MAT2219 – Cálculo III para Química
Terceira Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

8 de junho de 2015

1. Calcule a integral de superfície de cada função escalar $\rho = \rho(x, y, z)$ dada abaixo, sobre a superfície indicada:

(a) $\rho(x, y, z) = 5$, sobre a parte da superfície $|x| + |y| + |z| = 1$ que se encontra no primeiro e segundo octantes.

(b) $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, sobre o cilindro $K = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 = 1,\ a \leq z \leq b\}$.

2. Calcule o fluxo do campo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ através da superfície S em cada um dos seguintes casos:

(a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3z^2, 4x^2, 5y^2)$ através do semi-elipsóide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$, com orientação dada pela normal unitária que aponta para seu exterior.

(b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, x+y, x+y+z)$ através da parte do plano $2x+3y+6z = 1$ que se encontra no primeiro octante, orientada pela normal unitária que aponta para o interior do sólido determinado por este plano e pelo primeiro octante.

(c) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com orientação dada pela normal unitária exterior à esfera.

3. Demonstre que o fluxo do campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (ax, by, cz)$, onde a, b, c são números reais positivos, através da esfera com centro na origem e raio $c > 0$, com orientação dada pela normal unitária exterior, é igual a $(a + b + c)V$, onde V é o volume da esfera.

4. Verifique o teorema de Stokes para o campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + 2y, 3x + z, x + y + z)$ e a superfície $S = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 = 4,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

5. Considere o campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)$. Seja C a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$.

(a) Verifique que $\boldsymbol{\lambda} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$ é uma parametrização de C.

(b) Calcule a integral de linha do campo $\boldsymbol{F}$ ao longo do caminho $\boldsymbol{\lambda}$.

(c) Considere a superfície S que consiste na porção do plano $x + y + z = 1$ dentro de C. Calcule a integral de superfície do campo $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ sobre a superfície S. Verifique que o teorema de Stokes é satisfeito.

6. Calcule a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (onde $a > 0$).

7. Seja S a superfície que é o gráfico da função $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto (a projeção de S sobre o plano xy). Seja $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ a normal unitária de S que em cada ponto tem componente z positiva. Se $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ é um campo de vetores definido numa vizinhança de S, mostre que o fluxo de $\boldsymbol{F}$ através de S é dado por

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dA \;=\; \iint_\Omega \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dxdy \; .$$

8. Se S é a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada pela normal unitária exterior, calcule a integral de superfície

$$\iint_S xz \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + x^2 \, dx \wedge dy \; .$$

9. Seja S a parte da superfície do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2x$. Calcule a integral de superfície

$$\iint_S \left(x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1 \right) dA \; .$$

10. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta sem bordo, seja $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ a normal unitária exterior a S, e seja $V \subset \mathbb{R}^3$ a região do espaço limitada por S. Mostre que

$$\mathrm{Vol}(V) \;=\; \iint_S \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{n} \, dA \; .$$

11. Calcule

$$\iint_S 4xz \, dy \wedge dz - y^2 \, dz \wedge dx + yz \, dx \wedge dy \; ,$$

onde S é a superfície do cubo limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$, orientada pela normal unitária exterior.

12. Utilize o teorema de Stokes para calcular as seguintes integrais de linha:

(a) $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, onde a curva C é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção sobre o plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

(b) $\displaystyle\int_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, onde a curva C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$, orientada de modo que sua projeção sobre o plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

(c) $\displaystyle\int_C y^2\,dx + xy\,dy + xz\,dz$, onde a curva C é a mesma curva do item anterior, com a mesma orientação dada.

13. Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ o campo de vetores cujas componentes são

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}\ ,\quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}\ ,\quad R = z\ ,$$

e seja D o toro gerado pela revolução do círculo $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $z = 0$, em torno do eixo z. Mostre que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ em todos os pontos do interior de D, mas que

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \neq 0\ ,$$

onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

14. Mostre que o campo de vetores

$$\boldsymbol{F} = y^2 z \sinh(2xz)\boldsymbol{i} + 2y\cosh^2(xz)\boldsymbol{j} + y^2 x \sinh(xz)\boldsymbol{k}$$

é conservativo, e encontre uma função potencial ϕ tal que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\phi$.

