MAT 461 – Tópicos de Matemática II
Aula 3: Resumo de Probabilidade

Edson de Faria

Departamento de Matemática
IME-USP

19 de Agosto, 2013

Probabilidade: uma Introdução / Aula 3

1. Probabilidade Discreta: Exemplos

2. Probabilidade condicional

Esta aula está, como de praxe, dividida em duas partes:

- Na primeira parte, examinaremos alguns exemplos do cálculo de probabilidades discretas, ilustrando conceitos vistos na aula anterior.
- Na segunda parte, introduziremos o conceito-chave de probabilidade condicional, e examinaremos alguns exemplos de aplicações.

Exemplo 1

Exemplo

Uma urna contém 4 bolas azuis, 6 bolas brancas, e 8 bolas cinzas. Três bolas são removidas aleatoriamente da urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que duas delas sejam brancas e uma azul?

Primeira solução: Seja E o evento em questão, e suponhamos que a *ordem* em que as bolas são retiradas da urna seja importante.

- Neste caso, cada sorteio das três bolas corresponde a um *arranjo* de três bolas escolhidas das 18 bolas presentes na urna.
- Assim, o espaço amostral Ω é o conjunto de todos os possíveis arranjos desse tipo. Sabemos que $|\Omega| = 18 \cdot 17 \cdot 16$.
- Os arranjos presentes no evento E são de três tipos: ABB, BAB, BBA. Ou seja, $E = ABB \cup BAB \cup BBA$ (onde ABB é o evento em que a primeira bola sorteada é azul, a segunda e a terceira são brancas, etc).

Exemplo 1

- Mas temos:

$$|ABB| = 4 \cdot 6 \cdot 5 \ ; \ |BAB| = 6 \cdot 4 \cdot 5 \ ; \ |BBA| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \ .$$

- Portanto:

$$P(ABB) \ = \ \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{18 \cdot 17 \cdot 16} \ = \ \frac{5}{204} \ ; \ P(BAB) \ = \ \frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{18 \cdot 17 \cdot 16} \ = \ \frac{5}{204} \ ;$$

$$P(BBA) \ = \ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{18 \cdot 17 \cdot 16} \ = \ \frac{5}{204} \ .$$

- Concluimos que:

$$P(E) \ = \ P(ABB) + P(BAB) + P(BBA) \ = \ \frac{5}{204} + \frac{5}{204} + \frac{5}{204} \ = \ \frac{5}{68} \ .$$

Exemplo 1

Segunda solução: Novamente, denotemos por E o evento cuja probabilidade é solicitada. Mas agora suponhamos que a ordem em que as bolas são retiradas da urna *não* é importante.

- Neste caso, cada sorteio de três bolas corresponde a uma *combinação* de três bolas escolhidas das 18 bolas presentes na urna.
- Em outras palavras, o espaço amostral Ω tem agora
$$|\Omega| = \binom{18}{3}$$
elementos, que supomos equiprováveis.
- O evento E corresponde a todos os subconjuntos de três bolas em que há uma bola azul e duas brancas. Há $\binom{6}{2}$ maneiras de escolhermos 2 bolas brancas dentre as 6 existentes, e há $\binom{4}{1}$ maneiras de escolhermos 1 bola azul dentre as 4 existentes.
- Assim, temos
$$|E| = \binom{6}{2}\binom{4}{1}.$$

Exemplo 1

Concluimos que

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{18}{3}}$$

$$= \frac{\frac{6!}{2!4!} \cdot 4}{\frac{18!}{3!15!}}$$

$$= \frac{5}{68},$$

o que obviamente é a mesma resposta obtida na primeira solução.

Exemplo 2

Urnas e bolas servem como representações esquemáticas de várias situações práticas, como mostra a solução do exemplo a seguir.

Exemplo

Um professor de Probabilidade distribuiu a seus alunos uma lista com 10 *problemas, e disse a eles que o exame final do curso seria composto de* 5 *problemas escolhidos aleatoriamente de tal lista. Alice, uma aluna do curso, sabe resolver* 7 *dos* 10 *problemas da lista.*

(a) *Qual é a probabilidade de que Alice resolva todos os* 5 *problemas do exame final?*

(b) *Qual é a probabilidade de que Alice resolva pelo menos* 4 *desses* 5 *problemas?*

Exemplo 2

Solução: O problema pode ser traduzido para a linguagem de bolas e urnas.

