MAT 5758 – Sistemas Dinâmicos I
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

12 de Abril de 2015

1. Vimos em aula que, para toda $f : X \to X$ contínua (X um espaço métrico, digamos) temos

$$\mathrm{Per}(f) \subset R(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \ .$$

Dê exemplos mostrando que cada uma das inclusões acima pode ser estrita.

2. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos e $\pi : Y \to X$ uma *semi-conjugação* (*i.e.*, $\pi \circ g = f \circ \pi$) – em outras palavras, (X, f) é um *fator* de (Y, g).

(i) Mostre que se $y \in Y$ é periódico para g, então $\pi(y) \in X$ é periódico para f. Em outras palavras, $\pi(\mathrm{Per}(g)) \subset \mathrm{Per}(f)$.

(ii) Dê um exemplo em que existe $x \in \mathrm{Per}(f)$ tal que $\pi^{-1}(x) \cap \mathrm{Per}(g) = \emptyset$.

3. Encontre todos os pontos fixos da chamada *transformação de Gauss* $T : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $T(0) = 0$ e

$$T(x) \ = \ \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \ , \quad \forall \, x \neq 0 \ .$$

[Aqui, $\lfloor \omega \rfloor$ = maior inteiro $\leq \omega$.] Mais geralmente, encontre todos os pontos periódicos de T.

***4.** Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ a transformação linear por partes da figura 1. Prove que f possui pontos periódicos de qualquer período.

5. Prove que para todo compacto $K \subset [0, 1]$ existe $f : [0, 1] \to [0, 1]$ contínua (ou mesmo C^∞) tal que $\mathrm{Fix}(f) = K$. Sob quais condições em K uma tal transformação pode ser analítica real?

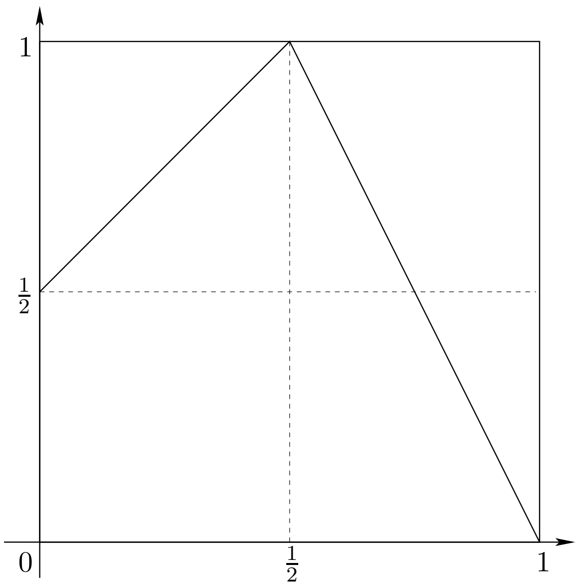

Figura 1: Uma transformação unimodal linear por partes.

6. *Subshifts de tipo finito.* Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $k \times k$ tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo par (i,j) com $0 \le i,j \le k-1$. Considere o conjunto

$$\Sigma_A \;=\; \big\{x = (x_i) :\; a_{x_i x_{i+1}} = 1\,,\,\forall\, i \in \mathbb{N}\big\} \;\subset\; \Omega_k^+\;,$$

onde $\Omega_k^+ = \{0,1,\ldots,k-1\}^{\mathbb{N}}$ é o espaço de todas as sequências unilaterais em k símbolos $(0,1,\ldots,k-1)$, com a topologia produto (sendo cada fator $\{0,1,\ldots,k-1\}$ munido da topologia discreta).[1]

(i) Prove que Σ_A é um subconjunto compacto de Ω_k^+.

