

MAT 5798 – Medida e Integração

Exercícios de Revisão de Espaços Métricos

Prof. Edson de Faria

30 de Março de 2014

Observação: O objetivo desta lista é motivar uma *revisão* dos conceitos e fatos básicos sobre Topologia de Espaços Métricos que serão utilizados livremente ao longo do curso.

1. Seja $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função dada por

$$d(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n| \},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Mostre que d é uma métrica, e faça um esboço da bola de centro na origem e raio 1 nessa métrica.

2. Quais das seguintes funções $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definem métricas em $\mathbb{R}$?

(i) $d(x, y) = (x - y)^2$

(iii) $d(x, y) = |x - 3y|$

(ii) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

(iv) $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$

3. Dado um conjunto infinito X , seja $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função dada por $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Mostre que d é uma métrica. Quais subconjuntos do espaço métrico resultante (X, d) são: (i) abertos? (ii) fechados? (iii) compactos?

4. Seja X um espaço métrico. Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências convergentes em X tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, mostre que $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

5. Seja X é um espaço métrico. Denotamos por $\text{int}(E)$ o *interior* do conjunto $E \subseteq X$, ou seja, o conjunto de todos os $x \in E$ para os quais existe uma vizinhança $V \ni x$ tal que $V \subseteq E$.

(i) Prove que E é aberto se e somente se $E = \text{int}(E)$.

- (ii) Prove que o complemento de $\text{int}(E)$ é o fecho do complemento de E .
- (iii) O interior de E é sempre igual ao interior de $\overline{E}$? Justifique.
- (iv) É verdade que $\overline{E} = \overline{\text{int}(E)}$? Justifique.

6. Seja K um subconjunto do espaço métrico X . Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) K é compacto, isto é, toda cobertura de K por abertos de X admite uma subcobertura finita.
- (ii) K é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência de elementos de K possui uma subsequência convergente para um elemento de K .
- (iii) K é completo¹ e totalmente limitado².

7. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que E é compacto se e somente se E é fechado e limitado.

8. Assuma que $K \subseteq X \subseteq Y$. Mostre que K é compacto no espaço métrico (Y, d) se e só se, K é compacto no espaço métrico (X, d) .

9. Dê um exemplo de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ cujos pontos de acumulação formam um conjunto infinito enumerável.

10. Sejam $a < b$ reais. Dê um exemplo de cobertura aberta do intervalo (a, b) que não admite subcobertura finita.

11. Seja $E \subset [0, 1]$ o conjunto dos números cuja expansão decimal contém apenas os algarismos 5 e 7. O conjunto E é: (i) enumerável? (ii) denso em $[0, 1]$? (iii) compacto? (iv) perfeito³? Justifique suas respostas.

12. Existe um conjunto perfeito $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$? Justifique.

13. Dizemos que um espaço métrico X é *separável* se X contém um subconjunto enumerável denso em X . Prove que $\mathbb{R}^n$ é separável.

14. Prove que todo conjunto perfeito não-vazio $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é não enumerável.

15. Dizemos que uma coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos abertos de um espaço métrico X é uma *base* para X se para todo aberto $V \subseteq X$ e todo $x \in V$ existe $W \in \mathcal{C}$ tal que $x \in W \subseteq V$.

¹Dizemos que $E \subseteq X$ é *completo* se toda sequência de Cauchy de elementos de E converge para um ponto de E .

²Um conjunto $E \subseteq X$ é *totalmente limitado* se para todo $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita $B_1, B_2, \dots, B_n$ de bolas de raio ϵ com $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$.

³Um subconjunto fechado $P \subseteq X$ de um espaço métrico X é *perfeito* se P não possui pontos isolados, isto é, se todo elemento de P é um ponto de acumulação de P .

- (i) Prove que todo espaço métrico separável possui uma base enumerável.
- (ii) A recíproca do item (i) é verdadeira? Justifique.

16. Seja K um espaço métrico compacto. Prove que K possui uma base enumerável, e deduza que K é separável.

17. *Conjunto de Cantor e Função de Cantor-Lebesgue.* Seja C o conjunto dos números $x \in [0, 1]$ que admitem uma expansão em base 3 da forma

$$x = (0.a_1a_2 \dots a_n \dots)_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad (1)$$

onde cada a_n é igual a 0 ou 2.

- (i) Mostre que C é precisamente o conjunto triádico de Cantor descrito em aula.
- (ii) Verifique que C é compacto, perfeito, e totalmente desconexo.
- (iii) Dado $x \in K$, com representação ternária dada por (1), escreva $b_n = a_n/2$ para todo $n \geq 1$, e defina

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \in [0, 1].$$

Mostre que a função $\varphi : C \rightarrow [0, 1]$ se estende a uma função monótona não-decrescente, contínua, e sobrejetiva $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a qual é constante em cada componente conexa de $[0, 1] \setminus C$.

18. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo. É verdade que $\overline{E}$ e $\text{int}(E)$ são também conexos? Justifique.

19. Prove que todo subconjunto *convexo* de $\mathbb{R}^n$ é também *conexo*.

20. Um subconjunto E de um espaço métrico X é *magro* (ou *de primeira categoria de Baire*) se $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ onde cada F_n é um conjunto fechado de interior vazio. Dizemos que X é um *espaço de Baire* se nenhum aberto não-vazio de X é magro. Prove que as seguintes afirmações sobre X são equivalentes:

- (i) X é um espaço de Baire.
- (ii) Toda interseção enumerável de abertos densos de X é densa em X .

- (iii) Se $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ e cada X_n é fechado, então o aberto $\bigcup_{n=0}^{\infty} \text{int}(X_n)$ é denso em X .

21. Demonstre o *teorema de Baire*: Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

22. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é *contínua no ponto* $x_0 \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ é tal que $d_X(x, x_0) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Se f é contínua em todos os pontos de X , dizemos simplesmente que f é *contínua*.

- (i) Prove que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto aberto $V \subseteq Y$ a pré-imagem $f^{-1}(V) \subseteq X$ é um conjunto aberto em X .
- (ii) Prove que se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $K \subseteq X$ é compacto, então $f(K) \subseteq Y$ é compacto.
- (iii) Prove que se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $E \subseteq X$ é conexo, então $f(E) \subseteq Y$ é conexo.

23. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que f é contínua? Justifique.

24. Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto fechado, e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

- (i) Prove que existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$.
- (ii) Mostre que o resultado do item (i) é falso se E não é fechado.

25. Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado, e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua.

- (i) Prove que f é limitada em E , ou seja, que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E$.
- (ii) Mostre que o resultado do item (i) é falso se E não é limitado.

26. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(0,0) = 0$ e, para todo $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Prove que f é limitada em $\mathbb{R}^2$, que f não é contínua em $(0,0)$, mas que apesar disso a restrição de f a qualquer reta de $\mathbb{R}^2$ é contínua!

27. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(0,0) = 0$ e, para todo $(x,y) \neq (0,0)$,

$$g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^6}.$$

Prove que g é ilimitada em toda vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, que g não é contínua em $(0,0)$, mas que apesar disso a restrição de g a qualquer reta de $\mathbb{R}^2$ é contínua!

28. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional;} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } x = \frac{m}{n} \text{ na forma irredutível.} \end{cases}$$

Prove que f é contínua em todo x irracional, e que f possui uma descontinuidade simples em todo x racional.

29. Seja $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ uma enumeração de todos os racionais pertencentes ao intervalo $[0,1]$. Para todo $x \in [0,1]$, seja $E_x = \{n \in \mathbb{N} : r_n \leq x\}$. Defina $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n \in E_x} \frac{1}{2^n}.$$

Determine o conjunto dos pontos de descontinuidade de f .

***30.** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com a propriedade do valor intermediário: Se $f(a) < c < f(b)$, então existe ξ entre a e b tal que $f(\xi) = c$. Suponha também que para todo $r \in \mathbb{Q}$ o conjunto de todos os x tais que $f(x) = r$ é fechado. Prove que f é contínua.

31. Seja $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ uma função contínua. Prove que existe $\bar{x} \in [0,1]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ (tal $\bar{x}$ é chamado de um *ponto fixo* de f).

32. *Teorema do Ponto Fixo de Banach.* Seja X um espaço métrico completo, e seja $T : X \rightarrow X$ uma *contração*⁴.

⁴Dizemos que uma transformação $\phi : X \rightarrow Y$ entre os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é uma *contração* se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in X$. Note que toda contração é necessariamente contínua.

- (i) Prove que existe um único $\bar{x} \in X$ tal que $T(\bar{x}) = \bar{x}$ (ou seja, T possui um único ponto fixo).
- (ii) Prove que para todo $x_0 \in X$ a sequência $x_0, x_1 = T(x_0), \dots, x_n = T(x_{n-1}), \dots$ converge para $\bar{x}$.

33. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função de um espaço métrico X em outro espaço métrico Y . Assuma que f é injetiva em X , de modo que a função inversa $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ existe. Mostre que se X é compacto e f é contínua, então f^{-1} é contínua.⁵

34. Seja $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto, perfeito e de interior vazio, e considere o conjunto triádico de Cantor C (exercício 17). Prove que existe um homeomorfismo (crescente) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(C) = K$.

⁵Em outras palavras, f é o que chamamos um *homeomorfismo* de X sobre $f(X)$.