

Processos de Markov com Aplicações

Inés Armendáriz, Universidad de San Andrés
Pablo Groisman, Universidad de Buenos Aires

Obs.: O curso poderá ser ministrado em inglês ou português conforme os professores e alunos decidirem no início do curso.

Markov processes are a class of stochastic processes characterized by a "memoryless" property: the future state of the process, given the whole history of the process, depends only on the present state. In other words, the present contains enough information to make any prediction about the future. This rule makes Markov processes particularly attractive from an analytical viewpoint, and they are nowadays a fundamental tool in probability theory.

On the other hand, in spite of the obvious simplification introduced by the Markov property, they have shown to be versatile enough to model several phenomena arising in the physical sciences. Even in the case of more complicated problems, they often provide a useful first approximation.

In this minicourse we will introduce the basic concepts of Markov processes in finite and countable state spaces, evolving in discrete and continuous time. We will describe methods of construction of a process and describe its asymptotic behavior and ergodic properties. Next, we will turn to applications. We will focus on two of them,

1. Queuing theory

We are all familiar with queues, we are faced with them in our everyday life: stores, banks, classrooms, computer labs, etc. Problems related to queues arise naturally in telecommunications, traffic engineering, computing, and the design of factories, shops, offices and hospitals to mention some of them. The most natural way to model a queuing system or network is the use of Markov processes to represent the arrivals to the system and the service time for each job. We will see how to do that and we will find conditions that guarantee that the queues are stable or unstable. If the number of customers is assumed unbounded, this amounts to studying whether the number of customers waiting to be served at any time may or may not explode.

2. Epidemiology

Markov process are very useful to model the size of an epidemic or an infection, and also in the description of several growth models. In these models we are interested in studying the size of a population for large times, conditioned on non-extinction. This will lead us to the study of quasi-stationary distributions, which describe the distribution of the process at infinite time conditioned on its survival for all t . Simulating this distribution is non-trivial

since it is obtained by conditioning on an event of null probability. We will see some methods to simulate this distribution.

Processos de Markov são uma classe de processos estocásticos caracterizados pela propriedade de Markov de "perda de memória": o estado futuro do processo, dado todo seu histórico, depende somente do presente. Em outras palavras, o momento presente contém informação suficiente para que se possa prever o estado futuro. Essa propriedade torna os processos de Markov particularmente interessantes do ponto de vista analítico, e atualmente são uma ferramenta fundamental na teoria da probabilidade.

Por outro lado, apesar da simplificação introduzida pela propriedade de Markov, estes processos se mostraram muito versáteis na modelagem de vários fenômenos originários das ciências físicas. Mesmo no caso de problemas mais complexos os processos de Markov fornecem uma primeira abordagem.

Neste minicurso introduziremos os conceitos básicos de processos de Markov em espaços de estado finitos e infinitos enumeráveis, evoluindo em tempo discreto e contínuo. Descreveremos métodos de construção de um processo, seu comportamento assintótico e propriedades ergódicas. A seguir veremos aplicações, focando principalmente em:

1. Teoria das filas

Todos nós conhecemos filas, elas fazem parte do nosso dia-a-dia: lojas, bancos, salas de aula, etc. Problemas relacionados a filas surgem naturalmente em telecomunicação, engenharia de tráfego, computação, planejamento de fábricas, lojas, escritórios e hospitais para mencionar alguns casos. O modo mais natural de modelar um sistema de filas ou rede é usar os processos de Markov para representar as entradas do sistema e o tempo de serviço para cada trabalho. Veremos como fazer isso e definiremos condições para saber se uma fila é estável ou não, por exemplo, se admitirmos que o número de clientes é ilimitado, poderemos analisar se o número de clientes aguardando na fila poderá ser infinito ou não.

2. Epidemiologia

Processos de Markov são muito úteis na modelagem das proporções de uma epidemia ou infecção, e também na descrição de vários modelos de crescimento. Nestes modelos estamos interessados em estudar o tamanho de uma população a longo prazo, sob a condição de não-extinção. Isso nos leva ao estudo de distribuições quase-estacionárias, que descrevem a distribuição assintótica do processo sob a condição de não-extinção para todo tempo t . Simular esta distribuição não é trivial, pois ela é obtida condicionando-se à um evento de probabilidade nula. Veremos alguns métodos de como simular desta distribuição.