

# MAT 461 – Tópicos de Matemática II

## Aula 2: Resumo de Probabilidade

Edson de Faria

Departamento de Matemática  
IME-USP

14 de Agosto, 2013

## 1 Combinatória (Cont.)

- Combinações, números multinomiais
- Princípio da Inclusão-Exclusão
- Fórmula de Stirling

## 2 Probabilidade: Definições e Exemplos

- Espaço Amostral; Eventos
- Álgebras de Eventos
- Espaços de Probabilidade

- Nos problemas envolvendo permutações e arranjos, a *ordem* em que os objetos escolhidos são dispostos ou arranjados é importante. Mas há várias situações em que a ordem não é importante.
- Tipicamente, o que queremos saber em tais situações é: dado um conjunto com  $n$  objetos distintos, quantos subconjuntos existem contendo exatamente  $k$  objetos, onde  $1 \leq k \leq n$ ? A resposta é dada pela proposição abaixo.

## Proposição

*Dado um conjunto  $A$  com  $n$  elementos, o número de subconjuntos de  $A$  que possuem exatamente  $k$  elementos é dado por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \quad (1)$$

## Exemplo

*O técnico de uma equipe de basquete dispõe de apenas 9 jogadores. De quantas maneiras distintas ele pode escalar a equipe se ninguém tem posição fixa em quadra?*

**Solução:** Como as posições dos jogadores em quadra não importam, trata-se de determinar quantos subconjuntos de 5 jogadores possui o grupo de 9 jogadores de que o técnico dispõe.

De acordo com a proposição acima, a resposta é

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

Os números dados pela Proposição 1 contam quantas *combinações* existem de  $k$  elementos escolhidos de uma coleção de  $n$  elementos. Tais números são chamados de *coeficientes binomiais*, em razão do seguinte resultado, cuja demonstração fica como exercício para o leitor.

## Teorema (Teorema Binomial)

Dados números reais (ou complexos)  $x$  e  $y$  e um inteiro não-negativo  $n$ , temos

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$



## Exemplo

Expandir a expressão  $(x + y)^4$ .

**Solução:** Temos aqui  $n = 4$ . Portanto,

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

# Números multinomiais

Imaginemos agora que dispomos de  $n$  objetos de  $k$  tipos diferentes, sendo  $n_1$  objetos de tipo 1,  $n_2$  objetos de tipo 2,  $\dots$ ,  $n_k$  objetos de tipo  $k$ , e queremos saber quantas permutações distintas existem desses  $n$  objetos (note que  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ). Denotamos este número por  $P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k}$ .

## Proposição

Para quaisquer  $n, n_1, n_2, \dots, n_k$  com  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ , temos

$$P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

**Prova:** Dispomos de  $n$  lugares para colocar os  $n$  objetos. Começamos por escolher  $n_1$  lugares distintos para os objetos de tipo 1.

Pela Proposição 1, isto pode ser feito de

$$\binom{n}{n_1}$$

maneiras distintas.

Para cada uma destas, uma vez colocados os  $n_1$  objetos de tipo 1 em seus lugares, podemos escolher  $n_2$  lugares para os objetos de tipo 2, dentre os  $n - n_1$  lugares disponíveis, de

$$\binom{n - n_1}{n_2}$$

maneiras distintas, novamente pela Proposição 1.

# Números multinomiais

Prosseguindo indutivamente desta forma, e utilizando o princípio do produto, concluímos que

$$\begin{aligned} P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k} &= \binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \dots \times \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\dots-n_k)!} \\ &= \frac{n}{n_1!n_2!\dots n_k!} \end{aligned}$$

Os números  $P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k}$  definidos aqui são chamados de *números multinomiais*, e é mais comum denotá-los por:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n}{n_1!n_2!\dots n_k!},$$

ao invés de  $P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k}$ .



## Exemplo

*De quantas maneiras distintas podemos re-arranjar as letras da palavra assassinato?*

**Solução:** Aqui, temos 11 letras de 6 tipos: a, s, i, n, t, o, sendo 3 do tipo a, 4 do tipo s, e 1 de cada um dos tipos i, n, t, o.

Portanto, o número total de re-arranjos é

$$\binom{11}{3, 4, 1, 1, 1, 1} = \frac{11!}{3!4!1!1!1!1!} = 277200 .$$

# Teorema Multinomial

Os *números multinomiais* são assim chamados e assim denotados por analogia com os números binomiais, e a analogia é perfeita, em razão do seguinte resultado.

