uma demonstração mais acessível foi feita por Rudin.

**Teorema**

*Se $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial e $f$ é injetora, então $f(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$ e $f^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial.*

**Conjectura**

*Se $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de Keller, então $f$ é injetora.*

A Conjectura Jacobiana está em aberto para todo $n \geq 2$.

Diversos casos particulares são conhecidos, e algumas "demonstrações" chegaram a ser publicadas ao longo do tempo.

"Acreditar ou não na Conjectura Jacobiana?"

**Conjectura Jacobiana Real [CJR($n$)]**

*Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial de determinante Jacobiano não nulo para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $f$ é inversível.*

Neste caso pede-se somente que o determinante Jacobiano seja não nulo e não constante.

No caso complexo ambas as formulações são equivalentes, pois se o determinante é não nulo para todo $x \in \mathbb{C}^n$, então ele é constante.

É claro que CJR($2n$) $\implies$ CJ($n$) pois se $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de Keller, é fácil ver que $F := (\mathrm{Re}(f_1), \mathrm{Im}(f_1), \mathrm{Re}(f_2), \mathrm{Im}(f_2), \ldots, \mathrm{Re}(f_n), \mathrm{Im}(f_n))$ é uma aplicação polinomial com $\det F'(x) = |\det f'(x)|^2$. Assim, se CJR($n$) for verdadeira, concluímos que $F$ é inversível, portanto injetora, de onde $f$ é trivialmente injetora.

Entretanto, em 1994 Pinchuk deu o seguinte contra-exemplo para a Conjectura Jacobiana Real já com $n = 2$.

## Exemplo

*Sejam*

$$
\begin{aligned}
t &= xy - 1 \\
h &= t(xt+1) \\
m &= \frac{h+1}{x}(xt+1)^2 \\
u &= 170mh + 91h^2 + 195mh^2 + 69h^3 + 75h^3m + \frac{75}{4}h^4
\end{aligned}
$$

## Exemplo

*Considere a aplicação polinomial* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

*onde*

$$f_1 = m + h$$
$$f_2 = -t^2 - 6th(h+1) - u.$$

**Exemplo**

*É um trabalho "simples" verificar que* $\det f' = t^2 + (t + f(13 + 15h))^2 + f^2$, *o qual é estritamente positivo em* $\mathbb{R}^2$, *pois só pode ser 0 quando tanto* $t$ *quanto* $f$ *são 0. Entretanto, se* $t = 0$ *então* $f = \frac{1}{x} \neq 0$. *Além disso, temos que* $f(1,0) = f(-1,-2)$ *e, portanto,* $f$ *não é injetora.*

### Conjectura

*Se $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial e existem $a, b \in \mathbb{C}^n$, com $a \neq b$ tal que $f(a) = f(b)$, então existe $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $\det f'(z) = 0$.*

**Teorema**

*Se $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de Keller e $deg(f) \leq 2$, então $f$ é inversível.*

**Demonstração**: Basta mostrar que $f$ é injetora. Assim, suponhamos por contradição que $f(a) = f(b)$ para $a, \quad b \in \mathbb{C}^n$ e $a \neq b$. É claro que podemos supor que $b = 0$, pois basta definirmos $g(x) = f(x + a) - f(a)$ e obtemos que $\deg(g) \leq 2$, $g(0) = 0$ e sendo $c = b - a \neq 0$ temos $g(c) = 0$. Notamos que $g'(x) = f'(x + a)$ e assim $\det g' \in \mathbb{C}^*$.

Agora escreva $g = g_1 + g_2$, sendo $g_i$ a componente homogênea de grau $i$ de $g$, e considere $g(tc) = tg_1(c) + t^2 g_2(c)$. Derivando em $t$, obtemos

$$g_1(c) + 2tg_2(c) = \frac{d}{dt} g(tc) = g'(tc).c \neq 0$$

para todo $t \in \mathbb{C}$. Substituindo em $t = \frac{1}{2}$, obtemos $g(c) \neq 0$, uma contradição. Assim, $f$ é injetora. $\square$

Pode=se mostrar que a Conjectura Jacobiana é verdadeira para todo $n \geq 2$ se ela for verdadeira para uma classe específica de aplicações de Keller de grau $\leq 3$!

