O que é Dimensão?

Augusto GEROLIN
agerolin@umpa.ens-lyon.fr
(ENS-Lyon / Université Joseph-Fourier)

3º EIAGIME - USP

29 de agosto de 2010

Outros possivéis títulos para O que é dimensão?

Outros possivéis títulos para O que é dimensão?

1. Introdução à Teoria Geométrica da Medida...
2. Geometria Fractal...
3. Medidas de Hausdorff...

O que é dimensão?

Estratégia do mini-curso: Apresentar idéias relacionadas a dimensão em dois contextos (geométricos) diferentes:

1. **Analítico** (Medidas de Hausdorff)

O que é dimensão?

Estratégia do mini-curso: Apresentar idéias relacionadas a dimensão em dois contextos (geométricos) diferentes:

1. **Analítico** (Medidas de Hausdorff)
2. **Algébrico/Lúdico**: treços do filme *"Dimensions une promenade mathématique"*"

O conceito primitivo de dimensão

O conceito primitivo de dimensão

1. Anos 80-90 (geração coca-cola): vídeo games.

O conceito primitivo de dimensão

1. Anos 80-90 (geração coca-cola): vídeo games.
2. Graduação, Anos 00-10 (geração *Bourbaki*):**Álgebra Linear**.

Dimensão em Álgebra Linear

Menor número de vetores geradores do espaço.

Dimensão em Álgebra Linear

Menor número de vetores geradores do espaço.

ou conceitualmente,

Número de vetores geradores no espaço $\Leftrightarrow$ **Dimensão**

Imagens

Nosso contexto de dimensão

A partir do conceito de *"volume"*, *"área"*, *"comprimento"*,*etc* (medida) de Hausdorff.

Nosso contexto de dimensão

A partir do conceito de *"volume"*, *"área"*, *"comprimento"*,*etc* (medida) de Hausdorff.

$$\textit{Volume} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{Dimensão}$$

Exemplos:
Círculo (comprimento): $2\pi r^{\mathbf{1}}$
Quadrado (área): $L^{\mathbf{2}}$
Bola R^3(*volume*) : $\dfrac{4}{3}\pi r^{\mathbf{3}}$

Um bom conceito de dimensão...

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(i) $\dim(A)$ é bem definida para todo $A \subset \mathbb{R}^2$ (mais geralmente, subconjunto de $\mathbb{R}^d$).

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(i) $\dim(A)$ é bem definida para todo $A \subset \mathbb{R}^2$ (mais geralmente, subconjunto de $\mathbb{R}^d$).

(ii) $\dim(A) \leq \dim(B)$ se $A \subset B$

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(i) $\dim(A)$ é bem definida para todo $A \subset \mathbb{R}^2$ (mais geralmente, subconjunto de $\mathbb{R}^d$).

(ii) $\dim(A) \leq \dim(B)$ se $A \subset B$

(iii) $\dim(A \cup B) = max\{\dim(A), \dim(B)\}$

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(i) $\dim(A)$ é bem definida para todo $A \subset \mathbb{R}^2$ (mais geralmente, subconjunto de $\mathbb{R}^d$).

(ii) $\dim(A) \leq \dim(B)$ se $A \subset B$

(iii) $\dim(A \cup B) = max\{\dim(A), \dim(B)\}$

(iv) $\dim(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} dim(A_i)$

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(v) $\dim \omega(A) = \dim(A)$, onde ω é uma semelhança ou uma aplicação afim.

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(v) $\dim \omega(A) = \dim(A)$, onde ω é uma semelhança ou uma aplicação afim.

(vi) $\dim(A) = 0$ se A é um conjunto finito ou enumerável.

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(v) $\dim \omega(A) = \dim(A)$, onde ω é uma semelhança ou uma aplicação afim.

(vi) $\dim(A) = 0$ se A é um conjunto finito ou enumerável.

(vii) $\dim(A) = 2$ se A é um aberto de $\mathbb{R}^2$
(igualmente, $\dim(A) = d$ se A é um aberto do $\mathbb{R}^d$)

Um bom conceito de dimensão...

... deve satisfazer algumas propriedades:

(v) $\dim \omega(A) = \dim(A)$, onde ω é uma semelhança ou uma aplicação afim.

(vi) $\dim(A) = 0$ se A é um conjunto finito ou enumerável.