## Teorema (Teorema Multinomial)

Se  $x_1, x_2, \dots, x_k$  são números reais (ou complexos) e  $n$  é um inteiro não negativo, então temos

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1; n_2; \dots; n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

Novamente, deixamos a demonstração deste teorema como exercício para o leitor.

# Princípio da Inclusão-Exclusão

- Como determinar a cardinalidade de uma união finita de conjuntos finitos?
- Já sabemos como fazê-lo se os conjuntos em questão forem dois a dois disjuntos (princípio da soma), mas e se não forem? A resposta é fornecida pelo *princípio de inclusão-exclusão*.
- Consideremos inicialmente o caso mais simples, em que temos apenas dois conjuntos  $A$  e  $B$ . Podemos contar os elementos de  $A \cup B$  adicionando o número de elementos de  $A$  ao número de elementos de  $B$ , e observando que ao fazê-lo teremos contado os elementos de  $A \cap B$  *duas vezes*. Portanto, temos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

# Princípio da Inclusão-Exclusão

Utilizando este caso particular e um simples argumento indutivo, obtemos o seguinte resultado geral.

## Teorema (Inclusão-Exclusão)

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são conjuntos finitos quaisquer, então

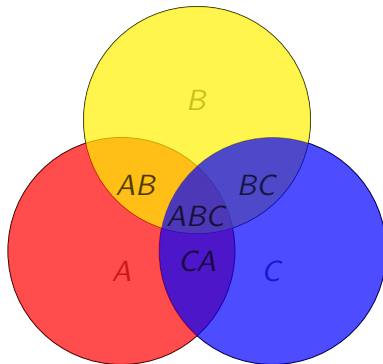
$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i A_j| + \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i A_j A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 A_2 \dots A_n|. \end{aligned} \quad (2)$$



A aplicação deste princípio apresentada no exemplo abaixo é típica.

# Caso de três conjuntos ( $A, B, C$ )

Primeiramente, observemos o que diz o princípio quando temos três conjuntos ( $n = 3$ ):



Aqui, temos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |BC| - |CA| + |ABC|.$$

## Exemplo

*Um clube tem 100 sócios, dos quais 70 praticam futebol, 40 praticam vôlei e 20 praticam tênis. Além disso, 10 praticam futebol e vôlei, 15 praticam vôlei e tênis, e 10 praticam tênis e futebol. Se cada um dos sócios pratica pelo menos um desses três esportes, quantos sócios praticam futebol, vôlei e tênis?*

**Solução:** Para resolvermos este problema, sejam  $F$ ,  $V$  e  $T$  os conjuntos de sócios que praticam futebol, vôlei e tênis, respectivamente. Sabemos que

$$\begin{aligned}|F| &= 70, & |V| &= 40, & |T| &= 20, \\ |F \cap V| &= 10, & |V \cap T| &= 15, & |T \cap F| &= 10.\end{aligned}$$

Como cada um dos sócios pratica pelo menos um dos três esportes, temos também  $|F \cup V \cup T| = 100$ .

Pelo princípio de inclusão-exclusão (com  $n = 3$ ), temos

$$|F \cup V \cup T| = |F| + |V| + |T| - |F \cap V| - |V \cap T| - |T \cap F| + |F \cap V \cap T|,$$

e portanto

$$|F \cap V \cap T| = 100 - 70 - 40 - 20 + 10 + 15 + 10 = 5.$$

- Como vimos, a solução de muitos problemas combinatórios frequentemente requer o cálculo de coeficientes binomiais (ou multinomiais), que por sua vez depende do cálculo de  $n!$  para diversos valores de  $n$ .
- Calcular  $n!$  diretamente a partir da definição pode ser extremamente laborioso, mesmo para valores relativamente baixos de  $n$ .
- O crescimento de  $n!$  com  $n$  é muito rápido (super-exponencial), como se pode constatar da simples inspeção da tabela a seguir.

