

MAT 5798 – Medida e Integração

Terceira Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

6 de Junho de 2014

1 Teoremas de Fubini e Lebesgue-Radon-Nikodym

1. Considere a identidade

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy ,$$

válida para todo $x > 0$.

(i) Use a identidade acima e o teorema de Fubini para calcular a integral

$$\iint_R e^{-xy} \sin x \, dx dy ,$$

onde $R = [0, b] \times [0, \infty)$, de duas maneiras diferentes.

(ii) Deduza de (i) que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

(iii) A função $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \neq 0 ; \quad g(0) = 1 ,$$

é integrável em $[0, \infty)$? Justifique.

2. Seja μ uma medida de Borel *finita* em $\mathbb{R}$, e seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \mu((-\infty, x])$. Prove que para todo $c \in \mathbb{R}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} [f(x+c) - f(x)] \, dx = c\mu(\mathbb{R}) .$$

3. Dê exemplo de uma função $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável Lebesgue tal que

$$\int_0^a \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = 0 \quad ; \quad \int_0^1 \left[\int_0^b f(x, y) dy \right] dx = 0$$

para quaisquer $0 \leq a, b \leq 1$ e que no entanto seja *não nula* num conjunto de medida (bidimensional) de Lebesgue positiva.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \leq y < x + 1 ; \\ -1 & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x + 1 \leq y < x + 2 ; \\ 0 & \text{nos demais pontos } (x, y) \end{cases}$$

Prove que as funções $x \mapsto f(x, y)$ (para cada $y \in \mathbb{R}$) e $y \mapsto f(x, y)$ (para cada $x \in \mathbb{R}$) são integráveis Lebesgue, e que as integrais iteradas de f existem mas são distintas, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy \neq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx .$$

Por que isto não contradiz o teorema de Fubini?

5. Sejam $X = Y = [0, 1]$ e seja $\mathcal{B}$ a σ -álgebra de Borel de $[0, 1]$. Considere os espaços de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, onde μ é a medida de Lebesgue e ν é a medida da contagem. Se $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\} \subset X \times Y$ é a diagonal, mostre que a integral de χ_{Δ} no espaço produto,

$$\int_{X \times Y} \chi_{\Delta} d(\mu \otimes \nu) ,$$

bem como as integrais iteradas

$$\int_X \int_Y \chi_{\Delta}(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \quad , \quad \int_Y \int_X \chi_{\Delta}(x, y) d\mu(x) d\nu(y) ,$$

são todas distintas. Por que isto não contradiz o teorema de Fubini?

6. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam ν uma medida com sinal *finita* e μ uma medida positiva, ambas definidas em $(X, \mathcal{A})$. Prove que $\nu \ll \mu$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall E \in \mathcal{A} , \quad \mu(E) < \delta \implies |\nu(E)| < \epsilon .$$

7. Mostre que a conclusão do exercício 6 pode ser falsa se a medida com sinal ν não for finita. [*Sugestão:* Considere $X = (0, 1)$ com a σ -álgebra de Borel e tome $d\nu(x) = dx/x$ e $d\mu(x) = dx$.]

8. Sejam ν uma medida com sinal e μ uma medida positiva, ambas definidas num mesmo espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Prove que $\nu \ll \mu$ se e somente se $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$.

9. Seja ν uma medida com sinal num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Prove que para todo $E \in \mathcal{A}$ temos:

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\nu \right| : f \text{ mensurável, } |f| \leq 1 \right\} .$$

10. *Regra da cadeia para a derivada de Radon-Nikodym.* Dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e três medidas positivas μ, ν, ρ definidas nesse mesmo espaço, suponha que $\nu \ll \mu$ e $\rho \ll \nu$. Prove que $\rho \ll \mu$ e que

$$\frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} .$$

11. *Esperança condicional.* Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma sub- σ -álgebra. Suponha que f é uma função não-negativa $\mathcal{A}$ -mensurável, e seja ν_f a medida definida em $(X, \mathcal{B})$ dada por

$$\nu_f(B) = \int_B f d\mu , \quad \forall B \in \mathcal{B} .$$

Seja $\mu_* = \mu|_{\mathcal{B}}$ a restrição da medida μ à sub- σ -álgebra $\mathcal{B}$.