(vii) $\dim(A) = 2$ se A é um aberto de $\mathbb{R}^2$
(igualmente, $\dim(A) = d$ se A é um aberto do $\mathbb{R}^d$)

(viii) $\dim(A) = 1$ se A é uma curva diferenciável
$\dim(A) = 2$ se A é uma superfície diferenciável
$\dim(A) = d$ se A é uma variedade diferenciável de dimensão d

Alguns objetivos desse mini-curso:

1. Definir um conceito de dimensão para os conjuntos anteriores.

Alguns objetivos desse mini-curso:

1. Definir um conceito de dimensão para os conjuntos anteriores.
2. Entender como essa noção pode ser generalizada para Fractais.

Alguns objetivos desse mini-curso:

1. Definir um conceito de dimensão para os conjuntos anteriores.
2. Entender como essa noção pode ser generalizada para Fractais.

Outros problemas relacionados:

3. Mudança de Variáveis: Como entender rigosomente a mudança de variáveis de funções $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m > n$?

Alguns objetivos desse mini-curso:

Mudança de Variáveis:

Nós conhecemos um exemplo muito simples: o Teorema de Fubini pode ser considerado como uma mudanca de variáveis $z \in \mathbb{R}^{m+n} \to (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, onde $z = (x, y)$ e nós podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(z)d\lambda_{m+n}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)d\lambda_n(y) \Big) \lambda_m(x)$$

Alguns objetivos desse mini-curso:

Mudança de Variáveis:

Nós conhecemos um exemplo muito simples: o Teorema de Fubini pode ser considerado como uma mudanca de variáveis $z \in \mathbb{R}^{m+n} \to (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, onde $z = (x, y)$ e nós podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(z) d\lambda_{m+n}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) \Big) \lambda_m(x)$$

Evidentemente, não há problema quando a mudança de variável é feita para um produto cartesiano. Mas, para o caso de uma mudança de **coordenadas polares**?

Alguns objetivos desse mini-curso:

Mudança de Variáveis:

$x \in \mathbb{R}^d * \rightarrow (r, \sigma) \in R_+ \times S^{n-1}$

onde: $r \doteq |x|$ e $\sigma = \dfrac{x}{|x|}$

Alguns objetivos desse mini-curso:

Mudança de Variáveis:

$x \in \mathbb{R}^d * \to (r, \sigma) \in R_+ \times S^{n-1}$
onde: $r \doteq |x|$ e $\sigma = \dfrac{x}{|x|}$

Qual é o significa da expressão $d\sigma$?

Alguns objetivos desse mini-curso:

1. Dimensão e Medidas em referências abstratas: Dado um espaço métrico abstratamente (X, d) podemos refinir medidas ("volumes") e dimensão naturais para este espaço?

Programa do Curso (Tentativa)

Segunda-Feira: dimensão em Espaços *razoáveis*

(a) Medidas de Hausdorff

(b) Dimensão de Hausdorff

Programa do Curso (Tentativa)

Segunda-Feira: dimensão em Espaços *razoáveis*

(a) Medidas de Hausdorff

(b) Dimensão de Hausdorff

Terça-Feira: Fractais

(a) Exemplos

(b) Calculo das dimensões de certos fractais

Programa do Curso (Tentativa)

Quinta-Feira: Aplicações e Pesquisa

(a) Mudança de Variáveis
(b) Dimensão de Variedades
(c) Transporte Ótimo, Sistemas Dinâmicos, um resultado de Cédric Villani (opcional)

Programa do Curso (Tentativa)

Quinta-Feira: Aplicações e Pesquisa

(a) Mudança de Variáveis
(b) Dimensão de Variedades
(c) Transporte Ótimo, Sistemas Dinâmicos, um resultado de Cédric Villani (opcional)

Ao final de cada será exibido um trecho do filme *Dimension une promenade mathématique*

Medidas de Hausdorff

Contrução das Medidas de Hausdorff

Para fixar idéias pense na reta real $\mathbb{R}$, e considere $A \subset \mathbb{R}$

Contrução das Medidas de Hausdorff

Para fixar idéias pense na reta real $\mathbb{R}$, e considere $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu(A) = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| : A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} I_j, \text{ onde cada } I_j \text{ é intervalo aberto} \right\}$$

Contrução das Medidas de Hausdorff

Para fixar idéias pense na reta real $\mathbb{R}$, e considere $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu(A) = inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} |I_j| : A \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} I_j, \text{ onde cada } I_j \text{ é intervalo aberto} \right\}$$

