MAP2219 – Cálculo III para Química
Segunda Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

21 de abril de 2015

1 Integrais de linha e operadores diferenciais

1. Calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\displaystyle\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, onde C é o arco da parábola $y = x^2$ com extremos $A = (-2, 4)$ e $B = (1, 1)$, orientado de A para B.

(b) $\displaystyle\int_C \frac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^2 + y^2}$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, percorrido uma única vez no sentido anti-horário.

(c) $\displaystyle\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado com vértices $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ e $(0, -1)$, percorrido uma única vez no sentido anti-horário.

(d) $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, onde a curva fechada C é a interseção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, percorrida uma única vez no sentido anti-horário quando vista de um ponto bem acima do plano xy.

2. Considere o campo de força $\boldsymbol{F} = (3x - 4y + 2z)\boldsymbol{i} + (4x + 2y - 3z^2)\boldsymbol{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\boldsymbol{k}$, atuando sobre uma partícula que se move ao longo da elipse no plano xy com equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Calcule o trabalho que a força $\boldsymbol{F}$ efetua sobre a partícula, ao movê-la por uma volta completa (no sentido anti-horário) ao longo da elipse.

3. Sejam $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dois campos de vetores diferenciáveis. Verifique a identidade [1]

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \;=\; \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}) \; .$$

4. Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de vetores diferenciável. Verifique as seguintes identidades.

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi \boldsymbol{F}) = \varphi \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{F}$.

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \boldsymbol{F}) = \varphi \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \times \boldsymbol{F}$.

5. Seja $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^2z^2\boldsymbol{i} + z^2x^2\boldsymbol{j} + x^2y^2\boldsymbol{k}$. Calcule $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$, e mostre que $\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}$. Encontre uma função $\varphi(x,y,z)$ tal que o campo $\boldsymbol{G} = \varphi\boldsymbol{F}$ seja o gradiente de uma função C^1.

6. Calcule o valor da integral

$$\int_C (2xy^3 - y^2\cos x)\, dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\, dy \; ,$$

onde C é o arco da parábola $2x = \pi y^2$ que liga os pontos $A = (0,0)$ a $B = (\frac{\pi}{2}, 1)$, orientado de A para B.

2 Teorema de Green

7. Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\int_C y^2\, dx + x\, dy \; ,$$

onde C é o círculo de centro na origem e raio 2.

8. Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo. Seja $C \subset \Omega$ uma curva fechada simples, e seja $R \subset \Omega$ a região limitada por C.

(a) Verifique que

$$\int_C uv\, dx + uv\, dy \;=\; \iint_R \left\{ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} dxdy \; .$$

[1] Introduzimos aqui os operadores diferenciais *divergente* e *rotacional* de um campo de vetores. Escrevendo $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, denotamos por $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ o *divergente* de $\boldsymbol{F}$, e denotamos por

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \;=\; \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \;=\; \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

o *rotacional* de $\boldsymbol{F}$. Além disso, se $\varphi(x,y,z)$ é uma função escalar, denotamos por $\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$ o *gradiente* de φ.

(b) Verifique que

$$\frac{1}{2}\int_C \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy \;=\; \iint_R \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) dxdy \;.$$

9. Seja R a região do plano limitada por uma curva fechada simples C. Suponha que C é descrita na forma paramétrica por duas funções de classe C^1:

$$x \;=\; X(t)\;,\quad y \;=\; Y(t)\;,\quad a \le t \le b\;.$$

Usando o teorema de Green, mostre que

$$\text{Area}\,(R) \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{vmatrix}\, dt\;.$$

10. Calcule a área da região do plano limitada pela *hipociclóide* cuja equação em coordenadas cartesianas é:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\;,\quad \text{onde } a > 0\;.$$

11. Qual é o valor da integral de linha do exercício 6 quando C é o contorno do paralelogramo com vértices $(0,0), (3,0), (5,2)$ e $(2,2)$ percorrido no sentido anti-horário?