(i) Prove que $\nu_f \ll \mu_*$;

(ii) Seja $g = d\nu_f/d\mu_*$ a derivada de Radon-Nikodym de ν_f em relação a μ_* , e observe que g é $\mathcal{B}$ -mensurável. Prove que

$$\int_B g d\mu = \int_B f d\mu , \quad \forall B \in \mathcal{B} .$$

A função g é chamada de *esperança condicional* de f com relação a $\mathcal{B}$, e escrevemos $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$.

(iii) Se f é integrável em $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mas não necessariamente não-negativa, definimos:

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(f^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(f^-|\mathcal{B}) .$$

Prove que $f = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ se e somente se f é $\mathcal{B}$ -mensurável.

(iv) Prove que se h é uma outra função $\mathcal{B}$ -mensurável tal que $\int_B h d\mu = \int_B f d\mu$ para todo $B \in \mathcal{B}$, então $h \equiv \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ em μ -qtp.

2 Função maximal de Hardy-Littlewood

12. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e suponha que f não é nula em λ -qtp. Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^n}, \quad \forall |x| \geq 1,$$

onde $f^* = \mathcal{M}f$ é a função maximal de Hardy-Littlewood associada a f . Deduza que f^* não é integrável.

13. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|(\log|x|)^2} & \text{se } 0 < |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Prove que f é integrável.

(b) Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x| \log\left(\frac{1}{|x|}\right)}, \quad \forall 0 < |x| \leq \frac{1}{2}.$$

(c) Deduza que $f^* = \mathcal{M}f$ não é localmente integrável neste exemplo.

3 Diferenciabilidade, funções de variação limitada e funções absolutamente contínuas

Nos exercícios abaixo, denotamos por $BV[a, b]$ a classe de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que têm *variação limitada* em $[a, b]$. A saber, se $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b$ e $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, escrevemos

$$\text{Var}(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

e definimos a *variação* de f em $[a, b]$ como sendo $\text{Var}(f) = \sup_{\mathcal{P}} \text{Var}(f; \mathcal{P})$. Se $\text{Var}(f) < \infty$, dizemos que f tem *variação limitada*.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é *absolutamente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots, N$ são sub-intervalos de

$[a, b]$ dois a dois disjuntos e $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon$. Denotamos por $AC[a, b]$ a classe das funções absolutamente contínuas definidas em $[a, b]$. observe que toda função absolutamente contínua é necessariamente uniformemente contínua.

14. Prove que toda função de variação limitada $f \in BV[a, b]$ pode ser escrita sob a forma $f = \varphi - \psi$, com $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções monótonas não-decrescentes.

15. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana, isto é, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para alguma constante positiva M . Prove que $f \in BV[a, b]$.

16. Sejam $\alpha, \beta > 0$ e considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e

$$f(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \quad \forall x \neq 0.$$

(a) Determine todos os valores de α, β para os quais $f \in BV[0, 1]$.

(b) Verifique que se $\alpha = 2$ e $\beta = \frac{3}{2}$, então $f \in BV[0, 1]$, f' existe mas é *ilimitada* em $[0, 1]$.

17. Mostre que $BV[a, b]$ é uma *álgebra* sobre os reais. Em outras palavras, mostre que se $f, g \in BV[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então as funções αf , $f + g$ e fg estão em $BV[a, b]$.

18. Prove que toda função absolutamente contínua em $[a, b]$ é de variação limitada em $[a, b]$, ou seja, $AC[a, b] \subset BV[a, b]$.

19. Se $f \in AC[a, b]$, escreva $f = \varphi - \psi$ como no exercício 14 (com φ, ψ monótonas não-decrescentes). Prove que φ e ψ são absolutamente contínuas.

20. Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. Como vimos em aula, F é derivável em Lebesgue quase todo ponto. Prove que

$$\int_a^b F'(x) dx \leq F(b) - F(a).$$

Dê um exemplo para mostrar que a desigualdade acima pode ser estrita.

21. Suponha que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua. Prove que $F'(x)$ existe em Lebesgue-qtp $x \in [a, b]$ e que

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$