MAT 461 – Tópicos de Matemática II
Aula 1: Resumo de Probabilidade

Edson de Faria

Departamento de Matemática
IME-USP

14 de Agosto, 2013

Introdução Histórica

- O que é **probabilidade**?
- Todos temos uma ideia intuitiva de **acaso**, e do que significa dizer que um evento é *mais provável* do que outro.
- De modo um tanto ingênuo, podemos dizer que probabilidade é a quantificação dessa ideia intuitiva.
- O conceito de probabilidade originou-se em jogos de azar (ou sorte, dependendo do seu ponto de vista), e remonta aos primórdios da civilização. As evidências mais antigas de jogos de azar datam de 3500 AC.

Introdução Histórica

Primeiros estudos formais de probabilidade:

- Gerolamo Cardano, *Liber de Ludo Aleae*, século XVI.
- Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 1713.
- Pierre Simon de Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, 1812.

Tais estudos foram entremeados por contribuições de, entre outros, Christiaan Huygens, Pierre Fermat e Blaise Pascal. Estes dois últimos trocaram cartas (em 1654) discutindo problemas sobre *chances em jogos de azar* (Chevalier de Méré).

Teoria das Probabilidades: Importância

Durante os séculos XIX e XX, a Teoria das Probabilidades cresceu muito além das fronteiras dos jogos de azar. Diretamente ou por intermédio de sua irmã empírica, Estatística, possui inúmeras aplicações em contextos bastante diversos, como por exemplo:

- Matemática Atuarial e/ou Financeira (seguros, contratos, precificação de ativos de risco, modelos de ações, etc).
- Engenharia de Redes/Engenharia de Comunicação (Telefonia).
- Física: em todas as áreas (especialmente Mecânica Estatística e Mecânica Quântica).
- Biologia: sobretudo em Genética.
- Decisões Médicas/Decisões Jurídicas.
- Ciências Computacionais: Simulações, Método de Monte-Carlo, etc.
- Teoria da Informação.

Cumpre notar que **Probabilidade** $\neq$ **Estatística** !

- **Probabilidade** é uma área da Matemática que cuida de estruturar (axiomatizar) o conceito de chance, e desenvolver suas propriedades.
- **Estatística** é uma ciência *empírica*, que procura modelar o mundo real através de ferramentas probabilísticas.

A aplicabilidade de conceitos probabilísticos ao mundo real, feita por estatísticos, depende de uma *hipótese crucial*, a saber: a de que o mundo real se comporta como assumido pelo modelo.

Motivação

Nosso objetivo neste curso é prover ferramentas para a abordagem de uma série de problemas de modelagem em que o conceito de probabilidade se faça necessário.

A título de motivação, apresentaremos na seqüência alguns exemplos de questões probabilísticas. A compreensão dos *enunciados* dessas questões requer apenas uma noção intuitiva do que significa probabilidade.

Num primeiro momento, interprete essas questões como um teste da sua intuição acerca de fenômenos aleatórios.

Ao final do curso, você saberá como resolver cada uma delas.

Problemas-Modelo

Problema (1)

O que é mais provável: acertar na mega-sena ou obter 25 caras consecutivas ao lançar uma moeda honesta 25 vezes?

Problema (2)

Há 40 alunos numa sala de aula. Quais são as chances de que dois deles façam aniversário no mesmo dia?

Problema (3)

Alice e Beto não se conhecem, mas vivem numa mesma cidade de 1 milhão de habitantes. Cada um dos dois conhece 500 habitantes, espalhados aleatoriamente pela cidade. Qual é a probabilidade de que Alice e Beto tenham pelo menos um conhecido em comum?

Problemas-Modelo

O problema a seguir costumava ser utilizado em entrevistas de candidatos a uma vaga de analista financeiro na Goldman-Sachs.

Problema (4)

Você participa de um jogo em que pode lançar um dado (honesto, de seis faces) até três vezes consecutivas, e pode escolher quando para. Ao parar, você recebe uma quantia em dinheiro correspondente a 1000 reais vezes o número (face) obtido no último lançamento do dado. Qual é a sua melhor estratégia?

