MAT 5798 – Medida e Integração
Resolução da Primeira Prova

Prof. Edson de Faria

22 de Junho de 2014

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, e seja G_f o gráfico de f, ou seja:

$$G_f \;=\; \{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \;\subset\; \mathbb{R}^2 \;.$$

(a) Prove que G_f é um Boreliano do plano;

(b) Prove que a medida de Lebesgue de G_f é igual a zero.

Solução:

(a) Como f é contínua, o gráfico G_f é fechado em $\mathbb{R}^2$; em particular, G_f pertence à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^2$.

(b) Escreva $G_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, onde

$$G_n = G_f \cap ([-n, n] \times \mathbb{R}) \;.$$

Cada G_n é um Boreliano, e basta mostrar que a medida de Lebesgue de G_n é igual a zero, para todo $n \geq 1$. Fixemos n. Dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [-n, n]$ são tais que $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon/n$ (pois f é *uniformemente contínua* no intervalo fechado $[-n, n]$). Seja $k \geq 1$ inteiro tal que $nk^{-1} < \delta$, e particione o intervalo $[-n, n]$ em k subintervalos $J_{1,n}, J_{2,n}, \ldots, J_{k,n}$ de igual comprimento ($= n/k$). Então $f(J_{i,n})$ é um intervalo de comprimento $< \epsilon/n$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Considere os retângulos $R_{i,n} = J_{i,n} \times f(J_{i,n}) \subset \mathbb{R}^2$, para $i = 1, 2, \ldots, k$, e observe que

$$\lambda_2(R_{i,n}) < \frac{n}{k} \cdot \frac{\epsilon}{n} \;=\; \frac{\epsilon}{k} \;.$$

Temos claramente $G_n \subset \bigcup_{i=1}^{k} R_{i,n}$, e portanto:

$$\lambda_2(G_n) \;\leq\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_2(R_{i,n}) \;\leq\; k \cdot \left(\frac{\epsilon}{k}\right) \;=\; \epsilon \;.$$

Como ϵ é arbitrário, concluimos que $\lambda_2(G_n) = 0$, $\forall\, n \geq 1$.

2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável Lebesgue com a seguinte propriedade. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, temos:

$$\lambda(A \cap (a,b)) \;\leq\; \frac{b-a}{2} \;. \tag{1}$$

Prove que $\lambda(A) = 0$.

Solução:

Escrevendo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A \cap [n, n+1))$ se necessário, podemos supor que A é limitado, de modo que $\lambda(A) < \infty$. Como vimos em aula, a medida de Lebesgue é *regular*. Isto significa que, dado $\epsilon > 0$, existe um aberto $G \subset \mathbb{R}$ tal que $G \supseteq A$ e $\lambda(G) < \lambda(A) + \epsilon$. Como G é aberto, podemos escrever $G = \bigcup I_n$, onde $\{I_n\}$ é uma coleção finita ou enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Assim, aplicando (1) temos:

$$\lambda(A) \;=\; \sum \lambda(A \cap I_n) \;\leq\; \frac{1}{2} \sum \lambda(I_n) \;=\; \frac{1}{2}\lambda(G) \;<\; \frac{1}{2}(\lambda(A) + \epsilon) \;.$$

Disso se segue que $\lambda(A) < \epsilon$, e como ϵ é arbitrário, deduzimos que $\lambda(A) = 0$, como solicitado.

3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade (*i.e.*, $\mu(X) = 1$). Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) > n - 1$. Prove que $\mu(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$.

Solução:

Seja $E = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Como $\mu(X) = 1$, para mostrarmos que $\mu(E) > 0$ é suficiente mostrarmos que $\mu(E^c) < 1$. Mas:

$$\begin{aligned}
\mu(E^c) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i^c) \\
&=\; \sum_{i=1}^{n} [1 - \mu(A_i)] \\
&=\; n - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \;<\; n - (n-1) \;=\; 1 \;.
\end{aligned}$$

Obviamente, na última linha utilizamos a hipótese sobre os A_i's (a saber, que $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) > n - 1$).