- A lista de problemas corresponde a uma urna com 10 bolas.
- Há 7 bolas verdes: os problemas que Alice sabe resolver.
- E há 3 bolas vermelhas: os problemas que Alice *não* sabe resolver.
- O exame final corresponde a uma escolha aleatória (um sorteio) de 5 bolas das 10 nessa urna.

A situação é ilustrada na figura a seguir.

Exemplo 2

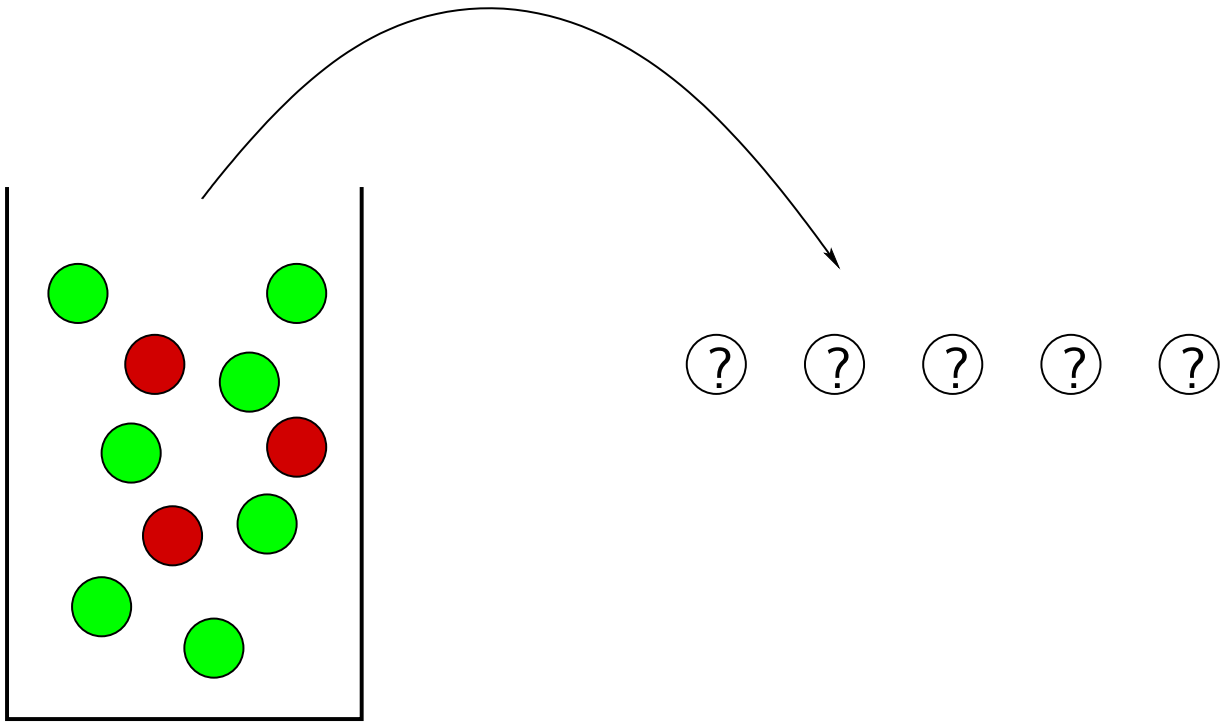

Figura: Quais serão as questões escolhidas para o exame final?

Exemplo 2

- Assim o espaço amostral Ω do problema consiste de todos os possíveis conjuntos de 5 bolas sortedas da urna, e temos

$$|\Omega| = \binom{10}{5}.$$

- Se A é o evento do item (a) (a saber, Alice sabe resolver todos os problemas do exame), então

$$|A| = \binom{7}{5}$$

Isto porque este é o número de maneiras de escolhermos 5 problemas entre os 7 que Alice sabe resolver.

