MAT 5798 – Medida e Integração
Segunda Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

23 de Abril de 2014

1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida qualquer e $f \in L^1(\mu)$. Prove que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f| \, d\mu < \epsilon$ para todo $E \in \mathcal{A}$ com $\mu(E) < \delta$.

2. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Se f é uma função mensurável em X, prove que f é integrável se e somente se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\})$$

converge.

3. Considere no intervalo $[0, 1]$ a medida de Lebesgue λ. Todo $x \in [0, 1]$ admite uma expansão decimal da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

onde $x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para todo $n \geq 1$. De fato, tal expansão é única exceto quando $x = p/10^k$ com p inteiro: um tal x admite duas expansões distintas (neste caso, considere a expansão com $x_n = 9$ para todo n suficientemente grande). Considere o conjunto

$$K = \{x \in [0, 1] : x_n \neq 7 \, , \, \forall \, n \geq 1\} \, ,$$

e defina $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 0$ se $x \in K$ e $f(x) = \min\{n : x_n = 7\}$ se $x \in [0, 1] \setminus K$. Prove que f é mensurável Lebesgue e calcule $\int_{[0,1]} f \, d\lambda$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável Lebesgue, e considere as seqüências $(\phi_n)_{n \geq 1}$ e $(\psi_n)_{n \geq 1}$ definidas por $\phi_n = f\chi_{[-n,n]}$ e $\psi_n = \min(f, n)$, respectivamente. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f - \phi_n| \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f - \psi_n| \, d\lambda = 0 \, .$$

5. Utilizando o teorema de Beppo-Levi, calcule

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x} \right)^2 dx \; .$$

6. Mostre que para todo $n \geq 0$ temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k x^n \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k dx \;=\; n!$$

7. Sejam $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções integráveis Lebesgue tais que

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \, d\lambda \;\leq\; \frac{1}{n^2} \;, \quad \forall\, n \geq 1 \; .$$

Prove que $f_n \to f$ Lebesgue-qtp.

8. Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, uma seqüência de funções mensuráveis Lebesgue tais que

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 \, dx \leq 100 \, , \quad \forall\, n \geq 1 \; ,$$

e tais que $f_n \to 0$ Lebesgue-qtp em $[0,1]$. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)| \, dx \;=\; 0 \; .$$

[*Sugestão: Utilize o teorema de Egoroff e a desigualdade de Cauchy-Schwarz.*]

***9.** Construa uma função $f : [0,1] \to [0,1]$ com as seguintes propriedades:

(1) f é uma bijeção.

(2) $E \subseteq [0,1]$ é mensurável Lebesgue se e somente se $f(E)$ é mensurável Lebesgue.

(3) Se $E \subseteq [0,1]$ é mensurável Lebesgue, então $\lambda(f(E)) = \lambda(E)$

(4) $f((\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

***10.** Construa uma função mensurável Lebesgue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não-negativa, com a propriedade de que $\int_a^b f \, d\lambda = \infty$ para quaisquer $a < b$.

11. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Prove a seguinte versão generalizada do teorema da convergência dominada de Lebesgue. Sejam $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $f_n \to f$ e $g_n \to g$ μ-qtp;

(ii) $|f_n| \leq g_n$ para todo $n \geq 1$;

(iii) $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu$.

Então $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$.

12. Seja f a função dada por $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ para $0 < x < 1$, e $f(x) = 0$ para $x \notin (0,1)$. Seja $\{r_n : n \geq 1\}$ uma enumeração dos racionais, e defina $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ por

$$g(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n) \; .$$

(i) Prove que g é integrável Lebesgue; em particular, a série acima converge para Lebesgue quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Prove que g é descontínua em todo ponto, e que de fato g é ilimitada em qualquer intervalo (não-degenerado) da reta.

(iii) Prove que $g^2 = g \cdot g$ *não* é integrável Lebesgue em *nenhum intervalo*.

13. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Se $f, g : X \to \mathbb{C}$ são funções mensuráveis, defina

$$\rho(f,g) \;=\; \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu \; .$$

(i) Prove que ρ é uma métrica no espaço $\mathbb{M}(X, \mathbb{C})$ das funções mensuráveis complexas definidas em X módulo a relação de equivalência que identifica duas funções se elas assumem os mesmos valores em μ-quase todo ponto.

(ii) Prove que uma seqüência (f_n) em $\mathbb{M}(X, \mathbb{C})$ converge para $f \in \mathbb{M}(X, \mathbb{C})$ na métrica ρ se e somente se $f_n \to f$ em medida.

14. Sejam f_n $(n \geq 1)$ e f funções mensuráveis num espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Prove que $f_n \to f$ em medida se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) \;<\; \epsilon \; , \quad \forall \, n > N \; .$$

***15.** *Segundo Lema de Borel-Cantelli.* Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade (ou seja, $\mu(X) = 1$). Um elemento $E \in \mathcal{A}$ é chamado, na linguagem probabilística, de *evento*. Dado um evento E escrevamos, por conveniência notacional, $E^0 = E^c$ e $E^1 = E$. Dizemos que os eventos $E_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, são *independentes* se para quaisquer $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e toda k-upla $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \{0, 1\}^k$ temos

$$\mu\left(E_{n_1}^{i_1} \cap E_{n_2}^{i_2} \cap \cdots \cap E_{n_k}^{i_k}\right) \;=\; \mu(E_{n_1}^{i_1})\mu(E_{n_2}^{i_2}) \cdots \mu(E_{n_k}^{i_k}) \;.$$

(i) Utilizando o teorema da convergência dominada, prove que se $E_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, são independentes, então

$$\int_X \prod_{n=1}^{\infty} 2^{-\chi_{E_n}(x)} \, d\mu(x) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\mu(E_n)\right) \;.$$

(ii) Deduza de (i) o segundo lema de Borel-Cantelli: se os eventos $E_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, são independentes e $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$, então *com probabilidade* 1 *uma infinidade dos eventos* E_n *ocorre simultaneamente*, ou seja

$$\mu\left(\limsup E_n\right) \;=\; 1 \;.$$

(iii) Prove a afirmação em (ii) sem utilizar integração.

(iv) Dê um exemplo para mostrar que em (ii) a hipótese de independência não pode ser removida.