4. Calcule o limite abaixo e justifique seus cálculos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n \left[x(1+x^2)\right]^{-1} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx \ .$$

Solução: Este exercício se resolve com uma aplicação simples do *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue* (TCDL). Consideramos $X = [0, \infty)$ com a medida de Lebesgue. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(0) = 1$ e, para $x > 0$,

$$f_n(x) \ = \ \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \, \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Então f_n é justamente o integrando na integral acima, é uma função contínua (donde mensurável) e além disso $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo x, onde

$$g(x) \ = \ \frac{1}{1+x^2} \ ,$$

Mas claramente $g \in L^1([0, \infty))$ e de fato[1]

$$\int_0^\infty g(x)\, dx \ = \ \frac{\pi}{2} \ .$$

Portanto, pelo TCDL, e como $f_n(x) \to g(x)$ para todo $x \in [0, \infty)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx \ = \ \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \ = \ \int_0^\infty g(x)\, dx \ = \ \frac{\pi}{2} \ .$$

5. Seja $(r_n)_{n\geq 1}$ uma enumeração dos racionais em $[0, 1]$. Defina $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) \ = \ \sum_{n:\, r_n < x} 2^{-n} \ . \qquad (2)$$

(a) Prove que f é contínua em $x \in [0, 1]$ se e somente se x é irracional.

[1] Para uma demonstração rigorosa desse fato, considere $g_n = g\chi_{[0,n]}$ e aplique o teorema da convergência monótona (combinado com o teorema fundamental do cálculo).

(b) Prove que f é integrável Lebesgue.

Solução:

(a) Observe que f é uma função monótona, e portanto existem os limites *laterais* de f em cada $x \in [0,1]$. Dividimos a prova em duas partes:

(i) *A função f é descontínua em cada x racional*: Se $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, então $x = r_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponha primeiro que $x < 1$. Então, para todo $1 \geq y > x$, temos por (2):

$$f(y) - f(x) \;=\; \sum_{n \in A_{m,y}} 2^{-n} \;>\; 2^{-m} \;,$$

onde $A_{m,y} = \{n : r_m \leq r_n < y\}$. Isto mostra que

$$\lim_{y \to x+} f(y) \neq f(x)$$

e portanto f não é contínua em $x = r_m < 1$. Se $x = 1$, considera-se $y < 1$ e mostra-se que $\lim_{y \to 1-} f(y) \neq f(1)$ de maneira inteiramente análoga, de modo que f não é contínua em $x = 1$.

(ii) *A função f é contínua em cada x irracional*: Suponha agora que $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \epsilon$, e tome $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \cap \{r_1, r_2, \ldots, r_N\} = \emptyset$. Podemos supor que δ é tão pequeno que $(x-\delta, x+\delta) \subset [0,1]$. Se $y \in (x-\delta, x+\delta)$, ou seja, se $|y - x| < \delta$, seja $Q_{x,y}$ o conjunto de todos os racionais que se situam entre x e y (incluindo y, se y for racional). Como todo $r_n \in Q_{x,y}$ é tal que $n > N$, deduzimos de (2) que

$$|f(y) - f(x)| \;\leq\; \sum_{r_n \in Q_{x,y}} 2^{-n} \;\leq\; \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \;=\; 2^{-N} < \epsilon \;,$$

e portanto f é contínua em x.

(b) Podemos utilizar, por exemplo, o *Teorema da Convergência Monótona* (TCM). Para cada $n \geq 1$, defina $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) \;=\; \sum_{k \in B_{n,x}} 2^{-k} \;,$$

onde $B_{n,x} = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ e } r_k < x\}$; observe que $B_{n,x}$ é finito, com no máximo n elementos, para cada x. Então cada f_n é uma função simples, e $0 \leq f_n(x) < 1$ para todo x, e portanto $\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq 1$. Além disso, $f_n(x) \nearrow f(x)$ para todo x. Portanto, aplicando o TCM, temos que f é integrável, pois:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \;\leq\; 1\ .$$

6. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$, e sejam $f_n : X \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis limitadas que convergem uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{C}$ (necessariamente mensurável).