Uma dessas classes interesssantes é a das chamadas aplicações de *Yagzhev* ou aplicações *cúbica-homogêneas*, que foram introduzidas por Yagzhev e, independentemente, por Bass, Connell e Wright.

Tratam-se das aplicações $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ da seguinte forma

$$f(x) = x - g(x)\,, \qquad \text{tal que } \det f'(x) = 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{C}^n,$$

onde $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial *homogênea de grau 3*.

Há ainda a importante subclasse de aplicações *cúbica-lineares* introduzidas por Drużkowski onde além de $f(x) = x - g(x)$ ser uma aplicação cúbica-homogênea como antes, temos que $g$ é dada pelo cubo de uma aplicação linear, ou seja $g(x) = (Ax)^3$ para alguma aplicação linear $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

# Como se prova?

A idéia é simplesmente pegarmos uma aplicação de Keller qualquer, em dimensão $n$, e a ela associarmos através de uma sequência de operações "simples", uma nova aplicação $F$, cúbica-homogênea, tal que $f$ é injetora se, e somente se, $F$ também for.
Depois disso, podemos também construir uma função $\tilde{F}$ cúbica-linear com a mesma propriedade.

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores $\mathscr{C}^1$ com $F(0) = 0$. Diremos que $F$ satisfaz a **condição de Markus-Yamabe** se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ todos os autovalores de $F'(x)$ tenham parte real estritamente negativa.

Ainda, se cada solução $\varphi(t,x)$ do sistema $\dot{x} = F(x)$ com $\varphi(0,x) = x$ tende para 0 com $t \to \infty$, diremos que 0 é um atrator global.

# Markus-Yamabe

**Conjectura**

*Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores $\mathscr{C}^1$ com $F(0) = 0$ satisfazendo a condição de Markus-Yamabe, então 0 é um atrator global para o sistema $\dot{x} = F(x)$.*

Se esta conjectura fosse verdadeira, qualquer campo de vetores $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição de Markus-Yamabe deve ser injetor.

De fato, suponha por absurdo que existem $a, b \in \mathbb{R}^n$, com $a \neq b$ e considere seja $G(x) = F(x + a) - F(a)$. Temos que $G(0) = 0$ e que $G$ também satisfaz a condição de Markus-Yamabe, e se esta conjectura fosse verdadeira, teríamos que toda solução tenderia a 0 com $t \to \infty$, o que seria uma contradição com a solução constante $x(t) = b - a \neq 0$.

Se $n = 2$ foi provada, independentemente, por Feßler e Gutiérrez.

Para dimensões $n \geq 3$, o seguinte contra-exemplo foi dado.

### Exemplo

*Seja*

$$F(x) = (-x_1 + x_3 d(x)^2, -x_2 - d(x)^2, -x3, \ldots, -x_n)$$

*onde* $d(x) = x_1 + x_2 x_3$.

## Exemplo

*Então*

$$\dot{x} = F(x)$$

*tem a solução*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 18e^t \\ x_2(t) &= -12e^{2t} \\ x_3(t) &= e^{-t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= e^{-t}, \end{aligned}$$

*que claramente tende ao infinito quando $t \to \infty$.*

## Conjectura

*Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial satisfazendo a condição de Markus-Yamabe, então $F$ é injetora.*

**Teorema**

*Se para todo $n \geq 2$ a conjectura 2 é verdadeira, então a Conjectura Jacobiana é verdadeira.*

"Como inverter uma aplicação polinomial?"

Como identificar os automorfismos polinomiais de $\mathbb{C}^n$?

Conjectura Jacobiana surgiria como um critério de linearização para a invertibilidade.