- Portanto, temos

$$P(A) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 2

- Por outro lado, se B denota o evento do item (b) (a saber, Alice sabe resolver pelo menos 4 dos 5 dos problemas do exame), então

$$|B| = \binom{7}{5} + \binom{7}{4}\binom{3}{1}$$

Isto porque:

1. Ou Alice sabe resolver todos os 5 problemas do exame, e isto ocorre em $\binom{7}{5}$ dos casos, como já vimos;
2. Ou Alice sabe resolver exatamente 4 dos 5 problemas; e como há $\binom{7}{4}$ maneiras de escolhermos 4 problemas dos 7 que Alice sabe resolver, e $\binom{3}{1}$ maneiras de escolhermos 1 problema dos 3 que Alice *não* sabe resolver, isto ocorre em $\binom{7}{4}\binom{3}{1}$ dos casos.

- Portanto, temos

$$P(B) = \frac{\binom{7}{5} + \binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{2}\,.$$

Exemplo 2

- Resumindo, Alice tem uma chance de

$$P(A) = \frac{1}{12} \equiv 8.33\%$$

de acertar todas as questões da prova;

- E tem uma chance seis vezes maior, a saber

$$P(B) = \frac{1}{2} \equiv 50\% \ ,$$

de acertar pelo menos 4 das 5 questões!

Exemplo 3

Nosso próximo exemplo diz respeito ao jogo de *poker*. Lembramos que uma *mão* de poker é um conjunto de 5 cartas, por exemplo:

$$5\clubsuit \quad 9\diamondsuit \quad Q\spadesuit \quad 8\heartsuit \quad K\clubsuit$$

Exemplo

Dizemos que uma mão de poker é uma full house se consiste de uma terna de cartas de mesma denominação e mais um par de cartas de (uma outra) mesma denominação, por exemplo: $7\clubsuit \quad 7\diamondsuit \quad 7\heartsuit \quad A\spadesuit \quad A\clubsuit$. *Dizemos também que uma mão de poker é um flush se todas as* 5 *cartas forem do mesmo naipe.*

(a) *Qual é a probabilidade de um jogador de poker receber uma full house?*

(b) *Qual é a probabilidade de um jogador de poker receber um flush?*

Exemplo 3

Solução:

- Neste exemplo, o espaço amostral Ω é o conjunto de todas as possíveis mãos de poker, e sabemos que

$$|\Omega| = \binom{52}{5} = 2\,598\,960 \ .$$

- Assumimos que todas as mãos de poker são *equiprováveis*. Ou seja, cada um dos elementos de Ω tem a mesma probabilidade individual de ocorrer – igual a $\binom{52}{5}^{-1}$.
- Seja A o evento do item (a). Perguntamos: quantos elementos possui A?

Exemplo 3

- Para determinarmos um elemento de A, isto é, uma full house, procedemos assim:
  1. Escolhemos uma denominação para a terna, o pode ser feito de $\binom{13}{1}$ maneiras distintas;
  2. Escolhemos os naipes da terna, o que pode ser feito de $\binom{4}{3}$ maneiras distintas;
  3. Escolhemos uma denominação para o par, dentre as 12 denominações restantes, o que pode ser feito de $\binom{12}{1}$ maneiras distintas;
  4. Escolhemos os naipes do par, o que pode ser feito de $\binom{4}{2}$ maneiras distintas.
- Assim, pelo princípio do produto, temos

$$|A| = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}.$$

Exemplo 3

- Concluimos que a probabilidade de um jogador receber uma full house é

$$P(A) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.00144 \ .$$

- Seja agora B o evento do item (b). Novamente perguntamos: quantos elementos possui B?
- Para determinarmos um elemento de B, procedemos assim:
  1. Escolhemos um naipe, o que pode ser feito de $\binom{4}{1}$ maneiras distintas;
  2. Escolhemos 5 cartas das 13 desse naipe, o que pode ser feito de $\binom{13}{5}$ maneiras distintas.
- Assim, pelo princípio do produto, temos

$$|B| = \binom{4}{1}\binom{13}{5} \ .$$

Exemplo 3

- Portanto, a probabilidade de um jogador receber um flush é

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.00198 \ .$$

Exemplo 3

Observações:

- Na verdade, em poker, quando se diz flush, normalmente entende-se que se trata de uma mão de 5 cartas de mesmo naipe que não estão em seqüência.
- Quando as cartas de um flush estão em seqüência, dizemos que formam um straight flush. Nessa terminologia, a probabilidade de um flush (que não é um straight flush) deve ser reavaliada para

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5} - 10\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.00196 \ .$$

Exemplo 4

O exemplo a seguir é clássico.

