

MAT 461 – Tópicos de Matemática II

Aula 5: Resumo de Probabilidade

Edson de Faria

Departamento de Matemática
IME-USP

26 de Agosto, 2013

1 Variáveis aleatórias

- Definição e exemplos
- Distribuição de uma variável aleatória
- Esperança de uma variável aleatória
- Variância de uma variável aleatória

2 Variáveis Aleatórias e Distribuições Especiais

- Variáveis Aleatórias de Bernoulli
- Variáveis Aleatórias Binomiais

Variáveis aleatórias: Definição e exemplos

- Frequentemente, ao realizarmos um experimento probabilístico, não estamos propriamente interessados no evento elementar que ocorre, mas em algum valor numérico resultante dessa ocorrência.
- Por exemplo, considere o experimento que consiste em lançar dois dados honestos – digamos um dado azul e outro vermelho – e observar as faces superiores dos dois dados.
- Suponha que estamos interessados no valor correspondente à **soma** dos valores dessas duas faces.
- Neste caso, a soma em questão é uma **função numérica** do evento elementar ocorrido.
- Isto nos conduz à noção central de **variável aleatória**, que formulamos da seguinte maneira.

Variáveis aleatórias: Definição e exemplos

Definição

Uma **variável aleatória** num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada evento elementar $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$.

- Por exemplo, no experimento do par de dados que acabamos de descrever, o espaço amostral é o conjunto de todos os pares $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ com $\omega_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.
- A variável aleatória do exemplo é a função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ (a soma dos valores das faces superiores dos dois dados).
- Neste mesmo experimento, no mesmo espaço amostral, podemos realizar várias outras observações. Por exemplo, ao lançarmos os dois dados, podemos anotar apenas o **maior dos dois números** obtidos nas faces superiores.

Variáveis aleatórias: Definição e exemplos

- Neste caso, temos uma outra variável aleatória $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser definida assim: $Y(\omega) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$.
- Vemos assim que, num mesmo espaço de probabilidade, podemos definir muitas variáveis aleatórias.
- Podemos efetuar vários tipos de operação com uma coleção dada de variáveis aleatórias: somá-las, multiplicá-las, etc.
- Em outras palavras, o conjunto de todas as possíveis variáveis aleatórias num espaço de probabilidade é o que chamamos de uma *álgebra*.

Distribuição de uma variável aleatória

- Suponha que X é uma variável aleatória definida sobre um espaço amostral Ω .
- Seja $a \in \mathbb{R}$ um dos valores assumidos por X . Escrevemos $[X = a]$ para denotar o evento “ X assume o valor a ”.
- Em outras palavras:

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$$

- Denotamos por $P[X = a]$ a probabilidade deste evento.
- Por exemplo, se Ω é o espaço amostral do experimento anterior (lançamento simultâneo de dois dados honestos), e X é a variável aleatória ali introduzida (a soma dos valores das faces superiores dos dados), então:

$$[X = 1] = \emptyset ; [X = 2] = \{(1, 1)\} ; [X = 4] = \{(1, 3); (2, 2); (3, 1)\} ;$$

Em particular, $P[X = 1] = 0$, $P[X = 2] = 1/36$, $P[X = 4] = 1/12$, etc.

Distribuição de uma variável aleatória

Podemos agora apresentar uma definição mais formal do conceito de distribuição de uma variável aleatória, pelo menos no caso *discreto*.

Definição

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Suponha que X é *discreta*, isto é, assume apenas um conjunto discreto de valores $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$. O conjunto de valores

$$p_i = P[X = x_i], \quad i = 1, 2, \dots$$

é chamado de *distribuição de probabilidade* da variável aleatória X .

- Note que $p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots = 1$.