Contrução das Medidas de Hausdorff

Caso R^d: Um calculo simples mostra que o volume de uma bola $d-$dimensional é dado por

$$vol(B_r(x)) = \alpha(d) r^d$$

onde $\alpha(d) = \dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

Contrução das Medidas de Hausdorff

Caso R^d: Um calculo simples mostra que o volume de uma bola $d-$dimensional é dado por

$$vol(B_r(x)) = \alpha(d)r^d$$

onde $\alpha(d) = \dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

Logo, uma maneira "natural" de definir uma medida d-dimensional para o espaço R^n é calcular, para $A \subset R^d$,

$$\mu^d(A) = \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(d) r_k^d \ : \ A \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} B_{r_k}(x_k) \right\}$$

Contrução das Medidas de Hausdorff

$$\mu^d(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r_k^d : A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} B_{r_k}(x_k) \text{ e } r_k \leq \epsilon \right\}$$

Contrução das Medidas de Hausdorff

$$\mu^d(A) = \liminf_{\epsilon \to 0} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r_k^d \; : \; A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} B_{r_k}(x_k) \text{ e } r_k \leq \epsilon \right\}$$

Problemas:

1. Se tomarmos essa expressão como definição de uma medida de Hausdorff, ela não será **invariante por restrição**.

Contrução das Medidas de Hausdorff

$$\mu^d(A) = \liminf_{\epsilon \to 0} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r_k^d \, : \, A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} B_{r_k}(x_k) \text{ e } r_k \leq \epsilon \right\}$$

Problemas:

1. Se tomarmos essa expressão como definição de uma medida de Hausdorff, ela não será **invariante por restrição**.
2. Limite Existe ???

Contrução das Medidas de Hausdorff

Definition (Medidas de Hausdorff)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}_+$. Definimos a Medida de Hausdorff d-dimensional por

$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r(C_k)^d \ : \ A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} C_k \ e \ diam(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

no qual, C_k são subconjuntos arbitrarios do $\mathbb{R}^n$,
$r(C_k) = diam(C_k)/2$ e $\alpha(d) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

Contrução das Medidas de Hausdorff

$$\mathcal{H}^d(A) \doteq \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r(C_k)^d \; : \; A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} C_k \text{ e } diam(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

Observações

(a) Observe que a função $\mathcal{H}^d : A \in P(R) \to \mathcal{H}^d(A) \in [0, \infty]$, conforme colocada anteriormente, está bem definida.

Contrução das Medidas de Hausdorff

$$\mathcal{H}^d(A) \doteq \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r(C_k)^d \, : \, A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} C_k \text{ e } diam(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

Observações

(a) Observe que a função $\mathcal{H}^d : A \in P(R) \to \mathcal{H}^d(A) \in [0, \infty]$, conforme colocada anteriormente, está bem definida.

De fato, coloquemos

$$\mathcal{H}^d_\epsilon(A) \doteq \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(d) r(C_k)^d \, : \, A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} C_k \text{ e } diam(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

Contrução das Medidas de Hausdorff

$$\mathcal{H}^d(A) \doteq \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(d) r(C_k)^d \,:\, A \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} C_k \text{ e } diam(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

Observações

(a) Observe que a função $\mathcal{H}^d : A \in P(R) \to \mathcal{H}^d(A) \in [0, \infty]$, conforme colocada anteriormente, está bem definida.

De fato, coloquemos

$$\mathcal{H}^d_\epsilon(A) \doteq \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(d) r(C_k)^d \,:\, A \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} C_k \text{ e } diam(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

$\mathcal{H}^d_\epsilon(A)$ é descrescente e limitada inferiormente (pelo 0), logo o limite existe (e coincide com o supremo).

(b) É um bom exercicio verificar que a definição de Medidas de Hausdorff é imutável se impusermos que os subconjuntos C_k sejam abertos (resp. fechados).

mas, sobretudo,

(c) *(Generalização para espaços métricos)* É imediato verificar que a definição dada anteriormente pode ser facilmente generalizada para um espaço métrico qualquer. .

Proposition (medida de Hausdorff é uma medida de Borel)

Para todo d $\in \mathbb{R}_+$, *a aplicação* $\mathcal{H}^d$ *é uma medida exterior sobre* $\mathbb{R}^n$, *e define uma medida sobre a* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{B}(R^n)$ *(subconjuntos borelianos de* $\mathbb{R}^n$*).*

EXEMPLOS

(i) $\mathcal{H}^0$ é a medida da contagem.

EXEMPLOS

(i) $\mathcal{H}^0$ é a medida da contagem.

(ii) Sobre o conjunto dos numeros reais, $\mathcal{H}^1$ é a medida de Lebesgue (isto é, em intervalos é o comprimento).

EXEMPLOS

(i) $\mathcal{H}^0$ é a medida da contagem.

(ii) Sobre o conjunto dos numeros reais, $\mathcal{H}^1$ é a medida de Lebesgue (isto é, em intervalos é o comprimento).