(a) Prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

(b) Mostre através de um exemplo que a hipótese "$\mu(X) < \infty$" não pode ser removida.

Solução:

(a) Por hipótese, para cada n existe uma constante $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Como $\mu(X) < \infty$, temos

$$\int_X |f_n|\,d\mu \leq M_n \mu(X) < \infty\ ,$$

e portanto $f_n \in L^1(X, \mu)$, $\forall n$. A hipótese também nos diz que $f_n \to f$ uniformemente; logo, dado $\epsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \;<\; \epsilon\ , \quad \forall\, x \in X\ . \tag{3}$$

Em particular, temos

$$|f(x)| \;<\; |f_N(x)| + \epsilon \;\leq\; M_N + \epsilon\ , \quad \forall\, x \in X\ .$$

Isto mostra que $f \in L^1(X, \mu)$. Por outro lado, (3) também nos mostra que

$$n \geq N \implies |f_n(x)| \;<\; |f(x)| + \epsilon\ , \quad \forall\, x \in X\ .$$

Como $g = |f| + \epsilon \in L^1(X, \mu)$ e $|f_n| \leq g$ para todo n, temos pelo TCDL:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \;=\; \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;=\; \int_X f\,d\mu\ .$$

(b) Sejam $X = \mathbb{R}$ and $\mu = \lambda =$ medida de Lebesgue, seja f a função nula, e para cada $n \geq 1$ defina $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Então temos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \;=\; \frac{1}{n} \;, \quad \forall\, n \geq 1 \;,$$

e portanto $f_n \to f$ uniformemente, mas $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1$ para todo $n \geq 1$, enquanto $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 0$. Muitos outros exemplos são possíveis.

7. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que

$$\mu\left(\{x \in X \;:\; |f(x)| > t\}\right) \;\leq\; \frac{c}{t^2} \;, \quad \forall\, t > 0 \;,$$

onde $c > 0$ é uma constante. Prove que existe outra constante $C > 0$ tal que, para todo $E \in \mathcal{A}$ com $\mu(E) < \infty$, temos:

$$\int_E |f| \, d\mu \;\leq\; C\sqrt{\mu(E)} \;. \tag{4}$$

Solução: Se $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = \infty$, não há o que provar: (4) nesse casos é trivialmente válida com $C > 0$ qualquer.

Portanto, suponha que $0 < \mu(E) < \infty$, e para $n = 1, 2, \ldots$ defina

$$E_n \;=\; \left\{ x \in E : \; \frac{2^{n-1}}{\sqrt{\mu(E)}} < |f(x)| \leq \frac{2^n}{\sqrt{\mu(E)}} \right\} \;.$$

Então $E_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \geq 1$, e a hipótese nos garante que

$$\mu(E_n) \;<\; \frac{c}{2^{2n-2}} \mu(E) \;, \quad \forall\, n \geq 1 \;.$$

Seja $E_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Então, se $x \in E \setminus E_\infty$ temos $|f(x)| \leq 1/\sqrt{\mu(E)}$. Portanto, tendo em conta que os E_n's são dois a dois disjuntos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\,d\mu &= \int_{E_\infty} |f|\,d\mu + \int_{E\setminus E_\infty} |f|\,d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\,d\mu + \int_{E\setminus E_\infty} |f|\,d\mu \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{\mu(E)}} \left(\frac{c\mu(E)}{2^{2n-2}}\right) + \frac{\mu(E\setminus E_\infty)}{\sqrt{\mu(E)}} \\
&\le \left(1 + c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}}\right)\sqrt{\mu(E)} \\
&= (1+4c)\sqrt{\mu(E)}
\end{aligned}$$

Portanto, basta tomar $C = 1 + 4c$.

