Probabilidade: uma Introdução
Lista 1: Exercícios de Análise Combinatória

Edson de Faria

1 de Setembro de 2013

Importante: Os exercícios assinalados com um asterisco são opcionais.

1. De quantas maneiras distintas podemos re-arranjar as letras da palavra `abracadabra`?

2. Alice possui 10 livros, dos quais 5 são romances, 3 são manuais de enfermagem e os 2 restantes são dicionários, e deseja colocá-los em seqüência na prateleira de uma estante. De quantas formas distintas Alice pode fazer isto, se

(a) Os livros devem ser organizados por assunto?

(b) Os livros de enfermagem devem permanecer juntos, mas os demais podem estar em qualquer ordem?

3. Eva deseja investir R$ 20.000,00 num banco, e tem à sua disposição 4 tipos de investimento para montar sua carteira. Eva pode investir em cada um dos 4 papéis apenas quantias que sejam múltiplos inteiros de R$ 1.000,00, e as quantias mínimas exigidas para investimento em cada um desses papéis são respectivamente 4, 3, 2 e 2 mil reais. De quantas estratégias distintas dispõe Eva para montar sua carteira dado que:

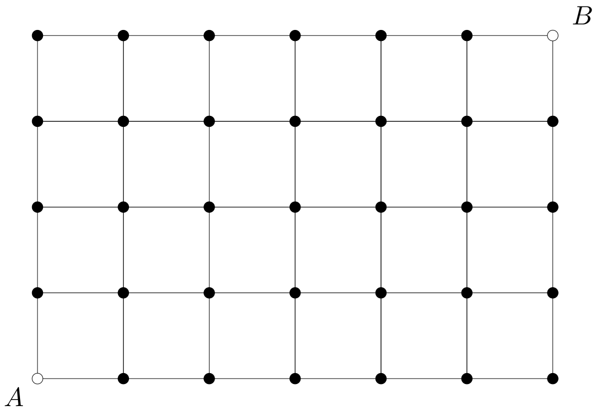
(a) Uma aplicação deva ser feita em cada um dos 4 papéis disponíveis?

(b) Aplicações devam ser feitas em pelo menos 3 dos 4 papéis disponíveis?

4. Um grupo de 30 amigos deseja organizar uma festa do tipo amigo-secreto. Os nomes dos amigos secretos são decididos por sorteio, e a única restrição obviamente é que ninguém seja amigo secreto de si mesmo. Quantos resultados distintos são possíveis para tal sorteio?

5. Um homem rico decide deixar toda sua fortuna, que consiste em N moedas de ouro, para seus m amigos ($m \geq 1$). Por sorte, ele tem mais moedas que amigos. De quantas maneiras distintas pode ser feita a partilha? Em quantas dessas cada um de seus amigos recebe pelo menos uma moeda?

6. Dado um inteiro $n \geq 1$, determine o número de seqüências finitas $x_1, x_2, \ldots, x_k$ estritamente crescentes ($x_1 < x_2 < \cdots < x_k$) para as quais cada x_i é um número inteiro tal que $1 \leq x_i \leq n$.



7. Considere a grade retangular mostrada na figura acima. Determine o número de caminhos ao longo da grade ligando os vértices A e B de maneira eficiente, isto é, passando pelo menor número possível de arestas.

8. Um restaurante possui 3 ambientes distintos, e há 10 garçons trabalhando no local. O dono do restaurante decide colocar 2 garçons servindo no primeiro ambiente, 3 no segundo ambiente, e 5 no terceiro ambiente. De quantas maneiras distintas é possível efetuar tal distribuição?

9. Um conselho com 6 membros deve ser escolhido de um corpo de executivos de uma empresa em que há 7 homens e 8 mulheres. Se em tal conselho deve haver pelo menos 3 mulheres e pelo menos 2 homens, de quantas maneiras distintas é possível efetuar a escolha?

10. Explique de maneira puramente combinatória por que a identidade

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

é verdadeira.

***11.** Utilizando um argumento puramente combinatório, mostre que

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}. \tag{1}$$

***12.** Utilizando o exercício anterior, mostre que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2. \tag{2}$$

***13.** Utilizando um argumento puramente combinatório (sem efetuar nenhum cálculo!), demonstre a identidade combinatória de Fermat, a saber

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}, \tag{3}$$

válida para $1 \leq k \leq n$.

14. Considere o seguinte experimento feito com dois baralhos convencionais idênticos, de 52 cartas cada um. Primeiro escolhemos 5 cartas do primeiro baralho (uma mão de poker) e colocâmo-las alinhadas sobre uma mesa. Em seguida, escolhemos 5 cartas do segundo baralho, colocando-as também em linha sobre a mesa, logo abaixo da primeira linha de cartas. Comparamos então cada carta da primeira linha com sua correspondente na segunda linha (imediatamente abaixo dela), e contamos quantas coincidências ocorrem. Por exemplo, se a primeira mão de poker selecionada é formada pelas cartas

$$5\diamondsuit \;\; 10\clubsuit \;\; A\heartsuit \;\; 8\heartsuit \;\; J\spadesuit$$

e a segunda mão selecionada é formada pelas cartas

$$7\diamondsuit \;\; 10\clubsuit \;\; Q\clubsuit \;\; 8\heartsuit \;\; 4\clubsuit \, ,$$

então há exatamente duas coincidências, a saber $10\clubsuit$ e $8\heartsuit$. Determine o número de resultados possíveis do experimento para os quais ocorrem exatamente 3 coincidências.

15. Três tenistas, A, B e C, disputam um torneio em 10 rodadas (uma partida por rodada). A cada rodada, dois dos tenistas disputam uma partida e o vencedor enfrenta o terceiro, que ficou de fora, na rodada seguinte. O vencedor da última partida (décima rodada) é declarado campeão do torneio. Na rodada inicial, A e B se enfrentam. Assim, um resultado possível do torneio é a seqüência ACCAAABBBC, com C sendo declarado campeão. Determine o número de resultados possíveis para a seqüência de jogos do torneio que estabelecem B como campeão.

***16.** Num certo campeonato de futebol com n clubes, disputado por pontos corridos, a classificação final da competição é uma partição dos clubes em grupos: o primeiro grupo formado pelos clubes que terminaram em primeiro lugar, o segundo grupo formado pelos clubes que terminaram em segundo lugar, e assim por diante. Seja $N(n)$ o número de possíveis classificações finais. Por exemplo, temos claramente $N(2) = 3$.

(a) Liste todas as possíveis classificações finais quando $n = 4$.

(b) Definindo $N(0) = 1$, mostre que para todo $n \geq 1$ temos

$$N(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} N(n-i) \, . \tag{4}$$

(c) Utilize a fórmula acima para calcular $N(5)$.

(d) Utilizando o item (b), mostre que de fato

$$N(n) \;=\; e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \, , \tag{5}$$

onde $e = 2.71828\ldots$.

***17.** Dizemos que uma seqüência de 0's e 1's é *admissível* se nela nunca aparecem dois zeros consecutivos. Por exemplo, a seqüência 011010111 é admissível; já a seqüência 011001101 não é admissível. Quantas seqüências de comprimento n são admissíveis?

***18.** Seja $K(b, c)$ o número de maneiras distintas de colorirmos b bolas indistinguíveis com c cores.

(a) Mostre que $K(b, c) = K(b, c-1) + K(b-1, c)$.

(b) Utilizando (a), mostre que de fato

$$K(b, c) \;=\; \binom{b+c-1}{c-1}\,. \tag{6}$$