Desafio 1 - MAC0210

Felipe Silva Felix - 8941092

October 26, 2016

1 Demonstração do erro para a extrapolação de Richardson

Dada f uma função *suficientemente suave*, queremos encontrar uma aproximação para $f^{''}(x_0)$. Para tal, tomaremos a expansão de Taylor para os seguintes valores: $f(x_0+h), f(x_0-h), f(x_0+2h), f(x_0-2h)$. Temos então:

$$f(x_0+h) = f(x_0)+hf^{'}(x_0)+\frac{h^2}{2}f^{''}(x_0)+\frac{h^3}{6}f^{'''}(x_0)+\frac{h^4}{24}f^{(iv)}(x_0)+\frac{h^5}{120}f^{(v)}(x_0)+\frac{h^6}{720}f^{(vi)}(\xi_1). \quad (1)$$

com $\xi_1 \in [x_0, x_0+h]$.

$$f(x_0-h) = f(x_0)-hf^{'}(x_0)+\frac{h^2}{2}f^{''}(x_0)-\frac{h^3}{6}f^{'''}(x_0)+\frac{h^4}{24}f^{(iv)}(x_0)-\frac{h^5}{120}f^{(v)}(x_0)+\frac{h^6}{720}f^{(vi)}(\xi_2), \quad (2)$$

com $\xi_2 \in [x_0-h, x_0]$.

Somando (1) e (2) vemos que os termos com constante na forma $\frac{h^k}{k!}$ com k ímpar se cancelam, então isolamos $f^{''}(x_0)$, e chegamos no seguinte:

$$f^{''}(x_0) = \frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(iv)}(x_0) + \frac{h^4}{720}[f^{(vi)}(\xi_1)+f^{(vi)}(\xi_2)], \quad (3)$$

com $\xi_1 \in [x_0, x_0+h], \xi_2 \in [x_0-h, x_0]$.

Analogamente, somando as expansões de Taylor nos pontos $f(x_0+2h), f(x_0-2h)$, e isolando $f^{''}(x_0)$ chegamos ao seguinte:

$$f^{''}(x_0) = \frac{f(x_0-2h)-2f(x_0)+f(x_0+2h)}{4h^2} - \frac{4h^2}{12}f^{(iv)}(x_0) + \frac{16h^4}{720}[f^{(vi)}(\xi_3)+f^{(vi)}(\xi_4)], \quad (4)$$

com $\xi_3 \in [x_0, x_0+2h], \xi_4 \in [x_0-2h, x_0]$.

Agora, multiplicamos a equação (3) por 4 e lhe subtraímos a equação (4) para cancelarmos o termo $f^{(iv)}(x_0)$, então isolamos $f^{''}(x_0)$:

$$\begin{aligned} 4f^{''}(x_0) - f^{''}(x_0) = 3f^{''}(x_0) = &\frac{4f(x_0-h)-8f(x_0)+4f(x_0+h)}{h^2} - \left[\frac{f(x_0-2h)-2f(x_0)+f(x_0+2h)}{4h^2}\right] \\ &+\frac{h^4}{720}\left[16(f^{(vi)}(\xi_3)+f^{(vi)}(\xi_4)) - 4(f^{(vi)}(\xi_1)+f^{(vi)}(\xi_2))\right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f^{''}(x_0) = &\frac{4f(x_0-h)-8f(x_0)+4f(x_0+h)}{3h^2} - \left[\frac{f(x_0-2h)-2f(x_0)+f(x_0+2h)}{12h^2}\right] \\ &+\frac{h^4}{720}\left[\frac{16}{3}(f^{(vi)}(\xi_3)+f^{(vi)}(\xi_4)) - \frac{4}{3}(f^{(vi)}(\xi_1)+f^{(vi)}(\xi_2))\right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$f''(x_0) = \frac{16f(x_0-h) - 32f(x_0) + 16f(x_0+h) - f(x_0-2h) + 2f(x_0) - f(x_0+2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{720}\left[\frac{16}{3}(f^{(vi)}(\xi_3) + f^{(vi)}(\xi_4)) - \frac{4}{3}(f^{(vi)}(\xi_1) + f^{(vi)}(\xi_2))\right] \tag{7}$$