Problema (5)

Um casal que você desconhece tem dois filhos pequenos. Você acaba de ser informado que um dos filhos é uma menina. Qual é a probabilidade de que o outro filho também seja uma menina: $\frac{1}{2}$ *ou* $\frac{1}{3}$*?*

O problema a seguir é um protótipo de uma certa classe de problemas estatísticos muito comuns na prática. (Exemplo: certificação de máquinas em cassinos).

Problema (6)

Maria rolou um dado honesto 1200 vezes, a afirma ter obtido as faces $1, 2, \ldots, 6$ *com as seguintes freqüências.*

$face$	1	2	3	4	5	6
$ocorrências$	196	202	199	198	202	203

Você acredita que os dados acima são realmente aleatórios, ou acredita que possam ter sido fabricados?

Aqui vai mais um exemplo de natureza lúdica.

Problema (7)

No jogo de **bridge***, os 4 jogadores são chamados de Norte,Sul, Leste e Oeste. Cada um recebe 13 cartas de um baralho convencional de 52 cartas. Se Norte e Sul possuem, entre eles, um total de 8 cartas de espadas, qual é a probabilidade de que Leste tenha todas as demais 5 cartas de espadas em sua mão?*

Problemas-Modelo

Agora um exemplo de natureza jurídica.

Problema (8)

Um crime ocorreu em Pacatópolis, e sabe-se que o criminoso é um homem adulto. Uma testemunha afirma ter visto que o criminoso possuia uma cicatriz bem abaixo do olho esquerdo, e outra acima do olho direito. Pouco após o crime, um suspeito com exatamente essas características é detido pela polícia. Não há nenhuma outra evidência contra o suspeito que o ligue ao crime. No tribunal, o procurador argumenta que apenas um em um milhão de adultos do sexo masculino possui as características físicas em questão. Com base nessa raridade, e mais o fato de que Pacatópolis tem apenas 150.000 habitantes adultos do sexo masculino, o procurador afirma em sua conclusão que as chances do suspeito ser inocente são praticamente nulas, e pede sua condenação. Qual é a sua opinião sobre esta conclusão?

O problema a seguir é bastante famoso. É conhecido como o dilema de Monty Hall.

Problema (9)

O apresentador de um programa de auditório lhe mostra três portas. Atrás de uma delas, está o automóvel dos seus sonhos. Atrás de cada uma das outras duas, há apenas uma cabra. Você escolhe uma das portas, e o apresentador então abre uma outra porta, diferente da que você escolheu. E – voilá! – há uma cabra ali. Há agora duas portas fechadas: a que você escolheu, e uma outra. Você pode agora manter sua escolha, ou mudar de opinião e escolher a outra porta. Qual é a sua melhor estratégia?

Uma das conclusões gerais que tiramos dos exemplos apresentados acima é a seguinte: Probabilidade é um conceito que tem muitas faces. Podemos interpretar probabilidade como:

- Medida de **incerteza**.
- Medida de **crença**, ou de **confiança**.
- Medida de **freqüência**.
- Medida de **informação**.

Ferramenta essencial: Análise Combinatória

Uma das principais ferramentas utilizadas em problemas probabilísticos (discretos) é *contagem*. É por aqui que começaremos.

Apesar de sua aparente simplicidade, contar é uma arte, muitas vezes surpreendentemente sutil.

O ato de contar remonta obviamente aos primórdios da história humana. Mas a investigação detalhada dos processos de contagem só teve início muito mais tarde. O primeiro estudo sistemático do assunto parece ter sido o manuscrito de Blaise Pascal [1] (1623–1662) intitulado *Traité du triangle arithmétique*, escrito em 1653 mas publicado apenas em 1665. É nessa obra que Pascal introduziu pela primeira vez o famoso triângulo de números que hoje leva seu nome.
Nesta primeira parte do curso, recordaremos algumas técnicas simples de contagem.

[1] Juntamente com Pierre de Fermat (1601?–1665), Pascal é um dos pais da moderna teoria de probabilidades.

Princípios de Contagem

As ferramentas de contagem apresentadas aqui são as mais comumente utilizadas na *praxis* probabilística: arranjos, combinações, permutações. Lidaremos aqui com conjuntos finitos. Denotaremos por $|A|$ a *cardinalidade* de A.

