MAC300 / MAC6920 / MAP5904 - Métodos Numéricos de Álgebra Linear

Lista de exercícios

EXERCÍCIO 1:

A forma *outer product* da decomposição de Cholesky deduz-se considerando o seguinte particionamento das matrizes A e G na igualdade $A = GG^T$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & \hat{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ h & \hat{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & h^T \\ 0 & \hat{G}^T \end{bmatrix}$$

(a) Explique como se calculam g_{11}, h e $\hat{G}$ (e portanto G).

(b) Escreva um algoritmo não recursivo que implemente o procedimento descrito no item a). **O algoritmo deve explorar a simetria da matriz A utilizando só a diagonal e a parte triangular inferior de A e deve guardar G em A.**

(c) Calcule (precisa calcular e não só mencionar) a número de *flops* do algoritmo do item b). **Define-se *flop* como a união de três operações: um produto, uma adição e uma atribuição.**

EXERCÍCIO 2:

Considere o sistema linear $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular inferior.

(a) **Mostre o particionamento de A, b e x** a partir do qual é possível deduzir um algoritmo orientado a coluna para achar x. Mencione brevemente os passos do algoritmo.

(b) Implemente em C ou em alguma pseudo-linguagem razoável o algoritmo sugerido na parte (a). A sua implementação deve devolver x no proprio b e não deve usar nenhum vetor auxiliar.

(c) Conte o número de *flops* que seu algoritmo executa. (Definimos *flop* como uma operação composta por uma soma, um produto e uma atribuição.) **Você deve calcular o *número* de *flops* e não apenas a sua ordem de grandeça.**

Observações: O item (b) terá valor apenas se o item (a) estiver correto e o item (c) terá valor apenas se o item (b) estiver correto.

EXERCÍCIO 3:

(a) Prove que se $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não-singular e triangular superior então V^{-1} também é triangular superior.

(b) Prove que se $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não-singular e triangular superior com 1's na diagonal então V^{-1} também é triangular superior com 1's na diagonal.

EXERCÍCIO 4:

a) **Deduza a partir do particionamento adequado** da equação $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior, uma implementação orientada a linha do método de substituição para frente para resolver sistemas lineares triangulares inferiores.

b) Escreva uma rotina não recursiva orientada a linha que implemente o método de substituição para frente deduzido na parte a). A rotina deve receber como entrada uma matriz triangular inferior A e um vetor b, resolver o sistema triangular $Ax = b$ e devolver a solução no próprio vetor b sem utilizar nenhum tipo de memória auxiliar.

c) Conte o número de *flops* da rotina desenvolvida em b). Define-se *flop* como um produto e uma adição.

EXERCÍCIO 5:

(a) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, considere $\|A\| = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. $\|\cdot\|$ é uma norma de matriz? Prove ou dê um contra-exemplo.

(b) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz definida positiva. Considere a norma de vetor $\|\cdot\|_A$ definida como $\|x\|_A = x^T A x$. Prove que isso é de fato uma norma.

EXERCÍCIO 6:

As p-normas induzidas de matrizes definem-se como

$$\|A\|_p = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Mostre que $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

EXERCÍCIO 7:

Ao estudar sensibilidade de sistemas lineares, deseja-se comparar a solução x do sistema linear $Ax = b$ com a solução $x+\delta x$ de um sistema perturbado da forma $(A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b$. Especificamente, deseja-se encontrar um limitante superior para $\|\delta x\|/\|x\|$ em função de $\|\delta b\|/\|b\|$ e $\|\delta A\|/\|A\|$.

Para que tudo isso esteja bem definido, é suficiente supor que $b \neq 0$ e que A e $A + \delta A$ são não-singulares. Mas impor uma condição em $A + \delta A$ faz pouco sentido já que δA não é um dado do problema original. O que sim faz sentido, é impor alguma condição em $\|\delta A\|/\|A\|$, que representa o erro relativo que pode ser cometido em A.

Mostre que, se A é não-singular e $\|\delta A\|/\|A\| < 1/k(A)$ então $A + \delta A$ é não-singular.

EXERCÍCIO 8:

(a) Sejam x e $y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, e seja $Q = I - \left(\frac{2}{\|u\|_2^2}\right) uu^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $Qx = y$. Mostre que u é múltiplo de $x - y$ (quer dizer, que u pode ser escrito como $u = c\ (x - y)$ para algum escalar $c \in \mathbb{R}$.).

(b) Seja $q_1, q_2, \ldots, q_k$ un conjunto ortonormal de vetores, quer dizer, $\|q_i\|_2 = 1$ para todo i e $\langle q_i, q_j\rangle = 0$ sempre que $i \neq j$. Mostre que os vetores $q_1, q_2, \ldots, q_k$ são linearmente independentes.

EXERCÍCIO 9:

Considere o sistema sobredeterminado $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e posto$(A) < n$.

(a) Descreva as características das matrizes Q e R da decomposição QR de A adequada para achar a solução de quadrados mínimos de $Ax = b$.

(b) Suponha que a decomposição $A = QR$ do item (a) já foi calculada. Descreva passo a passo como ela deve ser usada para achar a solução de quadrados mínimos de $Ax = b$.

EXERCÍCIO 10:

Sejam $v_1, \ldots, v_k$ autovetores da matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Mostre que se os autovalores são todos diferentes então os autovetores são linearmente independentes.

EXERCÍCIO 11:

(a) Descreva brevemente o método da potência.

(b) Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplique o método da potência começando de $q_0 = (a, b)^T$ com $a \neq b$. O que acontece?

(c) Justifique aquilo que observou em (b).

EXERCÍCIO 12:

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitiana[1]. Mostre que todos seus autovalores são reais.

Dica: Mostre primeiro que, dado $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ qualquer, o quociente de Rayleigh $\rho = x^* Ax/(x^* x)$ tem numerador e denominador reais e, portanto, ρ é real.

[1]Hermitiana quer dizer que $A^* = A$. O elemento na posição (i, j) de A^* é dado por $\overline{a_{ij}}$, quer dizer, pelo conjugado do elemento na posição (j, i) de A. Relembre que se um número complexo z é da forma $z = a + bi$ então o seu conjugado $\overline{z}$ é da forma $\overline{z} = a - bi$.