# Fórmula de Stirling

| $n$ | $2^n$ | $n!$    |
|-----|-------|---------|
| 1   | 2     | 1       |
| 2   | 4     | 2       |
| 3   | 8     | 6       |
| 4   | 16    | 24      |
| 5   | 32    | 120     |
| 6   | 64    | 720     |
| 7   | 128   | 5040    |
| 8   | 256   | 40320   |
| 9   | 512   | 362880  |
| 10  | 1024  | 3628800 |



# Fórmula de Stirling

- Por sorte, na prática precisamos muitas vezes de um valor meramente aproximado.
- A *fórmula de Stirling*<sup>1</sup> fornece o *comportamento assintótico* de  $n!$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
- Lembramos ao leitor que duas funções  $f(x), g(x)$  definidas para  $x > 0$  são assintóticas quando  $x \rightarrow \infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

- Escrevemos  $f(x) \sim g(x)$  para denotar que  $f(x)$  e  $g(x)$  são assintóticas.

---

<sup>1</sup>James Stirling (1692–1770), matemático escocês. A fórmula que hoje leva seu nome aparece pela primeira vez em *Methodus Differentialis*, publicado em 1730.

## Teorema (Fórmula de Stirling)

Para  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

- Observe que ao aproximarmos  $n!$  pelo lado direito da fórmula acima cometemos um erro que em valor absoluto pode ser muito grande, mas que é percentualmente cada vez menor à medida que  $n$  cresce.
- Por exemplo, para  $n = 10$  temos como valor exato  $10! = 3628800$ , enquanto que o valor aproximado dado pela fórmula de Stirling é  $10! \simeq 3598696$ , o que corresponde a um erro percentual de 0.8%.

A noção primitiva de *experimento probabilístico*, com a qual o leitor certamente deve estar familiarizado, requer pouca elaboração além da apresentação de alguns exemplos representativos. Eis aqui uma pequena lista de exemplos simples de experimentos probabilísticos.

- (1) Jogar um dado e observar sua face superior após cada lançamento.
- (2) Jogar uma moeda e verificar se o resultado do lançamento é cara ou coroa.
- (3) Observar o tempo de vida útil de uma lâmpada.

Experimentos como os descritos acima são obviamente idealizados, apresentando um conjunto conhecido de resultados possíveis.

Por exemplo, sob condições controladas, o experimento (2) tem apenas *dois* resultados possíveis – cara ou coroa; outros resultados, tais como a moeda cair em pé, ou rolar ladeira abaixo, são sem dúvida possibilidades físicas de um experimento *real*, mas não de nosso experimento *ideal*.

O conjunto de resultados possíveis de um experimento probabilístico ideal é denominado *espaço amostral*, usualmente denotado por  $\Omega$ . Seus elementos são chamados de *eventos elementares*. No caso dos exemplos apresentados acima, temos:

- (1') No experimento (1), se identificamos cada face do dado com o número que ela exibe, vemos claramente que o espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- (2') No experimento (2), o espaço amostral  $\Omega$  apresenta apenas dois eventos elementares – cara ( $C$ ) ou coroa ( $K$ ) – de modo que  $\Omega = \{C, K\}$ .
- (3') No experimento (3), o espaço amostral  $\Omega$  é o conjunto dos números reais positivos (que representam todos os possíveis valores da vida útil da lâmpada).

Um *evento probabilístico*, ou simplesmente *evento*, é um subconjunto do espaço amostral. Quando afirmamos que um evento  $E \subseteq \Omega$  *ocorre*, queremos dizer que o resultado do experimento é um elemento  $\omega \in E$ . Por exemplo, no caso do experimento (1), o evento correspondente à ocorrência de um número par na face superior do dado é  $E = \{2, 4, 6\}$ , de modo que  $E$  ocorre se e só se uma das faces 2, 4 ou 6 ocorre.

- *Grosso modo*, o objetivo básico da teoria das probabilidade é medir os eventos de um espaço amostral  $\Omega$ , ou seja, atribuir a cada evento  $E \subseteq \Omega$  um número que corresponda à noção intuitiva de *probabilidade de ocorrência do evento  $E$* .
- Infelizmente, se adotarmos o ponto de vista segundo o qual todo e qualquer subconjunto do espaço amostral é um evento, não será possível cumprirmos este objetivo de maneira satisfatória.
- Para contornarmos essa dificuldade, que é de natureza essencialmente técnica, é necessário restringirmos um pouco a classe de eventos admissíveis.

Um pouco, mas não muito. Afinal, precisamos no mínimo ser capazes de efetuar operações lógicas rotineiras sobre eventos, como por exemplo as seguintes.