15. Dado o campo de vetores

$$\boldsymbol{F} = (x^2 - yz)\boldsymbol{i} - 2yz\boldsymbol{j} + (z^2 - 2zx)\boldsymbol{k}$$

encontre um campo de vetores $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$.

16. Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções suaves. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta sem bordo e $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ a normal unitária exterior a S, e seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o sólido limitado por S. Denotamos por

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{n}\ ,\quad \frac{\partial g}{\partial n} = \boldsymbol{\nabla} g \cdot \boldsymbol{n}$$

as derivadas direcionais de f e g (resp.) na direção de $\boldsymbol{n}$. Verifique as seguintes identidades:

(a) $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dA = \iiint_V \boldsymbol{\Delta} f\,dxdydz$

(b) $\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dA = \iiint_V f\boldsymbol{\Delta} g\,dxdydz + \iiint_V \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g\,dxdydz$

(c) $\displaystyle\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA \;=\; \iiint_V \left(f\boldsymbol{\Delta} g - g\boldsymbol{\Delta} f \right) dxdydz$

17. *Teorema de Pappus.* Seja $z = f(x)$ $(a \le x \le b)$ uma curva no plano xz, e seja S a superfície de revolução obtida girando-se esta curva em torno do eixo z. Mostre que

$$\text{Area}(S) \;=\; 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \;.$$

Deduza que $\text{Area}(S) = 2\pi L x_C$, onde L é o comprimento da curva e x_C é a coordenada x do seu baricentro.

18. Considere o *toro* – com raio interno b e raio externo a $(0 < b < a)$, e eixo de simetria igual ao eixo z – cuja equação paramétrica é

$$\boldsymbol{r}(u,v) \;=\; (a + b\cos u)\sin v\, \boldsymbol{i} + (a + b\cos u)\cos v\, \boldsymbol{j} + b\sin u\, \boldsymbol{k} \;,$$

com $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$. Calcule a área desse toro.

19. Dizemos que um campo de forças $\boldsymbol{F}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é *central* se em cada ponto $\boldsymbol{F}$ é paralelo ao vetor-posição daquele ponto, ou seja, se existe uma função $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \varphi(r)\boldsymbol{r}$ para todo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, onde $r = \|\boldsymbol{r}\|$. Mostre que o trabalho exercido por um campo de forças central (suave) ao longo de qualquer caminho fechado que não passa pela origem é sempre igual a zero. Em outras palavras, mostre que se $\boldsymbol{F}$ é central (suave) e γ é uma curva fechada em $\mathbb{R}^3$ que não passa pela origem, então

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; 0 \;.$$

20. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um sólido com densidade constante igual a 1, e seja I_z o momento de inércia deste sólido em torno do eixo z. Verifique que

$$I_z \;=\; \frac{1}{4} \iint_{\partial V} (x^3 + xy^2)\, dy \wedge dz + (x^2 y + y^3)\, dz \wedge dx \;.$$

21. Seja $\boldsymbol{p} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície fechada (isto é, sem bordo), compacta e orientada, que não contém o ponto $\boldsymbol{p}$. Considere a integral de superfície

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{p}) \;=\; \iint_S \frac{(x-a)\, dy \wedge dz + (y-b)\, dz \wedge dx + (z-c)\, dx \wedge dy}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \;.$$

(i) Mostre que $\mathcal{I}(\boldsymbol{p}) = 0$ se o ponto $\boldsymbol{p}$ não é interior a S.

(ii) Mostre que, se S é uma esfera centrada em $\boldsymbol{p}$, então $\mathcal{I}(\boldsymbol{p}) = 4\pi$.

(iii) Mostre que a igualdade em (ii) vale para qualquer superfície S (compacta, sem bordo, orientada) cujo interior contenha o ponto $\boldsymbol{p}$.

22. Considere uma coleção de cargas elétricas com magnitudes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ colocadas nos pontos $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{R}^3$, respectivamente. O potencial eletrostático ϕ associado a essa distribuição de cargas é dado por

$$\phi(\boldsymbol{r}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}_i\|} \;.$$

(Adotamos aqui unidades nas quais a constante de Coulomb é igual a 1). Sendo $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ o campo elétrico resultante, verifique que vale a *lei de Gauss*: se S é uma superfície compacta, orientada, sem bordo, que contém as cargas acima em seu interior, então

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, dA \;=\; 4\pi(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) \;.$$

[*Sugestão:* Utilize o exercício anterior.]