Proposição (1)

Se $f : A \to B$ é uma bijeção, então $|A| = |B|$. □

Esta proposição traduz a essência do que é contar: é estabelecer correspondências biunívocas entre conjuntos.

Um dos princípios mais simples é o *princípio da soma*.

Proposição (2)

Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ *e os conjuntos* A_i *são dois a dois disjuntos então* $|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. □

Por exemplo, se Alice tem 12 garfos, 8 facas e 10 colheres, então ela tem um total de $12 + 8 + 10 = 30$ talheres. Bastante óbvio.

Outro princípio simples é o *princípio do produto*.

Proposição (3)

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são conjuntos finitos quaisquer então temos* $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$. □

Aqui,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \;=\; \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1,\; a_2 \in A_2,\; \ldots,\; a_n \in A_n\}$$

é o produto cartesiano dos n conjuntos A_i, $1 \leq i \leq n$.

Exemplo (1)

Numa vila habitam quinze grandes famílias. Cada família possui uma anciã, mãe de cinco filhas, e cada filha é mãe de três meninas. Quantas mulheres há na vila?

Solução: Há várias maneiras de se efetuar a contagem. Eis aqui uma. Distinguimos três gerações no problema: o conjunto de matriarcas M, o conjunto de suas filhas F e o conjunto de suas netas N. Sabemos que $|M| = 15$.

Pelo princípio do produto, $|F| = 15 \cdot 5 = 75$, bem como $|N| = 15 \cdot 5 \cdot 3$ (por quê?).

Logo, pelo princípio da soma, temos

$$|M \cup F \cup N| \;=\; |M| + |F| + |N| \;=\; 15 + 75 + 225 \;=\; 315 \;,$$

ou seja, há 315 mulheres na vila.

A idéia de arranjo é certamente familiar. Um *arranjo* de objetos é simplesmente a disposição desses objetos numa seqüência. Do ponto de vista formal, um arranjo de k objetos escolhidos de uma coleção $\mathcal{C}$ de n objetos é uma função $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathcal{C}$.

Podemos distinguir entre dois tipos de arranjos: com repetição ou sem repetição. O primeiro caso corresponde a funções f arbitrárias; o segundo diz respeito apenas àquelas funções f que são injetivas.

A cardinalidade do conjunto de todas as possíveis funções $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathcal{C}$ é n^k, como se pode verificar facilmente. Que dizer do número de arranjos sem repetição? A resposta é dada pelo seguinte resultado.

Arranjos, Permutações, Combinações

Proposição (4)

O número de possíveis arranjos de k objetos escolhidos sem repetição de um conjunto de n objetos distintos é dado por

$$A_{n,k} \;=\; n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\ .$$

Prova: Em cada arranjo em questão, há n possíveis escolhas para o primeiro objeto; efetuada uma escolha, há $n-1$ possíveis escolhas para o segundo objeto; e assim sucessivamente até restarem $n-k+1$ possíveis escolhas para o k-ésimo objeto do arranjo. Logo, pelo princípio do produto, há $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ arranjos possíveis, como afirmado.

Exemplo

Um clube tem 20 sócios e pretende eleger um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro, sem que possa haver acúmulo de funções. Quantas chapas distintas são possíveis?

Solução: Trata-se obviamente de um problema de arranjos de 3 objetos escolhidos de um universo de 20 objetos. São arranjos sem repetição, pois um mesmo sócio não pode concorrer a mais do que um cargo. Logo, o número de possíveis chapas (formadas por 3 candidatos) é
$A_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Um caso especial de arranjo sem repetição é digno de nota. Se o número de objetos a serem alocados coincide com o número de lugares disponíveis, ou seja, se $n = k$, então cada arranjo dos n objetos é chamado de *permutação* dos n objetos.

Proposição (5)

O número de possíveis permutações de n objetos é $P_n = n!$

Prova: Isto é evidente, pois $P_n = A_{n,n}$ por definição, e $A_{n,n} = n!$, pela Proposição 4.

Exemplo

Oito pessoas participam de um concurso classificatório, sem empates possíveis. Quantas classificações finais são possíveis?

Solução: Claramente, a resposta é $8! = 40320$, que é o número de permutações dos oito candidatos.