MAT 5798 – Medida e Integração
Quarta Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

2 de Junho de 2014

1 Espaços L^p

1. Prove que $L^\infty(X,\mu)$ é um espaço normado completo.

2. Demonstre a desigualdade de *Chebyshev-Markov*: Se $f \in L^p(X,\mu)$ e $\alpha > 0$, então:

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\} \;\leq\; \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p .$$

3. Sejam f e f_n ($n \geq 1$) funções em $L^p(X,\mu)$ com $1 \leq p < \infty$ e suponha que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Prove que a seqüência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge em medida para f. [*Sugestão:* Utilize o exercício anterior.]

4. Determine em que condições vale a *igualdade* nas desigualdades de Hölder e Minkowski.

5. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos o *produto de convolução* de f e g por:

$$f * g(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

(i) Prove que o produto de convolução é uma função que está bem-definida em Lebesgue-qtp $x \in \mathbb{R}^n$ e é integrável, isto é, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$; além disso,

$$\|f * g\|_1 \;\leq\; \|f\|_1 \|g\|_1 \;.$$

(ii) Mais geralmente, prove que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e temos:

$$\|f * g\|_p \;\leq\; \|f\|_1 \|g\|_p \;.$$

Esta é a chamada *desigualdade de Young*.

Observação: O produto de convolução é claramente comutativo, isto é, satisfaz $f * g = g * f$, e é também distributivo sobre a operação de soma de funções. Assim, o item (i) acima mostra que $L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma *álgebra de Banach*.

6. Seja $1 \leq p < \infty$. Prove que $f \in L^p(X, \mu)$ se e somente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \mu \{x \in X : |f(x)| > 2^n\} \; < \; \infty \; .$$

7. Suponha que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida com $\mu(X) = 1$ (ou seja, um espaço de probabilidade). Sejam f, g duas funções mensuráveis não-negativas tais que $f(x)g(x) \geq 1$ para μ-qtp $x \in X$. Prove que

$$\left(\int_X f \, d\mu \right) \left(\int_X g \, d\mu \right) \; \geq \; 1 \; .$$

8. Considere o intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue.

(i) Prove que $L^p[0, 1]$ é um espaço (de Banach) *separável*, para todo $1 \leq p < \infty$.

(i) Prove que $L^\infty[0, 1]$ *não* é separável. [*Sugestão*: Considere as funções $\varphi_x = \chi_{[0,x]}$ para $0 \leq x \leq 1$]

9. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida em que X é métrico e localmente compacto, $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel e μ é uma medida de Borel *regular*. Considere o espaço $C_c(X)$ das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ com suporte compacto. Prove que $C_c(X)$ é um subespaço linear *denso* de $L^p(X, \mu)$, para todo $1 \leq p < \infty$.

10. *Desigualdade de Hardy*. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função em $L^p_{\mathbb{R}}((0, \infty))$, onde $1 < p < \infty$. Defina $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) \; = \; \frac{1}{x} \int_0^x f(y) \, dy \; .$$

Prove que

$$\|F\|_p \; \leq \; \frac{p}{p-1} \|f\|_p \; .$$

Em outras palavras, a correspondência $T : f \mapsto F$ define um operador linear contínuo em $L^p_{\mathbb{R}}((0, \infty))$. [*Sugestão*: Prove primeiramente a desigualdade de Hardy para funções f que sejam contínuas com suporte compacto em $(0, \infty)$, e depois aplique o exercício anterior.]