- (1) Dados dois eventos  $A, B \subseteq \Omega$ , deve ser possível considerarmos o evento  $A \cup B$ , que ocorre se e somente se  $A$  ou  $B$  ocorre, bem como o evento  $A \cap B$ , que ocorre se e somente se  $A$  e  $B$  ocorrem.
- (2) De modo geral, nossa classe de eventos  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  dever ser tal que, se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  são eventos quaisquer então  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  e  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  são eventos também, isto é, estão em  $\mathcal{A}$ .
- (3) Outra operação lógica essencial é a *negação* ou *complementaridade* de eventos. Se  $A \in \mathcal{A}$  é um evento, seu complementar  $A^c = \Omega \setminus A$  deve ser um evento também (o qual ocorre se e somente se  $A$  não ocorre).

Uma classe de eventos com as propriedades acima é denominada uma *álgebra*. Em outras palavras, temos a seguinte definição formal.

## Definição

*Uma classe não-vazia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  é uma álgebra se  $\mathcal{A}$  é fechada por complementos e uniões finitas.*

Note que não há necessidade de exigirmos que  $\mathcal{A}$  seja fechada por interseções finitas. Isto é consequência das chamadas leis de De Morgan. Se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  então  $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{A}$ , pois  $\mathcal{A}$  é fechada por complementos. Logo  $A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c \in \mathcal{A}$ , pois  $\mathcal{A}$  é fechada por uniões finitas; em particular

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c)^c$$

também pertence a  $\mathcal{A}$  pois, novamente,  $\mathcal{A}$  é fechada por complementos.

- É perfeitamente possível definir probabilidade (finitamente aditiva, pelo menos) sobre uma álgebra de conjuntos qualquer.
- Sob o ponto de vista estritamente probabilístico, entretanto, isto não é muito satisfatório. Há inúmeras situações concretas em que precisamos considerar uma seqüência *infinita* de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$  e examinar a possibilidade de que *todos* ocorram simultaneamente, ou que *pelo menos um deles* ocorra.
- No primeiro caso é necessário que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  seja um evento; no segundo, que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  seja um evento.
- Uma álgebra não satisfaz necessariamente essas condições. Precisamos de um definição mais inclusiva.



## Definição

Uma classe não-vazia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  é uma  $\sigma$ -álgebra se as seguintes condições são satisfeitas:

- (A1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (A2) Se  $A \in \mathcal{A}$  então  $A^c \in \mathcal{A}$ .
- (A3) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$  então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Ou seja, uma  $\sigma$ -álgebra é uma classe de conjuntos que é fechada por complementos e uniões enumeráveis.

# Definição de probabilidade

- Como definir probabilidade? Como atribuir a cada evento de um espaço amostral  $\Omega$  (ou pelo menos a cada evento pertencente a uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ) um número que corresponda intuitivamente às “chances” de que este evento ocorra?

## Definição

*Um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  consiste de um espaço amostral  $\Omega$ , uma  $\sigma$ -álgebra de eventos  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  e uma medida de probabilidade  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  com as seguintes propriedades.*

(P1)  $P(\Omega) = 1$

(P2) *Dada uma seqüência  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  de eventos  $E_n \in \mathcal{A}$  mutuamente exclusivos (ou seja, tais que  $E_i E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ), temos*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) .$$

- Costuma-se expressar as condições (P1) e (P2) acima dizendo-se simplesmente que uma medida de probabilidade é uma função  $\sigma$ -aditiva  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $P(\Omega) = 1$ .
- Podemos obter algumas conseqüências imediatas dos axiomas acima, que preferimos enunciar sob a forma de uma proposição.

### Proposição

*Num espaço de probabilidade qualquer  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , valem as seguintes propriedades.*

- (1) *Se  $E \in \mathcal{A}$ , então  $P(E^c) = 1 - P(E)$ .*
- (2) *Se  $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A}$  são eventos mutuamente exclusivos, então*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) .$$

- (3) *Se  $A \subseteq B$  são eventos em  $\mathcal{A}$ , então  $P(A) \leq P(B)$ .*
- (4) *Se  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .*

A afirmação em (4) pode ser generalizada, mediante um argumento indutivo, para qualquer número finito de eventos. O resultado é a seguinte proposição (princípio de inclusão-exclusão para probabilidades).

