

MAC315 / MAC5790 / MAP5915 – Otimização Linear

Exercício-programa: Implementação da Fase 2 do Método Simplex

Nesse exercício-programa, consideraremos um problema de programação linear no formato padrão:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c'x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Usando a linguagem Octave¹, você deverá implementar as três versões da fase 2 do método simplex (simplex ingenuo, revisado e tableau) para resolver esse tipo de problema. Vamos supor que o problema possua ao menos uma solução viável básica e que não haja soluções viáveis básicas degeneradas. O seu programa deve ter três funções referentes ao simplex ingenuo, revisado e tableau, respectivamente, com as seguintes assinaturas:

- (1) `[ind v] = simplex_ing(A,b,c,m,n,x,indB)`
- (2) `[ind v] = simplex_res(A,b,c,m,n,x,indB,Binv)`
- (3) `[ind v] = simplex_tab(indB,tableau)`

Ou seja, a função (1) deve receber como parâmetros a matriz A , os vetores b e c , o número de restrições m , o número de variáveis n do problema e uma solução viável básica x , os índices das variáveis na base $indB$, nessa ordem. A função (2), além disso, deve receber a inversa da base $Binv$. Finalmente, a função (3) deve receber os índices das variáveis na base $indB$ e o tableau inicial *tableau*

Essa função deve ainda devolver na variável `ind` um indicador a respeito da existência de soluções para o problema. Mais especificamente, a variável `ind` deve armazenar o valor -1 se o problema for ilimitado ou 0 se o problema tiver uma solução ótima.

No caso do problema possuir uma solução ótima, a solução obtida pelo método simplex (um vetor n -dimensional) deve ser armazenada e devolvida na variável `v`. Em caso contrário, a direção ao longo da qual o valor da função objetivo vai para $-\infty$ deve ser devolvida em `v`. Obedeça a ordem das variáveis. Note que você pode implementar diversas funções auxiliares, mas o seu programa deve ter necessariamente a função especificada acima.

A cada iteração do método simplex ingenuo, o seu programa deverá imprimir:

1. os índices das variáveis básicas e os respectivos valores das variáveis básicas;
2. o vetor p solução do sistema linear $p'B = c'_B$;

¹<http://www.gnu.org/software/octave/>

3. os índices e os custos reduzidos $\bar{c}_j = c_j - p' A_j$ das variáveis não básicas (que tenham sido calculados);
4. o índice j da variável que entra na base;
5. os índices das variáveis que estavam na base e os respectivos valores das componentes do vetor de direção u encontrado solucionando o sistema linear $Bu = A_j$;
6. o valor de θ^* ;
7. o índice da variável que sai da base.

A cada iteração do método simplex revisado, o seu programa deverá imprimir:

1. os índices das variáveis básicas e os respectivos valores das variáveis básicas $x_B = B^{-1}b$;
2. A matriz B^{-1} ;
3. o vetor p tal que $p' = c'_B B^{-1}$;
4. os índices e os custos reduzidos $\bar{c}_j = c_j - p' A_j$ das variáveis não básicas (que tenham sido calculados);
5. o índice j da variável que entra na base;
6. os índices das variáveis que estavam na base e os respectivos valores das componentes do vetor de direção $u = B^{-1}A_j$;
7. o valor de θ^* ;
8. o índice da variável que sai da base.

A cada iteração do método simplex tableau, o seu programa deverá imprimir:

1. tableau completo da iteração;
2. o índice da variável que entra na base;
3. o valor de θ^* ;
4. o índice da variável que sai da base.

Quando o método terminar, o seu programa deve imprimir uma mensagem indicando se uma solução ótima foi encontrada ou se o problema é ilimitado. No primeiro caso, seu programa deve exibir a solução encontrada. No segundo caso, ele deve imprimir a direção ao longo da qual o custo vai para $-\infty$.

Segue um exemplo de como poderiam ser as saídas para o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

com a solução básica viável inicial $x'_0 = (0, 0, 2, 6)$.

Para o simplex ingenuo:

Simplex: Fase 2

Iterando 0

3 2.000000

4 6.000000

Vetor p:

0

0

Custos Reduzidos Calculados

1 -2.000000

Entra na base : 1

Direção

3 1.000000

4 1.000000

Theta*

2.000000

Sai da base: 3

Iterando 1

1 2.000000

4 4.000000

Vetor p:

-2

0

Custos Reduzidos Calculados

2 -3.000000

Entra na base : 2

Direção

1 -1.000000

4 2.000000

Theta*

2.000000

Sai da base: 4

Iterando 2

1 4.000000

2 2.000000

Vetor p:

-0.5000

-1.5000

Custos Reduzidos Calculados

3 0.500000

4 1.500000

Solução ótima encontrada com custo -10.000000

1 4.000000

2 2.000000

3 0.000000

4 0.000000

Para o simplex revisado:

Simplex: Fase 2

Iterando 0

3 2.000000

4 6.000000

Matriz inversa da base:

1 0

0 1

Vetor p:

0
0

Custos Reduzidos Calculados

1 -2.000000

Entra na base : 1

Direção

3 1.000000

4 1.000000

Theta*

2.000000

Sai da base: 3

Iterando 1

1 2.000000

4 4.000000

Matriz inversa da base:

1 0
-1 1

Vetor p:

-2
0

Custos Reduzidos Calculados

2 -3.000000

Entra na base : 2

Direção

1 -1.000000

4 2.000000

Theta*

2.000000

Sai da base: 4

Iterando 2

1 4.000000

2 2.000000

Matriz inversa da base:

0.5000 0.5000

-0.5000 0.5000

Vetor p:

-0.5000

-1.5000

Custos Reduzidos Calculados

3 0.500000

4 1.500000

Solução ótima encontrada com custo -10.000000

1 4.000000

2 2.000000

3 0.000000

4 0.000000

Para o simplex tableau:

Simplex: Fase 2

Iterando 0

tableau:

0 | -2 -1 0 0

2 | 1 -1 1 0

6 | 1 1 0 1

Entra na base : 1

Theta*

2.000000

Sai da base: 3

Iterando 1

tableau:

```

4 | 0 -3 2 0
-----
2 | 1 -1 1 0
4 | 0 2 -1 1

```

Entra na base : 2

Theta*
2.000000

Sai da base: 4

Iterando 2

```

tableau:
10.0000 |      0      0  0.5000  1.5000
-----
 4.0000 |  1.0000      0  0.5000  0.5000
 2.0000 |      0  1.0000 -0.5000  0.5000

```

Solução ótima encontrada com custo -10.000000

```

1 4.000000
2 2.000000
3 0.000000
4 0.000000

```

Relatório

Você também deve fazer um relatório onde descreverá o método implementado e as principais partes do seu programa. Você deverá incluir exemplos que mostram o funcionamento do seu programa para os dois casos possíveis: o problema tem solução ótima ou é ilimitado. Nestes exemplos, você deverá acompanhar algumas iterações do método implementado e explicar o que acontece em cada uma das iterações.

Avaliação

O seu trabalho será avaliado levando-se em consideração a corretude do seu programa, bem como a qualidade do código-fonte e do relatório. O relatório será responsável por 70% da nota do trabalho.

Entrega

O exercício-programa deve ser feito individualmente e deve ser submetido através da página da disciplina no [eDisciplinas](#). A data limite para a entrega está na [página da disciplina](#) e

corresponde à data do EP1. Você deve submeter um arquivo compactado e que contenha a sua implementação em Octave do método simplex e o seu relatório.