Exemplo

Numa sala de aula há n alunos. Qual é a probabilidade de que dois desses alunos façam aniversário no mesmo dia?

Solução:

- Seja E o evento de que pelo menos dois alunos fazem aniversário no mesmo dia. Para obtermos $P(E)$, calculamos a probabilidade do evento complementar E^c.
- Adotamos a hipótese simplificadora de que ninguém faz aniversário no dia 29 de fevereiro, e ordenamos os alunos de alguma forma (por ordem alfabética, por exemplo).
- Assim, o espaço amostral consiste de todas as possíveis n-uplas de datas, o que fornece um total de 365^n possíveis n-uplas, todas *equiprováveis*.

Exemplo 4

- Em quantas dessas n-uplas não há coincidências de datas?
- Simples: o número de tais n-uplas é o número de *arranjos* de n datas distintas, escolhidas dentre as 365 possíveis, ou seja, $365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$.
- Logo,

$$P(E^c) \;=\; \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \;=\; \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \;.$$

- Portanto, temos

$$P(E) \;=\; 1 - P(E^c) \;=\; 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \;.$$

Exemplo 4

- Observe que $P(E^c)$ é igual a zero se $n > 365$, o que é razoável: se há mais de 365 datas de aniversário, ao menos duas delas devem coincidir.
- Isto não é surpreendente.
- O que talvez seja surpreendente é que para $n \geq 23$ já temos $P(E) > 0.5$.
- Em outras palavras, com 23 ou mais pessoas numa sala, há uma probabilidade de mais de 50% de que duas delas façam aniversário no mesmo dia!

Exemplo 5

Exemplo

Uma moeda honesta é lançada $2n$ vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de que ocorram exatamente n caras e n coroas?

Solução:

- O resultado dos $2n$ lançamentos é uma seqüência $\omega = x_1 x_2 \cdots x_{2n}$ onde cada x_j pode ser C (cara) ou K (coroa).
- Como a moeda é honesta e os lançamentos são independentes, todas as seqüências possíveis – há 2^{2n} delas – são equiprováveis, e portanto $P(\omega) = \frac{1}{2^{2n}}$.
- Basta então determinarmos o número de seqüências em que aparecem exatamente n caras.
- Este é um problema combinatório cuja solução já conhecemos: há

$$\binom{2n}{n}$$

seqüências com esta propriedade.

Exemplo 5

- Denotando por p_n a probabilidade pedida no problema, temos portanto

$$p_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,.$$

- Por meio da fórmula de Stirling, podemos obter facilmente uma estimativa assintótica para p_n, a saber

$$p_n \sim \frac{1}{2^{2n}}\frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\,e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,.$$

- Por exemplo, se $n = 100$ então $p_{100} \simeq \frac{1}{10\sqrt{\pi}} \simeq 0.0564 = 5.64\%$. Ou seja, em 200 lançamentos da moeda, há uma probabilidade de 5.64% de o resultado ser uma seqüência com exatamente 100 caras e 100 coroas.
- Observe que $p_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Probabilidade condicional

- Não é exagero afirmar que os conceitos de *probabilidade condicional* e *independência de eventos* são os mais fundamentais de toda a teoria de probabilidades.
- Sem tais conceitos, a teoria de probabilidades reduzir-se-ia meramente à teoria da medida.
- O conceito de independência é de tal importância e ubiquidade em temas probabilísticos que alguns autores, como Paul Halmos, chegam a afirmar que probabilidade nada mais é do que teoria da medida mais o conceito de independência. Há tanta verdade quanto exagero em tal afirmação.

