MAT 461 – Tópicos de Matemática II
Lista 5: Precificação de Opções, Fórmula de Black-Scholes

Edson de Faria

10 de Novembro de 2013

1. Seja C o preço de uma opção de compra (*call*) de 1 ação da companhia ACME com preço de exercício K e tempo de exercício $t > 0$. Seja P o preço de uma opção de venda (*put*) de 1 ação dessa mesma companhia, com o mesmo preço de exercício K e o mesmo tempo de exercício t. Suponha que o preço da ação da ACME hoje ($t = 0$) é S e que a taxa nominal de juros (compostos continuamente) é r.

(a) Mostre que, se $S+P-C < Ke^{-rt}$, então a estratégia que consiste em, simultaneamente, comprar uma ação da ACME, comprar uma opção de venda e vender uma opção de compra sempre resulta em lucro.

(b) Mostre que, se $S + P - C > Ke^{-rt}$, então existe uma estratégia semelhante à do item (a) que também sempre resulta em lucro.

(c) Deduza que, se *não* há oportunidade de arbitragem, então $S + P - C = Ke^{-rt}$. Esta igualdade é conhecida como *fórmula da paridade entre calls e puts*.

2. *Contratos futuros*. Num contrato futuro, uma das partes se compromete, no instante 0, a pagar uma quantia F num instante futuro $t > 0$ por uma mercadoria cujo preço hoje é S, enquanto a outra parte se compromete a entregar a mercadoria no instante t. Utilize o princípio da não-arbitragem para mostrar que o preço justo do contrato é $F = Se^{rt}$, onde r é a taxa de juros

3. Suponha que o preço S_t no instante $t \geq 0$ de um certo ativo de risco segue um movimento Browniano geométrico com *tendência* $\mu = 0.01$ e *volatilidade* $\sigma = 0.4$. Se o preço inicial do ativo é $S_0 = 100$, calcule:

(a) $\mathbb{E}\,[S_t]$;

(b) $\mathbb{P}\,[S_{10} > 100]$;

(c) $\mathbb{P}\,[S_{10} < 110]$.

4. O preço de um certo ativo de risco segue um movimento Browniano geométrico com parâmetros (anuais) de tendência $\mu = 0.06$ e de volatilidade $\sigma = 0.3$. Qual é a probabilidade de que o preço desse ativo daqui a 6 meses seja inferior a 90% do seu preço hoje?

5. Novamente suponha que o preço de um certo ativo de risco segue um movimento Browniano geométrico com parâmetros anuais $\mu = 0.12$ e $\sigma = 0.24$, e que seu preço hoje é $S_0 = 40$ reais. Qual é a probabilidade de que uma opção de compra com tempo de exercício igual a 4 meses e preço de exercício $K = 42$ reais será exercida?

6. Determine o preço de não-arbitragem de uma opção de *venda*, com preço de exercício de R$ 100,00 e tempo de exercício de 6 meses, sobre um ativo de risco cujo preço hoje é R$ 105,00, sabendo que a taxa nominal de juros é de 10% a.a. e que a volatilidade do ativo é $0,3$.

7. Seja C o preço de não-arbitragem de uma opção de compra com preço de exercício K e tempo de exercício $T > 0$, sobre um ativo de risco cujo preço em $t = 0$ é S. Sendo r a taxa nominal de juros, prove que

(a) $C \geq \left(S - e^{-rT}K\right)^+$;

(b) $C \leq S$.

8. Como vimos em aula, o preço de não-arbitragem de uma opção de compra com preço de exercício K e tempo de exercício $t > 0$, sobre um ativo de risco com volatilidade σ, cujo preço em $t = 0$ é S, é dado pela fórmula de Black-Scholes:

$$C(t, S, K, \sigma, r) \;=\; S\Phi(\omega) - Ke^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) \;,$$

onde r e a taxa de juros, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2}\, d\xi$ é a distribuição acumulada da normal padrão, e

$$\omega \;=\; \frac{rt + \frac{1}{2}\sigma^2 t - \ln\left(\frac{K}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} \;.$$

Mostre que:

(a) $\dfrac{\partial C}{\partial S} = \Phi(\omega)$;

(b) $\dfrac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t})$;

9. Demonstre a seguinte generalização de um resultado provado em aula (utilizado para provar o teorema da arbitragem). Sejam $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto convexo e $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial disjunto de K (ou seja, $K \cap V = \emptyset$). Então existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle x, y \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;>\; 0 \quad \text{para todo} \;\; y \in K \;,$$

e tal que x é ortogonal a V, ou seja $\langle x, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$.