Exemplo de distribuição

Eis a distribuição da variável aleatória X dada anteriormente.

i	x_i	$p_i = P[X = x_i]$
1	2	$\frac{1}{36}$
2	3	$\frac{2}{36}$
3	4	$\frac{3}{36}$
4	5	$\frac{4}{36}$
5	6	$\frac{5}{36}$
6	7	$\frac{6}{36}$
7	8	$\frac{5}{36}$
8	9	$\frac{4}{36}$
9	10	$\frac{3}{36}$
10	11	$\frac{2}{36}$
11	12	$\frac{1}{36}$

Vejamos agora outro exemplo.

- Suponha que uma moeda honesta é lançada três vezes consecutivas (com resultados independentes).
- Seja X a variável aleatória que conta o número de **coroas** ocorrido ao final dos três lançamentos.
- Há apenas 4 valores possíveis para X : 0, 1, 2, ou 3.
- Além disso, temos claramente:

$$[X = 0] = \{CCC\} ; [X = 1] = \{KCC, CKC, CCK\}$$

$$[X = 2] = \{KKC, KCK, CKK\} ; [X = 3] = \{KKK\}$$

- Portanto, a distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$p_0 = P[X = 0] = \frac{1}{8} ; p_1 = P[X = 1] = \frac{3}{8}$$

$$p_2 = P[X = 2] = \frac{3}{8} ; p_3 = P[X = 3] = \frac{1}{8}$$

- Esta distribuição de probabilidade é um caso particular da chamada **distribuição binomial**, que será vista mais adiante (na segunda parte desta aula).

Esperança: definição

Chegamos agora ao conceito fundamental de **esperança** ou **valor esperado** de uma variável aleatória.

Trata-se, em linhas gerais, de uma **média ponderada** dos valores admissíveis da variável aleatória, com pesos dados pelas respectivas probabilidades desses valores.

Definição

*Se X é uma variável aleatória discreta, que assume os valores x_i com probabilidades p_i , $i = 1, 2, \dots$, então a **esperança** de X , que denotamos por $E[X]$, é dada por*

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i] = \sum_i x_i p_i .$$

Não é difícil ver que o conceito de esperança assim definido é análogo ao conceito de **centro de massa** de um sistema mecânico.

Esperança: exemplos

Vejamos alguns exemplos simples.

Exemplo

Um dado honesto é lançado. Seja X o valor da face superior obtido após o lançamento. Qual é o valor esperado de X ?

Solução: Temos neste caso

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^6 kP[X = k] = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo

Suponha agora que dois dados honestos são lançados simultaneamente. Seja X a soma das faces superiores obtidas após o lançamento. Qual é o valor esperado de X ?

Solução:

- Já calculamos a distribuição de probabilidade de X anteriormente (reveja a tabela dada).
- Utilizando os valores obtidos, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E[X] &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 \end{aligned}$$

Exemplo

Três bolas são sorteadas se reposição de uma urna contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma das bolas sorteadas possua um número maior ou igual a 13?

Solução:

- Denotemos por X a variável aleatória que fornece o *maior dos números das três bolas sorteadas*. (Ou seja, se as bolas retiradas da urna têm números n_1, n_2, n_3 , então $X = \max\{n_1, n_2, n_3\}$.)
- Suponha que $X = k$, para algum k (necessariamente $3 \leq k \leq 15$). Então uma das bolas sorteadas tem número k , e os números das outras duas estão no conjunto $\{1, 2, \dots, k-1\}$.
- Assim, o número de conjuntos de 3 bolas para os quais $X = k$ é $\binom{k-1}{2}$.
- Por outro lado, o número total de maneiras de sortearmos 3 bolas de uma urna com 15 bolas é $\binom{15}{3}$.

- Portanto, temos

$$P[X = k] = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{15}{3}}, \text{ para } k = 3, \dots, 15.$$

- O evento cuja probabilidade queremos calcular é $[X \geq 13]$. Mas temos:

$$[X \geq 13] = [X = 13] \cup [X = 14] \cup [X = 15]$$

e como esta união é disjunta, concluímos que:

$$P[X \geq 13] = P[X = 13] + P[X = 14] + P[X = 15]$$

$$= \frac{\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{13}{2}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{14}{2}}{\binom{15}{3}}$$

$$= 66 \frac{78 + 91 + 105}{455} \simeq 0.5165.$$

- Ou seja, a probabilidade desejada é de aproximadamente 51.65%.