(iii) Em $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}^1$, é a medida de Lebesgue de um segmento de reta.

EXEMPLOS

(i) $\mathcal{H}^0$ é a medida da contagem.

(ii) Sobre o conjunto dos numeros reais, $\mathcal{H}^1$ é a medida de Lebesgue (isto é, em intervalos é o comprimento).

(iii) Em $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}^1$, é a medida de Lebesgue de um segmento de reta.

(iv) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é Lipchitz, então $\mathcal{H}^d[f(A)] \leq k^d \mathcal{H}^d[A]$, para todo conjunto boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$.

EXEMPLOS

(i) $\mathcal{H}^0$ é a medida da contagem.

(ii) Sobre o conjunto dos numeros reais, $\mathcal{H}^1$ é a medida de Lebesgue (isto é, em intervalos é o comprimento).

(iii) Em $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}^1$, é a medida de Lebesgue de um segmento de reta.

(iv) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é Lipchitz, então $\mathcal{H}^d[f(A)] \leq k^d \mathcal{H}^d[A]$, para todo conjunto boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$.

(v) Pode-se mostrar que se $I = [x, y]$ é uma segmento de reta em R^2 (não reduzido a um ponto), então $[H]^1 = |x - y|$, se $d = 1$, $[H]^1 = 0$, se $d < 1$; $[H]^1$ é não finito, se $d > 1$.

Propriedade Fundamental

Proposition

Seja $[0,1[^n \subset \mathbb{R}^n$. *Então* $\mathcal{H}^d([0,1[^n)$ *é não finito, se* $d > n$*; finito se* $d = n$*; e* $\mathcal{H}^d([0,1[^n) = 0$*, se* $d < n$*. Em particular,*

1. *se* $d < n$*, então* $\mathcal{H}^d[\Omega] = \infty$*, para todo aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*.*
2. *se* $d > n$*, então* $\mathcal{H}^d$ *é identicamente nula.*

Dimensão

Proposition

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, então

(i) *Se $\mathcal{H}^d[A] < \infty$ para um certo $d \geq 0$, então $\mathcal{H}^{d_1}[A] = 0$ para todo $d_1 > d$;*

Proposition

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, então

(i) *Se $\mathcal{H}^d[A] < \infty$ para um certo $d \geq 0$, então $\mathcal{H}^{d_1}[A] = 0$ para todo $d_1 > d$;*

(ii) *Se $\mathcal{H}^d[A] > 0$ para um certo $d \leq 0$, então $\mathcal{H}^{d_2}[A] = \infty$ para todo $d_2 < d$;*

Ao menos uma dimensão dá uma medida não trivial!

Proposition

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, então

(i) *Se $\mathcal{H}^d[A] < \infty$ para um certo $d \geq 0$, então $\mathcal{H}^{d_1}[A] = 0$ para todo $d_1 > d$;*

(ii) *Se $\mathcal{H}^d[A] > 0$ para um certo $d \leq 0$, então $\mathcal{H}^{d_2}[A] = \infty$ para todo $d_2 < d$;*

(iii) *para todo $d > n$, temos $\mathcal{H}^d[A] = 0$.*

Proposition

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, então

(i) *Se $\mathcal{H}^d[A] < \infty$ para um certo $d \geq 0$, então $\mathcal{H}^{d_1}[A] = 0$ para todo $d_1 > d$;*

(ii) *Se $\mathcal{H}^d[A] > 0$ para um certo $d \leq 0$, então $\mathcal{H}^{d_2}[A] = \infty$ para todo $d_2 < d$;*

(iii) *para todo $d > n$, temos $\mathcal{H}^d[A] = 0$.*

Dito de outro modo: Existe um d_0 real tal que a função $d \to \mathcal{H}^d[A]$ vale ∞ quando d é estritamente menos que d_0 e, é nula quando é maior que d_0.

Dimensão de Hausdorff

Definition (Dimensão de Hausdorff)

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. A dimensão de Hausdorff de A - denotada por $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ *- é definida por*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \doteq inf\{d; \quad \mathcal{H}^d(A) = 0\} \in [0, n]$$

Dimensão de Hausdorff

Definition (Dimensão de Hausdorff)

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. A dimensão de Hausdorff de A - denotada por $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ *- é definida por*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \doteq inf\{d; \quad \mathcal{H}^d(A) = 0\} \in [0, n]$$

De maneira equivalente: $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ é o único d_0 tal que $\mathcal{H}^d(A) = \infty$, para todo $d < d_0$, e $\mathcal{H}^d(A) = 0$, para todo $d > d_0$.