Probabilidade condicional

- Tarefa: estimar a probabilidade de ocorrência de um determinado evento.
- Do ponto de vista intuitivo, é razoável supor que nossa estimativa seja influenciada pela informação de que dispomos no momento.
- Por exemplo, se o experimento consiste no lançamento de dois dados honestos idênticos e o evento em que estamos interessados é a ocorrência de pelo menos um seis, sabemos de antemão que a probabilidade deste evento é $11/36$.
- Entretanto, se recebemos a informação adicional de que após o lançamento a soma das faces superiores é igual a cinco, sabemos agora que o evento em questão não ocorre. Sua nova probabilidade, *dada a informação adicional*, é zero.
- Essa drástica alteração de $11/36$ para 0 deve-se à ocorrência de um outro evento, a saber, o de que a soma das faces superiores é igual a cinco.

Probabilidade condicional

O conceito de *probabilidade condicional* foi introduzido em teoria de probabilidades com o objetivo de quantificar tais alterações. A definição formal é a seguinte.

Definição

Se $A, B \subseteq \Omega$ são dois eventos com $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado B é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Probabilidade condicional

Proposição

Para todo evento $B \in \mathcal{A}$ fixo com $P(B) > 0$, a função $P_B : \mathcal{A} \to [0,1]$ dada por

$$P_B(A) \;=\; P(A|B) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

é uma medida de probabilidade, isto é, satizfaz as seguintes propriedades:

(P1) $P_B(\Omega) = 1$

(P2) *Dada uma seqüência $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ de eventos $E_n \in \mathcal{A}$ mutuamente exclusivos (ou seja, tais que $E_i E_j = \emptyset$ para $i \neq j$), temos*

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P_B(E_n)\;.$$

Não demonstraremos esse resultado aqui. A demonstração fica como exercício para o aluno iteressado.

Probabilidade condicional: exemplos

- Examinaremos a seguir alguns exemplos simples em que a noção de probabilidade condicional se faz presente.
- Através desses exemplos, nota-se a estreita relação entre o conceito de probabilidade condicional e a noção intuitiva de *informação*. Esta última pode ser formalizada, como veremos mais tarde.

Exemplo

Um par de dados honestos idênticos é lançado. Sabe-se que a soma das faces superiores resultantes é igual a 8*. Qual é a probabilidade de que uma das faces seja um seis?*

Probabilidade condicional: exemplos

Solução:

- Note que o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : 1 \leq \omega_i \leq 6\}$ e que seus eventos elementares são equiprováveis, de modo que $P(\omega) = 1/36$ para todo $\omega \in \Omega$.
- Seja A o evento "uma das faces superiores é um seis", e seja B o evento "a soma das faces superiores é 8". O problema é calcular $P(A|B)$.
- Temos

$$\begin{aligned} A \;=\; \{&(1,6)\,;\,(2,6)\,;\,(3,6)\,;\,(4,6)\,;\,(5,6)\,;\,(6,6)\,; \\ &(6,1)\,;\,(6,2)\,;\,(6,3)\,;\,(6,4)\,;\,(6,5)\} \;\;. \end{aligned}$$

  Em particular, $P(A) = |A|/36 = 11/36$.
- Temos também

$$B \;=\; \{(2,6)\,;\,(3,5)\,;\,(4,4)\,;\,(5,3)\,;\,(6,2)\} \;\;.$$

  Logo $P(B) = |B|/36 = 5/36$.

Probabilidade condicional: exemplos

- Por outro lado,
$$A \cap B \;=\; \{(2,6)\,;\,(6,2)\}\ ,$$
de modo que $P(AB) = |A \cap B|/36 = 2/36$.
- Portanto,
$$P(A|B) \;=\; \frac{P(AB)}{P(B)} \;=\; \frac{2/36}{5/36} \;=\; \frac{2}{5}\ .$$
Em outras palavras, a probabilidade condicional solicitada é igual a 40%.

