MAT 5798 – Medida e Integração
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

17 de Março de 2014

1 Álgebras e σ-álgebras.

1. Dada uma seqüência $(E_n)_{n\geq 1}$ de sub-conjuntos de um conjunto X, sejam

$$E_* = \liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

e

$$E^* = \limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

Mostre que para todo $x \in X$ temos:[1]

$$\chi_{E_*}(x) \ = \ \liminf \chi_{E_n}(x) \ ,$$

bem como

$$\chi_{E^*}(x) \ = \ \limsup \chi_{E_n}(x) \ .$$

2. Seja $\mathcal{S}$ uma σ-álgebra *infinita*.

(i) Prove que $\mathcal{S}$ contém uma seqüência infinita de elementos (conjuntos) dois a dois disjuntos.

(ii) Prove que a cardinalidade de $\mathcal{S}$ é maior ou igual à cardinalidade do contínuo.

[1] Se $A \subseteq X$ é um conjunto, denotamos por χ_A a *função indicadora* ou *característica* de A, definida por $\chi_A(x) = 1$ para todo $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus A$

3. Mostre que uma álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra se e somente se $\mathcal{A}$ é fechada por uniões enumeráveis crescentes.

4. Dizemos que um subconjunto E de um espaço topológico X *possui a propriedade de Baire* se $E = G \Delta P$, onde $G \subseteq X$ é aberto e $P \subseteq X$ é *magro*.[2] Prove as seguintes afirmações.

(i) Um conjunto $E \subseteq X$ possui a propriedade de Baire se e somente se $E = F \Delta Q$, onde $F \subseteq X$ é fechado e $Q \subseteq X$ é magro.

(ii) Se $E \subseteq X$ possui a propriedade de Baire, então E^c também possui.

(iii) A classe $\mathcal{B}a(X) = \{E \subseteq X : E \text{ possui a propriedade de Baire}\}$ é uma σ-álgebra.

(iv) A σ-álgebra $\mathcal{B}a(X)$ é gerada pelos abertos de X juntamente com os subconjuntos magros de X.

2 Espaços de medida. Medida de Lebesgue na reta.

5. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e sejam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ medidas definidas em $(X, \mathcal{A})$. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais não-negativos.

(i) Mostre que $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n$ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$.

(ii) Se μ_j, $j = 1, \ldots, n$, são medidas *de probabilidade*, dê uma condição necessária e suficiente sobre os coeficientes a_j, $j = 1, \ldots, n$, para que μ também seja uma medida de probabilidade.

6. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ uma função *finitamente aditiva*. Prove que μ é uma medida se, e somente se, a seguinte propriedade é satisfeita: Para toda seqüência *descendente*[3] $(A_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{A}$ com $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, temos $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

7. Seja A_n uma seqüência de subconjuntos de um conjunto X. Dizemos que A_n *converge* para um conjunto $A \subseteq X$, e escrevemos $A_n \to A$, se

$$\liminf A_n = \limsup A_n = A \ .$$

[2]Dizemos que P é *magro*, ou *de primeira categoria de Baire*, se P está contido numa reunião enumerável de fechados de interior vazio.

[3]Dizemos que $(A_n)_{n\geq 1}$ é *descendente* se $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq$ for all $n \geq 1$.

Seja agora $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Se $A, A_n \in \mathcal{A}$ $(n \geq 1)$ e $A_n \to A$, então $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

8. Seja $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida, e fixe $E \in \mathcal{S}$. Defina $\mu_E : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ por $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Prove que μ_E é uma medida.

9. Seja $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Prove a fórmula geral de *inclusão-exclusão*: Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \ .$$

10. Seja $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida, e suponha que $E \in \mathcal{S}$ é σ-finito, ou seja, $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ com $E_n \in \mathcal{S}$ e $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ uma coleção de conjuntos *dois a dois disjuntos*. Prove que a sub-coleção $\{C \in \mathcal{C} : \ \mu(E \cap C) \neq 0\}$ é enumerável.

11. Seja μ^* uma medida exterior em X. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ são μ^*-mensuráveis e dois a dois disjuntos, então para todo $E \subseteq X$ temos

$$\mu^*\left(E \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) \ .$$

12. Seja $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$.

(i) Considere a relação $\sim$ em $\mathcal{S}$ definida abaixo:

$$\text{If } E, F \in \mathcal{S} \quad \text{then } E \sim F \iff \mu(E \Delta F) = 0 \ .$$

Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

(ii) Seja $\rho : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ dada por $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Prove que ρ é uma *semi-métrica*. Em particular, ρ induz uma *métrica* $\tilde{\rho}$ em $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}/_{\sim}$.

*(iii) Prove que $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\rho})$ é um espaço métrico *completo*.

13. Seja λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, e seja $E \subset \mathbb{R}$ mensurável com $\lambda(E) > 0$

(i) Mostre que para todo $0 < \alpha < 1$ existe um intervalo aberto I com $\lambda(E \cap I) > \alpha\lambda(I)$.

(ii) Prove que o conjunto $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ contém um intervalo da forma $(-\epsilon, \epsilon)$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

14. Seja $V \subset \mathbb{R}$ o conjunto de Vitali descrito em aula. Prove que se $E \subset V$ é mensurável Lebesgue, então $\lambda(E) = 0$ (onde λ é, como antes, a medida de Lebesgue).

15. Prove que se $E \subseteq \mathbb{R}$ é mensurável Lebesgue com medida positiva, então E contém um conjunto não-mensurável Lebesgue.