8. Seja (f_n) uma seqüência de funções mensuráveis num espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \,:\, |f_n(x) - f(x)| \ge \epsilon\}\right) \;=\; 0 \;, \quad \forall\, \epsilon > 0 \;.$$

Prove que f é mensurável.

Solução:

No enunciado deste exercício, faltou colocar explicitamente a hipótese de que o espaço de medida é *completo*. Veja a observação ao final, que apresenta um contra-exemplo na ausência dessa hipótese.

Assumimos portanto que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é completo. O enunciado do exercício nos diz que (f_n) converge *em medida* para f. A solução do exercício se segue então dos seguintes fatos:

(i) Se φ, ψ são funções definidas em X com φ mensurável e $\varphi(x) = \psi(x)$ para μ-qtp $x \in X$, então ψ é mensurável.

(ii) Se uma seqüência (f_n) de funções mensuráveis converge em medida para uma função f, então existe uma sub-seqüência que converge em quase todo ponto (para o mesmo limite).

A afirmação (i) é conseqüência imediata do fato de que o espaço de medida é completo. A afirmação (ii) foi provada em aula (mas veja abaixo). Assim, sabemos que existem uma sub-seqüência (f_{n_j}) e um conjunto $A \in \mathcal{A}$ tais que

$\mu(A^c) = 0$ e $f_{n_j}(x) \to f(x)$ para todo $x \in A$. Para cada $j \geq 1$, seja φ_j dada por $\varphi_j(x) = f_{n_j}(x)$ se $x \in A$ e $\varphi_j(x) = 0$ se $x \in A^c$; e seja φ dada por $\varphi(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $\varphi(x) = 0$ se $x \in A^c$. Então, por (i), cada φ_j é mensurável. Além disso, $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$ para *todo* $x \in X$. Logo φ é o limite pontual de funções mensuráveis, donde mensurável, e como $\varphi(x) = f(x)$ em μ-qtp x, segue-se novamente por (i) que f é mensurável.

Observação 1. Como complemento, apresentamos a prova da afirmação (ii) acima. A hipótese nos garante a existência de uma seqüência $n_j \to \infty$ tal que, para todo $j \geq 1$, o conjunto

$$E_j = \left\{ x : |f_{n_j}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j} \right\}$$

tem medida $\mu(E_j) < 2^{-j}$. Seja $E_\infty = \liminf E_j^c$. Então

$$x \in E_\infty \implies \exists\, k \geq 1 \text{ tal que } x \in E_j^c\ ,\ \forall\, j \geq k \implies f_{n_j}(x) \to f(x)\ .$$

Assim, basta mostrarmos que $\mu(E_\infty^c) = 0$. Mas

$$E_\infty^c = \limsup E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\ .$$

Como

$$\mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$$

quando $k \to \infty$, concluimos que $\mu(E_\infty^c) = 0$, como desejado. Em outras palavras, $f_{n_j}(x) \to f(x)$ para μ-qtp $x \in X$.

Observação 2. Como dissemos no início da solução, na ausência da hipótese de que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é completo, o resultado do exercício é falso. Seja $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$, e suponha que existe $F \subset E$ tal que $F \in \mathcal{A}$ (ou seja, F não é $\mathcal{A}$-mensurável). Defina $f : X \to \mathbb{R}$ por $f = \chi_F - \chi_{E \setminus F}$, e considere a seqüência (f_n) em que cada f_n é a função identicamente nula: $f_n \equiv 0$, $\forall\, n$. Então, obviamente, f *não é mensurável*, mas por outro lado temos:

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = \begin{cases} E, & \text{se } 0 < \epsilon \leq 1 \\ \emptyset, & \text{se } \epsilon > 1\ . \end{cases}$$

Como E e $\emptyset$ têm medida nula, isto mostra que (f_n) converge *em medida* para f, o que contradiz o enunciado do exercício.