## Conjectura da Dependência Linear

*Se $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação homogênea tal que $g'(x)$ é nilpotente para todo $x \in \mathbb{C}^n$, então as linhas de $g'$ são linearmente dependentes em $\mathbb{C}$, ie: existem $\lambda_i \in \mathbb{C}$, não todos nulos, tais que*

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n \equiv 0 \,.$$

# Teorema de Hubbers

## Teorema

*Seja $F(x) = x - G(x)$ uma aplicação cúbica-homogênea em dimensão 4. Então, existe $T \in GL_4(\mathbb{C})$ tal que $T^{-1} \circ F \circ T$ é de uma das seguintes formas:*

1 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \quad -a_4x_1^3 - b_4x_1^2x_2 - c_4x_1^2x_3 - e_4x_1x_2^2 - f_4x_1x_2x_3 \\ \qquad -h_4x_1x_3^2 - k_4x_2^3 - l_4x_2^2x_3 - n_4x_2x_3^2 - q_4x_3^3 \end{pmatrix}$$

## Teorema

$$2 \begin{pmatrix} x_1 & \\ x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 - h_2 x_1 x_3^2 - q_2 x_3^3 \\ x_3 & \\ x_4 & -x_1^2 x_3 - h_4 x_1 x_3^2 - q_4 x_3^3 \end{pmatrix}$$

**Teorema**

$$3\begin{pmatrix} x_1 & \\ x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 - c_1x_1^2x_4 + 3c_1x_1x_2x_3 - \frac{16q_4c_1^2 - r_4^2}{48c_1^2}x_1x_3^2 \\ & -\frac{1}{2}r_4x_1x_3x_4 + \frac{3}{4}r_4x_2x_3^3 - \frac{r_4q_4}{12c_1}x_3^3 - \frac{r_4^2}{16c_1}x_3^2x_4 \\ x_3 & \\ x_4 & -x_1^2x_3 + \frac{r_4}{4c_1}x_1x_3^2 - 3c_1x_1x_3x_4 + 9c_1x_2x_3^2 - \\ & q_4x_3^3 - \frac{3}{4}r_4x_3^2x_4 \end{pmatrix}$$

## Teorema

$$4 \begin{pmatrix} x_1 & \\ x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 \\ x_3 & -x_1^2 x_2 - e_3 x_1 x_2^2 - k_3 x_2^3 \\ x_4 & -e_4 x_1 x_2^2 - k_4 x_2^3 \end{pmatrix}$$

**Teorema**

5
$$\begin{pmatrix} x_1 & \\ x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 + i_3x_1x_2x_4 - j_2x_1x_4^2 + s_3x_2x_4^2 + i_3^2x_3x_4^2 - t_2x_4^3 \\ x_3 & -x_1^2x_2 - \frac{2s_3}{i_3}x_1x_2x_4 - i_3x_1x_3x_4 - j_3x_1x_4^2 - \frac{s_3^2}{i_3^2}x_2x_4^2 \\ & -s_3x_3x_4^2 - t_3x_4^3 \\ x_4 & \end{pmatrix}$$

**Teorema**

$$6 \begin{pmatrix} x_1 & \\ x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 - j_2x_1x_4^2 - t_2x_4^3 \\ x_3 & -x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 - g_3x_1x_2x_4 - j_3x_1x_4^2 - \\ & k_3x_2^3 - m_3x_2^2x_4 - p_3x_2x_4^2 - t_3x_4^3 \\ x_4 & \end{pmatrix}$$

**Teorema**

$$7 \begin{pmatrix} x_1 & \\ x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 \\ x_3 & -x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 - k_3x_2^3 \\ x_4 & -x_1^2x_3 - e_4x_1x_2^2 - f_4x_1x_2x_3 - h_4x_1x_3^2 - k_4x_2^3 \\ & -l_4x_2^2x_3 - n_4x_2x_3^2 - q_4x_3^3 \end{pmatrix}$$

## Teorema

$$
8 \begin{pmatrix}
x_1 & \\
x_2 & -\frac{1}{3}x_1^3 \\
x_3 & -x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 + g_4x_1x_2x_3 - k_3x_2^3 + m_4x_2^2x_3 \\
 & +g_4^2x_2^2x_4 \\
x_4 & -x_1^2x_3 - e_4x_1x_2^2 - \frac{2m_4}{g_4}x_1x_2x_3 - g_4x_1x_2x_4 - k_4x_2^3 \\
 & -\frac{m_4^2}{g_4^2}x_2^2x_3 - m_4x_2^2x_4
\end{pmatrix}
$$

