MAT2219 – Cálculo III para Química
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

02 de março de 2015

1 Integrais duplas

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\iint_Q xy(x+y)\,dxdy$, $Q=[0,1]\times[0,1]$.

(b) $\displaystyle\iint_Q (x\sin y - ye^x)\,dxdy$, $Q=[-1,1]\times[0,\pi/2]$.

(c) $\displaystyle\iint_Q |\cos(x+y)|\,dxdy$, $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

(d) $\displaystyle\iint_Q f(x+y)\,dxdy$, $Q=[0,2]\times[0,2]$, onde $f(t)=$ maior inteiro $\leq t$.

2. Em cada um dos itens abaixo, faça um esboço gráfico da região de integração e calcule a integral dupla correspondente.

(a) $\displaystyle\iint_\Omega (1+x)\sin y\,dxdy$, onde $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ é o quadrilátero de vértices $(0,0),(1,0),(1,2),(0,1)$.

(b) $\displaystyle\iint_\Omega x^2y^2\,dxdy$, onde $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ é a região no primeiro quadrante limitada pelas hipérboles $xy=1$ e $xy=2$ e as retas $y=x$ e $y=4x$.

3. *Utilizando integrais duplas*, calcule o volume do sólido do $\mathbb{R}^3$ determinado pelos três planos coordenados e o plano $x+2y+3z=6$.

4. Em cada um dos itens abaixo, $f(x,y)$ denota uma função para a qual as hipóteses do teorema de Fubini estão satisfeitas. Faça um esboço da região de integração e inverta a ordem de integração.

(a) $\displaystyle\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\right]dy$

(b) $\displaystyle\int_1^4\left[\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\right]dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi\left[\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\,dy\right]dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y^2} f(x,y)\,dx\right]dy$

5. Em cada item abaixo, determine o centróide da região do plano limitada pelas curvas dadas.

(a) $y = x^2$; $x + y = 2$

(b) $x - 2y + 8 = 0$; $x + 3y + 5 = 0$; $x = -2$; $x = 4$

(c) $y = \sin x$; $y = 0$ $(0 \leq x \leq \pi)$

(d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $x = 0$, $y = 0$

6. Uma placa metálica plana é limitada por um arco da parábola $y = 2x - x^2$ e pelo segmento de reta $0 \leq x \leq 2$ no eixo dos x. Calcule a massa total da placa, sabendo que a densidade do metal no ponto (x, y) é $(1 - y)/(1 + x)$.

7. Calcule as seguintes integrais utilizando coordenadas polares (a denota uma constante positiva):

(a) $\displaystyle\int_0^{2a} \left[\int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\, dy \right] dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{a} \left[\int_0^{x} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy \right] dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \left[\int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\, dy \right] dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{a} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} (x^2 + y^2)\, dx \right] dy$

8. Utilizando uma transformação linear conveniente, calcule a integral

$$\iint_S (x - y)^2 \sin(x + y)\, dxdy \ ,$$

onde S é o paralelogramo com vértices nos pontos $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$.

9. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(u, v) = (x, y)$, onde

$$x = u + v \ , \quad y = v - u^2 \ .$$

(a) Calcule o determinante Jacobiano $J(u, v) = \det DT(u, v)$.

(b) Sendo Δ o triângulo com vértices $(0, 0), (0, 2), (2, 0)$ no plano uv, faça um esboço de sua imagem $S = T(\Delta)$ no plano xy, e expresse a área de S como uma integral dupla sobre Δ.

(c) Calcule $\displaystyle\iint_S (x - y + 1)^{-2}\, dxdy$.

10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a região limitada pela parábola $x = (y - 4)^2$ e a reta $x = 4$. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação completa de Ω ao redor do eixo x.

11. A *leminiscata de Bernoulli* é uma curva fechada no plano xy com equação

$$(x^2 + y^2)^2 \;=\; 2a^2(x^2 - y^2) \;,$$

onde $a > 0$ é uma constante.

(a) Escreva a equação da leminiscata em coordenadas polares.

(b) Calcule a área da região do plano interior à leminiscata.

2 Integrais triplas

12. Calcule as seguintes integrais triplas:

(a) $\displaystyle\iiint_V (x^2y + y^2z)\, dxdydz$, onde $V = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

(b) $\displaystyle\iiint_V x^2yz\, dxdydz$, onde V é o tetraedro com vértices nos pontos $(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

(c) $\displaystyle\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, onde V é o sólido limitado pelo elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \;=\; 1 \;.$$

13. Utilizando integrais triplas e coordenadas cilíndricas, calcule o volume do sólido do $\mathbb{R}^3$ limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e pelo plano $z = 0$.

14. Suponha que o sólido do exercício anterior tem densidade constante igual a $\rho > 0$. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo z.

15. Calcule o volume do sólido situado acima do plano $z = 0$ e limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e inferiormente pelo cone $z^2 \sin^2\alpha = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha$, onde α é o *ângulo de abertura do cone*, satisfazendo $0 < \alpha \leq \pi/2$.

16. Calcule as coordenadas do centróide do sólido dado no problema anterior.

17. Considere o sólido S obtido como a interseção $S = C_1 \cap C_2$ dos cilindros sólidos $C_1 = \{(x,y,z) : \, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ e $C_2 = \{(x,y,z) : \, x^2 + z^2 \leq a^2\}$. Calcule o volume de S.

18. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que

$$\int_0^x \left[\int_0^v \left[\int_0^u f(t)\, dt\right] du\right] dv \;=\; \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\, dt \;.$$

19. Calcule o momento de inércia de uma bola de raio R com massa M e densidade constante em torno de um eixo passando pelo centro.

20. Seja S o sólido do $\mathbb{R}^3$ situado acima do plano $z = 0$ e limitado por duas esferas de centro na origem e raios $0 < a < b$. Assumindo que a densidade de S é constante, determine o seu centro de massa.