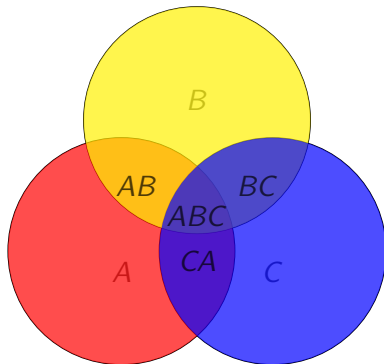
### Proposição (Inclusão-Exclusão)

Se  $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ , então temos

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_k}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) . \end{aligned} \tag{3}$$

A fórmula dada no resultado acima é chamada de *identidade de Bonferroni*.

Podemos ilustrar o caso  $n = 3$  com uma figura, como antes:



Aqui, temos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC).$$

# Exemplo 1

## Exemplo

*Um número inteiro entre 1 e 100 é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que tal número seja relativamente primo com 30?*

**Solução:** Esta é uma aplicação simples do princípio de inclusão-exclusão. O espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$ , com eventos elementares equiprováveis. Seja  $n$  o número sorteado; queremos saber qual é a probabilidade de que  $\text{mdc}\{n, 30\} = 1$ . Como  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , o evento que nos interessa é aquele em que  $n$  *não* é múltiplo de 2, 3 ou 5. Sejam  $M_2, M_3, M_5 \subset \Omega$  os subconjuntos formados pelos múltiplos de 2, 3 e 5, respectivamente. Temos

$$P(M_2 \cup M_3 \cup M_5) = \frac{|M_2 \cup M_3 \cup M_5|}{100}.$$

Pelo princípio de inclusão-exclusão, temos

$$\begin{aligned} |M_2 \cup M_3 \cup M_5| &= |M_2| + |M_3| + |M_5| \\ &\quad - |M_2 M_3| - |M_3 M_5| - |M_5 M_2| \\ &\quad + |M_2 M_3 M_5|. \end{aligned} \tag{4}$$

Mas o número de múltiplos de um inteiro positivo  $k$  entre 1 e  $N$  é dado por  $\lfloor N/k \rfloor$ . Logo, temos

$$|M_2| = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50, \quad |M_3| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33, \quad |M_5| = \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20.$$

Além disso,

$$|M_2 M_3| = \lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \rfloor = 16, \quad |M_3 M_5| = \lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \rfloor = 6, \quad |M_5 M_2| = \lfloor \frac{100}{5 \cdot 2} \rfloor = 10,$$

bem como

$$|M_2 M_3 M_5| = \lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \rfloor = 3.$$

# Exemplo 1

Substituindo estes valores em (4), concluimos que  $|M_2 \cup M_3 \cup M_5| = 74$ .  
Portanto, a probabilidade desejada é

$$1 - P(M_2 \cup M_3 \cup M_5) = 1 - \frac{74}{100} = \frac{26}{100},$$

ou seja, 26%.



## Exemplo 2

### Exemplo

*Um baralho convencional de 52 cartas é embaralhado e as cartas são divididas em quatro pilhas de 13 cartas cada uma. Qual é a probabilidade de que haja um ás em cada pilha?*

**Solução:** Denotemos por  $E$  o evento em questão. O número total de maneiras distintas de se dividir o baralho em quatro pilhas de 13 cartas é dado por

$$\binom{52}{13, 13, 13, 13} = \frac{52!}{13! 13! 13! 13!}.$$

Em quantas destas maneiras há um ás em cada pilha?

Se imaginamos as pilhas numeradas de 1 a 4, vemos que há  $4!$  maneiras distintas de se colocar um ás em cada pilha.

## Exemplo 2

Restam então 48 cartas a serem distribuídas pelas quatro pilhas, com 12 em cada pilha, o que pode ser feito de

$$\binom{48}{12, 12, 12, 12} = \frac{48!}{12! 12! 12! 12!}$$

maneiras distintas.

Logo, a probabilidade desejada é

$$P(E) = \frac{4! \binom{48}{12, 12, 12, 12}}{\binom{52}{13, 13, 13, 13}} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 13}{17 \cdot 25 \cdot 49} \simeq 0.105 ,$$

Resumindo, a probabilidade de que haja um ás em cada pilha é aproximadamente 10.5%.

## Exemplo 3

O exemplo que se segue ilustra a técnica – bastante comum na resolução de problemas probabilísticos – que consiste em aumentarmos o espaço amostral até obtermos eventos elementares *equiprováveis*.