Retornemos agora ao exemplo dos lançamentos consecutivos de uma moeda.

Exemplo

*Uma moeda honesta é lançada três vezes consecutivas. Os resultados dos três lançamentos são independentes. Seja X a variável aleatória que fornece o **número de coroas** ocorrido ao final dos três lançamentos. Qual é o valor esperado de X ?*

Solução:

- Já calculamos a distribuição da variável aleatória X anteriormente. Temos:

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] + 2 \cdot P[X = 2] + 3 \cdot P[X = 3] \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{12}{8} = 1.5 . \end{aligned}$$

Cumpramos notar que a esperança possui as seguintes propriedades úteis.

Proposição

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer, definidas no mesmo espaço de probabilidade. Sejam a e b duas constantes reais quaisquer, e seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real qualquer. Então:

(1) *Temos $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.*

(2) *Se X é discreta com valores $x_1, x_2, \dots$, temos*

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)P[X = x_i] .$$

(3) *Temos $E[aX + b] = aE[X] + b$.*

Não provaremos essa proposição aqui. A demonstração fica como exercício. Mas observamos que (3) é uma consequência de (2): basta tomar $g(x) = ax + b$ (verifique).

Variância: definição

- Outro conceito fundamental em Probabilidade é o conceito de **variância** de uma variável aleatória.
- A variância é um número que, *grosso modo*, mede a dispersão estatística da variável aleatória, ou seja, o quanto os valores dessa variável se afastam do valor esperado.
- A definição formal é a seguinte.

Definição

Seja X uma variável aleatória e seja $\mu = E[X]$ seu valor esperado. A **variância** de X , que denotamos por $\text{Var}(X)$, é dada por

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Assim, quanto mais “espalhados” ou “dispersos” os valores de X estiverem ao redor do valor esperado μ , maior será a variância de X .

Variância: definição alternativa

Proposição

A variância de uma variável aleatória X também é dada pela fórmula:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Demonstração:

A verificação desse resultado é simples e instrutiva, e merece ser feita em aula.

- Sejam $x_1, x_2, \dots$ os valores assumidos por X ,¹ e sejam $p_1, p_2, \dots$ as respectivas probabilidades.
- Então, pela proposição anterior, sabemos que

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i.$$

¹Supomos que X é discreta. O resultado vale também para variáveis aleatórias contínuas, mas isto será visto mais tarde.

Variância: definição alternativa

- Desenvolvendo a expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) p_i \\ &= \sum_i x_i^2 p_i - 2\mu \sum_i x_i p_i + \mu^2 \sum_i p_i\end{aligned}$$

- Porém, lembrando que

$$\sum_i p_i = 1 ; \sum_i x_i p_i = E[X] ; \sum_i x_i^2 p_i = E[X^2] ,$$

concluimos que

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2 ,$$

pois $\mu = E[X]$.

Variância: observações

Vale a pena fazermos as seguintes observações.

- Assim como o conceito de **esperança** é análogo ao conceito de **centro de massa** em Mecânica, o conceito de **variância** é análogo ao conceito de **momento de inércia**.
- A **raiz quadrada** da variância é o que chamamos em Estatística de **desvio padrão** da variável aleatória. Em símbolos:

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Variância: exemplo

Exemplo

Considere o lançamento de um dado honesto, e seja X a variável aleatória correspondente ao número da face superior do dado após o lançamento. Qual é a variância de X ?