# Contra-exemplo pra conjectura da DL (de Bondt)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{10}) - g(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \begin{pmatrix} x_1x_9x_{10} - x_2x_{10}^2 \\ x_1x_9^2 - x_2x_9x_{10} \\ x_3x_9x_{10} - x_4x_{10}^2 \\ x_3x_9^2 - x_4x_9x_{10} \\ x_5x_9x_{10} - x_6x_{10}^2 \\ x_5x_9^2 - x_6x_9x_{10} \\ (x_1x_4 - x_2x_3)x_9 \\ (x_3x_6 - x_4x_5)x_9 \\ \frac{(x_1x_4 - x_2x_3)x_8 - (x_3x_6 - x_4x_5)x_7}{x_9^3} \end{pmatrix}$$

Para a construção dos contra-exemplos, de Bondt estudou inicialmente quasi-translações: uma aplicação polinomial $f(x) = x - g(x)$ é uma *quasi-translação* se sua inversa for $x + g(x)$. Isso significa que

$$(x - g(x)) + g(x - g(x)) = x\,,$$

ou seja

$$g(f(x)) = g(x)\,.$$

### Definição

*Dizemos que uma função escalar* $k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, *não constante, é um* **invariante** *para a aplicação* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *se* $k \circ f = k$.

Consideremos a seguinte matriz nilpotente em função de dois parâmetros:

$$M(s,t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & t^2 \\ -t^2 & s^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos $g\colon \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^{11}$, em forma de coluna, como

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{11}) = \begin{pmatrix} M(x_{10}, x_{11}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ M(x_{10}, x_{11}) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ M(x_{10}, x_{11}) \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \\ x_{10}^3 \end{pmatrix}$$

Nosso exemplo é $f : \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^{11}$ dada por

$$f(x) := x - g(x).$$

Essa aplicação tem o seguinte invariante cúbico $k$:

$$k(x) := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} .$$

É simples verificar que $k$ é de fato um invariante para $f$. Usando este fato e a nilpotência de $M$, podemos calcular facilmente a inversa de $f$, que é também uma aplicação polinomial. Sabendo que $f$ é inversível, podemos facilmente deduzir que seu determinante jacobiano deve ser constante e igual a 1.

**Teorema**

*A função $f$ definida em (3) é um automorfismo polinomial de $\mathbb{C}^{11}$ que admite o invariante polinomial homogêneo cúbico $k$ definido em (4). Além disso, não existem invariantes polinomiais homogêneos de grau 1 ou 2 para $f$.*

# Prova

Seja então $A$ uma matriz $11 \times 11$ complexa e simétrica, e suponha que a forma quadrática $K(x) := x^T Ax$ é um invariante para $f$. Separando as partes homogêneas da identidade $K \circ f = K$, deduzimos que as seguintes condições são equivalentes a $K$ ser um invariante para $f$:

$$x^T Ag(x) = 0, \qquad g(x)^T Ag(x) = 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^{11}.$$

Consideremos a curva polinomial $c(t) = (t^{2^1}, t^{2^2}, \dots, t^{2^{11}})$. A primeira equação em (7) implica que:

$$c(t)^T A g\big(c(t)\big) = 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por meio desta condição, após um cálculo longo e entediante, vemos que $A$ é nula, o que mostra que $K$ é identicamente nulo e completa a demonstração.

$\square$

Em um dos exemplos de sua tese de doutorado, de Bondt responde positivamente uma das dúvidas naturais na procura por exemplos interessanes de aplicações cúbica-homogêneas sem invariantes quadráticos ou cúbicos: é possível possuir invariantes quadráticos mas não cúbicos.

Neste exemplo, que pode ser estudado como na seção anterior, temos que $k(x) = x_1x_4 - x_2x_3$ é um invariante (homogêneo) quadrático para $f$.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_9) = (x_1, x_2, \ldots, x_9) - g(x_1, x_2, \ldots, x_9)$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_9) = \begin{pmatrix} (x_1x_5 - x_2x_6)x_6 \\ (x_1x_5 - x_2x_6)x_5 \\ (x_3x_5 - x_4x_6)x_6 \\ (x_3x_5 - x_4x_6)x_5 \\ (x_1x_4 - x_2x_3)x_6 \\ x_5^3 - (x_1x_4 - x_2x_3)x_7 \\ 3x_5^2x_6 - (x_1x_4 - x_2x_3)x_8 \\ 3x_5x_6^2 - (x_1x_4 - x_2x_3)x_9 \\ x_6^3 \end{pmatrix}$$

Obrigado a todos pela presença!