### Exemplo

*Uma urna contém  $a$  bolas azuis e  $b$  bolas brancas. Sorteiam-se bolas da urna sucessivamente, sem reposição, até que restem na urna apenas bolas de uma única cor. Qual é a probabilidade de que restem apenas bolas azuis?*

### Solução:

- Observe que, da forma como o problema é apresentado, ao final dos sorteios há somente duas possibilidades: restam na urna apenas bolas azuis – evento este que denotaremos por  $A$  – ou restam na urna apenas bolas brancas – evento este que denotaremos por  $B$ .
- Observe que  $A$  e  $B$  são eventos complementares (isto é,  $P(A) + P(B) = 1$ ).

## Exemplo 3

- É razoável imaginar que a razão entre  $P(A)$  e  $P(B)$  seja igual à razão entre o número de bolas azuis e o número de bolas brancas presentes inicialmente na urna.
- Ou seja, intuitivamente temos  $P(A)/P(B) = a/b$ , e portanto

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

- Como justificar um argumento heurístico como este? A resposta reside em se definir o espaço de probabilidade de maneira adequada.
- Nada se perde em supor que o sorteio das bolas é continuado além do ponto em que a última bola de uma das cores é sorteada, até que de fato *todas* as bolas tenham sido retiradas da urna.
- O resultado final do sorteio é uma seqüência  $x_1 x_2 \cdots x_k \cdots x_{a+b}$  em que cada  $x_k$  é igual a  $a$  (bola azul) ou  $b$  (bola branca). Os resultados que definem o evento  $A$  são precisamente as seqüências tais que  $x_{a+b} = a$ .

## Exemplo 3

- Mas sabemos que o número total de seqüências de comprimento  $a + b$  formadas com  $a$  símbolos iguais a 'a' e  $b$  símbolos iguais a 'b' é dado por

$$\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a! b!},$$

- Se os sucessivos sorteios são realmente aleatórios, então cada uma dessas seqüências tem a mesma probabilidade, ou seja

$$P(x_1 x_2 \cdots x_k \cdots x_{a+b}) = \frac{a! b!}{(a+b)!}.$$

- Logo, basta contarmos quantas seqüências terminam em 'a'.
- Isto também sabemos: há

$$\binom{a+b-1}{b}$$

seqüências com esta propriedade.

## Exemplo 3

Portanto, a probabilidade desejada é

$$\begin{aligned} P(A) &= \binom{a+b-1}{b} \frac{a! b!}{(a+b)!} \\ &= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)! b!} \frac{a! b!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}, \end{aligned}$$

o que concorda com o resultado do argumento heurístico feito no início.

## Exemplo 4

O exemplo a seguir é clássico.

### Exemplo

*Numa sala de aula há  $n$  alunos. Qual é a probabilidade de que dois desses alunos façam aniversário no mesmo dia?*

### Solução:

- Seja  $E$  o evento de que pelo menos dois alunos fazem aniversário no mesmo dia. Para obtermos  $P(E)$ , calculamos a probabilidade do evento complementar  $E^c$ .
- Adotamos a hipótese simplificadora de que ninguém faz aniversário no dia 29 de fevereiro, e ordenamos os alunos de alguma forma (por ordem alfabética, por exemplo).
- Assim, o espaço amostral consiste de todas as possíveis  $n$ -uplas de datas, o que fornece um total de  $365^n$  possíveis  $n$ -uplas, todas *equiprováveis*.

## Exemplo 4

- Em quantas dessas  $n$ -uplas não há coincidências de datas?
- Simples: o número de tais  $n$ -uplas é o número de *arranjos* de  $n$  datas distintas, escolhidas dentre as 365 possíveis, ou seja,  $365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$ .
- Logo,

$$P(E^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) .$$

- Portanto, temos

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) .$$



## Exemplo 4

- Observe que  $P(E^c)$  é igual a zero se  $n > 365$ , o que é razoável: se há mais de 365 datas de aniversário, ao menos duas delas devem coincidir.
- Isto não é surpreendente.
- O que talvez seja surpreendente é que para  $n \geq 23$  já temos  $P(E) > 0.5$ .
- Em outras palavras, com 23 ou mais pessoas numa sala, há uma probabilidade de mais de 50% de que duas delas façam aniversário no mesmo dia!