Solução:

- Já sabemos que $E[X] = \frac{7}{2}$.
- Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{91}{6} . \end{aligned}$$

- Portanto:

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} .$$

- Vamos agora examinar com mais detalhes algumas das variáveis aleatórias especiais mais frequentes em aplicações práticas, e suas correspondentes distribuições.
- Os exemplos mais importantes de distribuição são os seguintes:
 - (1) Distribuição de Bernoulli
 - (2) Distribuição Binomial
 - (3) Distribuição de Poisson
 - (4) Distribuição Normal
- Esta última é uma distribuição contínua; distribuições e variáveis aleatórias contínuas serão abordadas mais tarde.

Variáveis Aleatórias de Bernoulli

Definição

Dizemos que uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é **Bernoulli**^a se X assume apenas dois valores, digamos 0 e 1, com probabilidades $1 - p$ e p , respectivamente, onde $0 \leq p \leq 1$.

^aUma variável de Bernoulli também é chamada de variável aleatória *binária*.

- Em outras palavras, uma variável aleatória de Bernoulli tem distribuição de probabilidade

$$p(0) = P[X = 0] = 1 - p$$

$$p(1) = P[X = 1] = p$$

- Num experimento de Bernoulli, dizemos que ocorre um **sucesso** com probabilidade p quando $X = 1$, e que ocorre um **fracasso** com probabilidade $1 - p$ quando $X = 0$.

Variáveis Aleatórias de Bernoulli

- Um exemplo típico é o caso do lançamento de uma moeda (não necessariamente honesta), e da variável aleatória X que tem valor $X = 0$ se o lançamento produz cara, e o valor $X = 1$ se o lançamento produz coroa. Neste caso, um *sucesso* significa que ocorreu *coroa*.
- Observe que a *esperança* de uma variável aleatória de Bernoulli (com valores 0 e 1) é p :

$$E[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

- Além disso, como $X^2 = X$, a variância de X é dada por

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Definição

Dada uma seqüência de n experimentos de Bernoulli, todos independentes, com a mesma probabilidade de sucesso igual a p ($0 \leq p \leq 1$), sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ as variáveis de Bernoulli correspondentes. Então a variável aleatória Y dada pela soma

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

*é chamada de **variável aleatória binomial** com parâmetros (n, p) .*

- Dito de outro modo, a variável aleatória binomial Y expressa o **número de sucessos** obtidos na repetição de n experimentos de Bernoulli independentes (com mesma probabilidade de sucesso p).

Variáveis Aleatórias Binomiais

- O exemplo mais fundamental de variável aleatória binomial aparece no experimento em que lançamos uma moeda (não necessariamente honesta) n vezes consecutivas.
- Supomos que cada lançamento da moeda tem uma probabilidade p de resultar em coroa, e que tais resultados são independentes.
- Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, seja X_i a variável aleatória tal que $X_i = 0$ se o i -ésimo lançamento resulta em cara (C), e $X_i = 1$ se o i -ésimo lançamento resulta em coroa (K).
- Então, escrevendo $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, vemos que Y representa o número de coroas obtidas ao final de n lançamentos da moeda.
- Por exemplo, se $n = 5$, e se após 5 lançamentos obtemos a sequência $\omega = KCCKK$, então temos

$$X_1(\omega) = 1 ; X_2(\omega) = 0 ; X_3(\omega) = 0 ; X_4(\omega) = 1 ; X_5(\omega) = 1 ;$$

$$\text{E portanto } Y(\omega) = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3.$$

- Observe que é fácil calcular a esperança de Y , se usarmos a propriedade aditiva da esperança.
- Como cada X_i é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p , já sabemos que $E[X_i] = p$, e portanto:

$$E[Y] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = p + p + \cdots + p = np$$

- Uma outra maneira de calcularmos a esperança de Y é através da distribuição de probabilidade de Y , que vamos agora determinar.
- Os valores possíveis para Y são os inteiros $0, 1, \dots, n$ ($Y = 0$ se após n lançamentos só ocorrem caras, ..., $Y = n$ se só ocorrem coroas). Que dizer sobre as probabilidades de tais valores ocorrerem?
- Já efetuamos esse cálculo antes; sabemos que

$$P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Esta distribuição é conhecida como **distribuição binomial** com parâmetros (n, p) .