Probabilidade condicional: exemplos

Exemplo

(1) *Num jogo de poker, qual é a probabilidade de você receber um royal flush?*

(2) *Ao receber sua mão, uma das cartas é virada para cima e resulta ser um ás de copas; qual é agora a probabilidade de que sua mão seja um royal flush?*

Solução de (1):

- Um royal flush consiste das cartas $10, J, Q, K, A$ de um *mesmo naipe*.
- Há portanto apenas 4 royal flushes possíveis.
- Assim, denotando por R o evento de que sua mão seja um royal flush, temos

$$P(R) = \frac{4}{\binom{52}{5}} = \frac{4 \cdot 5!\,47!}{52!}\,.$$

Probabilidade condicional: exemplos

Solução de (2):

- Seja A_C o evento de que uma das cartas da sua mão (a que é virada para cima) seja um ás de copas. Desejamos calcular $P(R|A_C)$.
- Observe que $R \cap A_C$ é o evento que consiste na sua mão ser um royal flush de copas. Logo,

$$P(R \cap A_C) = \frac{1}{\binom{52}{5}} .$$

- Mas claramente

$$P(A_C) = \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} ,$$

- Portanto temos:

$$P(R|A_C) = \frac{P(R \cap A_C)}{P(A_C)} = \frac{1}{\binom{51}{4}} = \frac{4!47!}{51!} .$$

- Note que

$$\frac{P(R|A_C)}{P(R)} = \frac{52}{4 \cdot 5} = \frac{13}{5} .$$

- Ou seja, se você sabe de antemão que uma de suas cartas é um ás de copas, sua chance de obter um royal flush é mais do que o dobro do que seria na ausência desta informação!

Probabilidade condicional: regra do produto

A seguinte *regra do produto* é extremamente útil em problemas probabilísticos envolvendo probabilidade condicional.

Proposição

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos de $\mathcal{A}$ então

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) \;=\; P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\;.$$

Por exemplo, se temos dois eventos ($n = 2$), então

$$P(A_2|A_1) \;=\; \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \;\rightarrow\; P(A_1A_2) \;=\; P(A_1)P(A_2|A_1)$$

O caso geral fica como exercício.

Regra do produto: exemplo

Para ilustrarmos a utilidade da regra do produto, vamos resolver novamente um problema apresentado anteriormente.

Exemplo

Num jogo de bridge, as 52 cartas são embaralhadas e divididas em 4 mãos de 13 cartas, uma para cada jogador. Qual é a probabilidade de que cada jogador receba um ás?

Solução:

- Sejam E_1, E_2, E_3, E_4 os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{A\heartsuit \text{ está com algum jogador}\} \\ E_2 &= \{A\heartsuit \text{ e } A\spadesuit \text{ estão com jogadores distintos}\} \\ E_3 &= \{A\heartsuit, A\spadesuit \text{ e } A\clubsuit \text{ estão com jogadores distintos}\} \\ E_4 &= \{\text{Cada ás está com um jogador diferente}\} \ . \end{aligned}$$

- Note que $\Omega = E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset E_4$.

Regra do produto: exemplo

- O que desejamos, obviamente, é calcular $P(E_4) = P(E_1E_2E_3E_4)$.
- Pela regra do produto, temos

$$P(E_1E_2E_3E_4) \;=\; P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)P(E_4|E_1E_2E_3)\;.$$

- Mas $P(E_1) = 1$ pois o ás de copas certamente está com *algum* dos jogadores ($E_1 = \Omega$).
- Além disso,

$$P(E_2|E_1) \;=\; \frac{39}{51}\;,$$

pois se sabemos com quem está o ás de copas e E_2 ocorre, então o ás de espadas só pode estar entre as 39 cartas dos outros três jogadores.

Regra do produto: exemplo

- Também temos
$$P(E_3|E_1E_2) \;=\; \frac{26}{50}\;,$$
pois se sabemos que o ás de copas e o ás de espadas estão com dois jogadores diferentes e E_3 ocorre, então o ás de paus só pode estar entre as 26 cartas dos dois jogadores restantes.
- Por motivo semelhante, temos também
$$P(E_4|E_1E_2E_3) \;=\; \frac{13}{49}\;.$$
- Portanto,
$$\begin{aligned} P(E_1E_2E_3E_4) \;&=\; 1 \times \frac{39}{51} \times \frac{26}{50} \times \frac{13}{49} \\ &=\; \frac{13 \cdot 13 \cdot 13}{17 \cdot 25 \cdot 49} \;\simeq\; 0.105 \;\equiv\; 10.5\%\;, \end{aligned}$$
e este é o mesmo resultado que obtivemos anteriormente.