Então, chegamos a seguinte fórmula para $f''(x_0)$:

$$\begin{aligned} f''(x_0) = \frac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h) + 16f(x_0-h) - 30f(x_0) + 16f(x_0+h) - f(x_0+2h)] \\ + \frac{h^4}{720}\left[\frac{16}{3}(f^{(vi)}(\xi_3) + f^{(vi)}(\xi_4)) - \frac{4}{3}(f^{(vi)}(\xi_1) + f^{(vi)}(\xi_2))\right] \\ \xi_1 \in [x_0, x_0+h], \xi_2 \in [x_0-h, x_0], \\ \xi_3 \in [x_0, x_0+2h], \xi_4 \in [x_0-2h, x_0]. \end{aligned} \tag{8}$$

Definimos o erro $e(h)$ da seguinte forma:

$$e(h) = \frac{h^4}{180}\left[\frac{4}{3}(f^{(vi)}(\xi_3) + f^{(vi)}(\xi_4)) - \frac{1}{3}(f^{(vi)}(\xi_1) + f^{(vi)}(\xi_2))\right]. \tag{9}$$

Porém, desejamos obter um erro na forma: $e(h) = ch^4 f^{(vi)}(\xi)$, $c \in \Re$ uma constante. Para tal, suporemos que $f^{(vii)}$ exista e além disso que ela seja contínua, diferenciável e limitada em $\Re$. Então, utilizaremos o teorema de Taylor para escrever $f^{(vi)}$ avaliada em $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ em função de $f^{(vi)}(\xi)$, $\xi \in [x_0-2h, x_0+2h]$.

Teremos o seguinte:

$$f^{(vi)}(\xi_1) = f^{(vi)}(\xi) + f^{(vii)}(\xi_1')(\xi_1 - \xi), \xi_1' \in [x_0-2h, x_0+2h]. \tag{10}$$

$$f^{(vi)}(\xi_2) = f^{(vi)}(\xi) + f^{(vii)}(\xi_2')(\xi_2 - \xi), \xi_2' \in [x_0-2h, x_0+2h]. \tag{11}$$

$$f^{(vi)}(\xi_3) = f^{(vi)}(\xi) + f^{(vii)}(\xi_3')(\xi_3 - \xi), \xi_3' \in [x_0-2h, x_0+2h]. \tag{12}$$

$$f^{(vi)}(\xi_4) = f^{(vi)}(\xi) + f^{(vii)}(\xi_4')(\xi_4 - \xi), \xi_4' \in [x_0-2h, x_0+2h]. \tag{13}$$

É fácil ver que $f^{(vii)}(\xi_i')(\xi_i - \xi)$, $i = 1, 2, 3, 4$, é $\mathcal{O}(h)$. Então $e(h)$ ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e(h) &= \frac{h^4}{180}\left[\frac{4}{3}(2f^{(vi)}(\xi)) - \frac{1}{3}(2f^{(vi)}(\xi)) + \mathcal{O}(h)\right] \\ e(h) &= \frac{h^4}{180}\left[\frac{8}{3}(f^{(vi)}(\xi)) - \frac{2}{3}(f^{(vi)}(\xi)) + \mathcal{O}(h)\right] \\ e(h) &= \frac{h^4}{180}\left[\frac{6}{3}(f^{(vi)}(\xi)) + \mathcal{O}(h)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

O que nos levará ao $e(h)$ desejado:

$$e(h) = \frac{h^4}{90} f^{(vi)}(\xi) + \mathcal{O}(h^5), \xi \in [x_0-2h, x_0+2h] \tag{15}$$