- Portanto, temos

$$E[Y] = \sum_{k=0}^n k P[Y = k] = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- Como o resultado tem que ser o mesmo que o obtido anteriormente, deduzimos em particular a seguinte identidade combinatória:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

- Também é possível calcular a variância da variável aleatória Y .
- Isto pode ser feito de pelo menos duas maneiras: explicitamente, utilizando uma identidade combinatória, ou como consequência do seguinte fato geral, cuja justificativa veremos mais tarde.
- Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) .$$

- No caso em questão, sabemos que Y é a soma de n variáveis aleatórias X_i de Bernoulli independentes. Cada uma delas tem variância $\text{Var}(X_i) = p(1 - p)$, como já vimos.
- Portanto,

$$\text{Var}(Y) = np(1 - p) .$$

Variáveis Aleatórias Binomiais: exemplo

Variáveis aleatórias binomiais possuem muitas aplicações. O exemplo a seguir é típico.

Exemplo

Uma fábrica produz parafusos em pacotes de 20 unidades, que são vendidos a lojas de varejo. Se um pacote contiver 2 ou mais parafusos defeituosos, a fábrica se compromete a substituir o pacote, sem custo adicional para o varejista. A probabilidade de que um dado parafuso seja defeituoso é de 1%. Se a produção total é de 10 000 pacotes, quantos pacotes a fábrica espera ter de trocar?

Solução:

- Seja X o número de parafusos defeituosos num pacote escolhido ao acaso.
- Então X é uma variável aleatória binomial, com parâmetros $n = 20$ e $p = 0.01$.

- Estamos interessados no evento $[X \geq 2]$. A probabilidade deste evento é:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] .$$

- Mas como X é binomial com parâmetros $n = 20$ e $p = 0.01$, temos:

$$P[X = k] = \binom{20}{k} (0.01)^k (0.99)^{20-k} .$$

- Portanto, temos:

$$\begin{aligned} P[X \geq 2] &= 1 - \binom{20}{0} (0.01)^0 (0.99)^{20} - \binom{20}{1} (0.01)^1 (0.99)^{19} \\ &\simeq 1 - 0.8179 - 0.1652 = \mathbf{0.0169} \end{aligned}$$

- Ou seja, a probabilidade de que haja 2 ou mais parafusos defeituosos numa caixa com 20 é de aproximadamente 1.69%.
- Como há 10 000 pacotes, a quantidade esperada Q de pacotes defeituosos é

$$Q = 0.0169 \times 10\,000 = 169 .$$

- Resumindo: a fábrica espera ter que trocar aproximadamente 169 pacotes de parafusos.

- Os próximos slides mostram representações gráficas de distribuições binomiais.
- Observe que, nos dois exemplos com $n = 20$, a maior variância ocorre para $p = 0.5$.
- Isto não é acidental: como vimos, a variância $V(n, p)$ de uma binomial com parâmetros (n, p) é igual a

$$V(n, p) = np(1 - p)$$

- Esta expressão, para n fixo, atinge um máximo para $p = 0.5$.

Distribuição binomial: primeiro exemplo

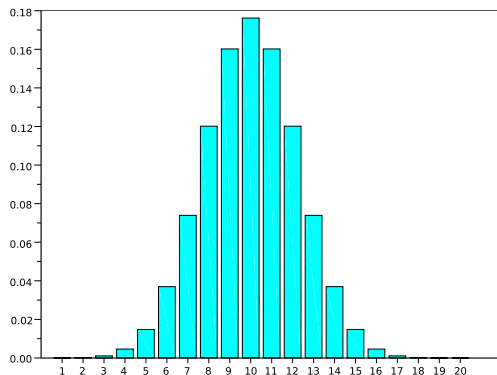


Figura 1: Distribuição binomial com $n = 20$ e $p = 0.5$.