(ii) Prove que $\sigma(\Sigma_A) \subset \Sigma_A$, onde $\sigma : \Omega_k^+ \to \Omega_k^+$ é o *shift* (deslocamento) unilateral dado por $\sigma((x_i)) = (x_{i+1})$.[2]

(iii) Seja $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}$ a restrição do shift σ ao subespaço invariante Σ_A, e considere o sistema dinâmico (Σ_A, σ_A). Prove que, para todo $n \ge 1$, o

[1] Note que o espaço Ω_k^+ é metrizável. Por exemplo, a função $\rho : \Omega_k^+ \times \Omega_k^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $\rho(\omega,\omega') = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|\omega_n - \omega'_n|}{k^n}$ define uma métrica em Ω_k^+ que é compatível com a topologia produto.

[2] O leitor pode verificar facilmente que o shift σ é uma transformação contínua!

conjunto $\mathrm{Per}_n(\sigma_A)$ tem cardinalidade igual ao *traço* da matriz A^n. Ou seja, o número de pontos σ_A-periódicos de período n é igual a $\mathrm{tr}(A^n)$.

(iv) Suponha que exista $m \in \mathbb{N}$ tal que todas as entradas da matriz A^m sejam positivas. Prove que $\overline{\mathrm{Per}(\sigma_A)} = \Sigma_A$. Prove também que, neste caso, o sistema dinâmico (Σ_A, σ_A) é transitivo.

7. Seja $\sigma : \Omega_k^+ \to \Omega_k^+$ o shift em k símbolos definido no exercício anterior. Mostre que o conjunto dos pontos $x \in \Omega_k^+$ cujas órbitas $\mathcal{O}_\sigma^+(x) = \{\sigma^n(x) : n \geq 0\}$ são densas em Ω_k^+ é não enumerável.

8. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos com X, Y espaços métricos compactos, e suponha que (X, f) é um fator de (Y, g).[3] Prove que $h(f) \leq h(g)$.

9. Sejam (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos compactos, e considere $X = Y \times Z$ com a métrica

$$d_X((y,z),(y',z')) \;=\; \max\{d_Y(y,y'), d_Z(z,z')\}\ .$$

Dada $g : Y \to Y$ contínua, dizemos que $f : X \to X$ é uma *extensão isométrica* de g se (i) $\pi \circ f = g \circ \pi$, onde $\pi : X \to Y$ é a projeção canônica sobre o primeiro fator ($\pi(y,z) = y$); e (ii) $\forall\, x, x' \in X$ tais que $\pi(x) = \pi(x')$, temos $d_X(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$. Prove que se $f : X \to X$ é uma extensão isométrica de $g : Y \to Y$, então $h(f) = h(g)$, ou seja, f e g possuem a mesma entropia topológica.

10. Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ a transformação do toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por

$$f(x,y) \;=\; (x+\alpha, y+x) \;\; (\mod \mathbb{Z}^2)\ ,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional.

(i) Mostre que f é um homeomorfismo.

(ii) Prove que se $U, V \subset \mathbb{T}^2$ são abertos não vazios, então existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(iii) Deduza que f é um homeomorfismo *minimal* (em particular, f é topologicamente transitivo).

[3] Assumimos tacitamente que f e g são contínuas, e que a semi-conjugação entre (Y, g) e (X, f) é contínua.

11. Prove que o homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ do exercício anterior tem entropia topológica igual a zero. [*Sugestão:* Use o resultado do exercício 8.]

12. Dê um exemplo de homeomorfismo $f : X \to X$ com X um espaço métrico compacto tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ quando $n \to \infty$, para quaisquer $x, y \in X$.

13. Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ um homeomorfismo. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) O sistema dinâmico (X, f) é minimal.

(2) Para todo $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, o conjunto $\{x, f(x), \ldots, f^N(x)\}$ é ϵ-denso em X.

(3) Para todo $U \subset X$ aberto não-vazio, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{k=-n}^{n} f^k(U) = X \ .$$

14. Calcule a entropia topológica da transformação $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, do toro tridimensional $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, dada por

$$f(x, y, z) \ = \ (x, x + y, y + z) \ \ (\mod \mathbb{Z}^3) \ .$$

15. Construa um exemplo de transformação contínua $f : X \to X$ (num espaço métrico compacto) que tem entropia positiva mas não possui pontos periódicos.