Distribuição binomial: segundo exemplo

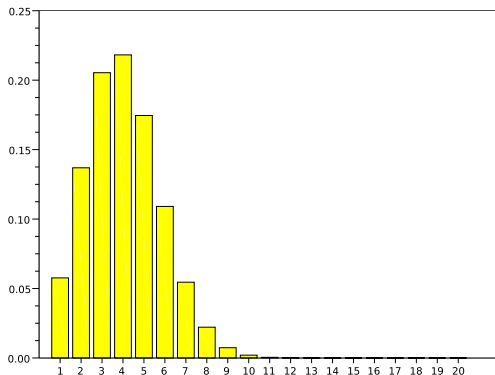


Figura 2: Distribuição binomial com $n = 20$ e $p = 0.2$.

Superposição dos dois exemplos

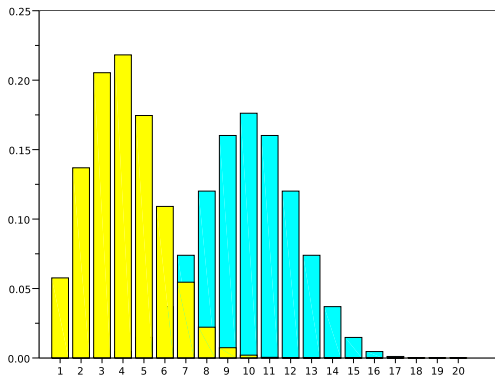


Figura 3: Superposição das duas binomiais.

Distribuição binomial: terceiro exemplo

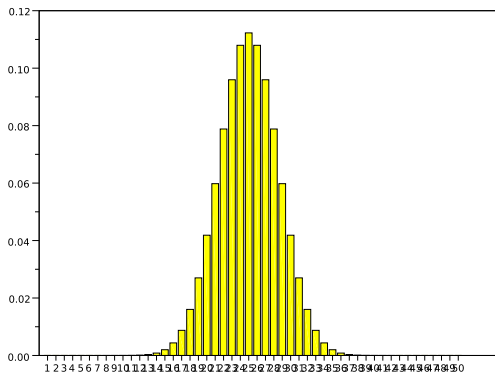


Figura 4: Distribuição binomial com $n = 50$ e $p = 0.5$.

Distribuição binomial: quarto exemplo

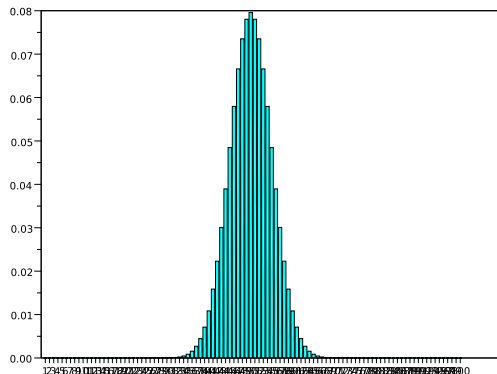


Figura 5: Distribuição binomial com $n = 100$ e $p = 0.5$.

Superposição dos dois exemplos

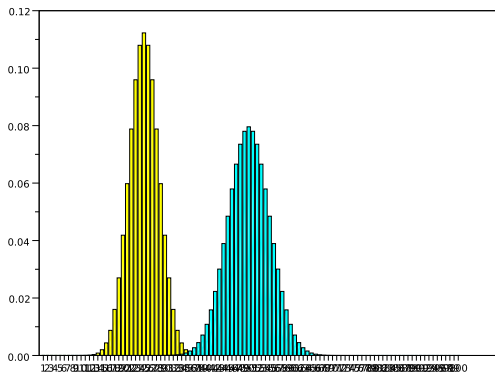


Figura 6: Superposição das duas binomiais.