MAT6209 – Dinâmica Complexa
Segunda Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

21 de Outubro de 2013

Observação: O objetivo dos exercícios 3–7 desta lista é levar o aluno a elaborar uma prova completa do *teorema da classificação das componentes conexas* do conjunto de Fatou de uma transformação racional. Como alguns dos passos são certamente não-óbvios, o aluno está convidado a consultar as referências apresentadas no início do curso para auxiliá-lo na resolução desses exercícios.

1 Generalidades

1. Seja T uma transformação de Möbius tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, e suponha que T *não* é a identidade. Dizemos que:

(i) T é *elíptica* se existe $p \in \mathbb{D}$ tal que $T(p) = p$;

(ii) T é *hiperbólica* se existem $p, q \in \partial\mathbb{D}$ distintos tais que $T(p) = p$ e $T(q) = q$;

(iii) T é *parabólica* se existe um único $p \in \partial\mathbb{D}$ tal que $T(p) = p$.

Prove que se T é uma transformação de Möbius com $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, distinta da identidade, então ou T é elíptica, ou é hiperbólica, ou é parabólica.

2. Considere o grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ dos automorfismos do disco unitário.

(i) Mostre que todo elemento $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ que é elíptico, hiperbólico ou parabólico gera de maneira natural um subgrupo a 1-parâmetro de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ (isto é, existe um homomorfismo de grupos $\theta_T : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ com $T \in \mathrm{im}(\theta_T)$).

(ii) Mostre que se $S, T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ comutam, isto é, $S \circ T = T \circ S$, e T é distinto da identidade, então S pertence ao subgrupo a 1-parâmetro gerado por T.

2 Classificação das componentes de $\mathcal{F}(f)$

Nos exercícios abaixo, f denota uma função racional de grau $d \geq 2$ da esfera de Riemann, e $\mathcal{F}(f)$ e $J(f)$ denotam, respectivamente, os conjuntos de Fatou e Julia de f. Além disso, $\mathrm{Rat}_d(\widehat{\mathbb{C}})$ *denota o espaço das funções racionais de grau d. Lembramos ao leitor que toda componente conexa de $\mathcal{F}(f)$ é uma superfície de Riemann hiperbólica, isto é, admite o disco unitário como recobrimento universal holomorfo.*

3. Seja U uma componente conexa de $\mathcal{F}(f)$ que é fixa por f, ou seja, $f(U) = U$. Prove que se existe um ponto $z_0 \in U$ tal que a seqüência $(f^n(z_0))_{n\geq 0}$ escapa de qualquer compacto de U, então existe $w \in \partial\mathbb{U}$ ponto fixo de f tal que $f^n(z) \to w$ para todo $z \in U$.

4. Seja U como no exercício anterior. Suponha que $f : U \to U$ é uma *contração estrita* da métrica de Poincaré de U, e que existem um ponto $w \in U$ e uma seqüência de iterados $f^{n_i}(z_0)$ de um ponto $z_0 \in U$ tais que $f^{n_i}(z_0) \to w$ quando $n_i \to \infty$. Então w é um ponto fixo de f e $f^n(z) \to w$ quando $n \to \infty$, para todo $z \in U$.

5. Seja Γ um subgrupo discreto do grupo de isometrias do disco unitário com a métrica de Poincaré. Moste que se Γ não é abeliano, então o conjunto dos automorfismos $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tais que $\phi\Gamma\phi^{-1} \subset \Gamma$ é discreto.

6. Seja $\pi : \mathbb{D} \to U$ o recobrimento universal holomorfo de um domínio hiperbólico $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, e suponha que o grupo dos automorfismos deste recobrimento é não-abeliano (em outras palavras, $\pi_1(U)$ é não-abeliano). Seja $\varphi : U \to U$ uma transformação holomorfa que é também um recobrimento, e suponha que existem $z, w \in U$ tais que $f^{n_i}(z) \to w$ para alguma subseqüência $n_i \to \infty$. Prove que φ é um *automorfismo de ordem finita*, ou seja, que existe $m \geq 1$ tal que $\varphi^m = \mathrm{id}$. [*Sugestão:* Utilize o resultado do exercício anterior.]

7. Utilizando os exercícios 3,4,5 e 6, prove o *teorema da classificação das componentes* do conjunto de Fatou de uma função racional. A saber, prove que se $U \subseteq \mathcal{F}(f)$ é uma componente conexa do conjunto de Fatou de f e U é fixa por f, então uma e somente uma das seguintes possibilidades ocorre:

(i) U é um *domínio atrator*: existe um ponto fixo atrator $w \in U$ e U é a *bacia imediata de atração de w*;

(ii) U é um *domínio super-atrator*: existe um ponto fixo super- atrator $w \in U$ e U é a *bacia imediata de atração de w*;

(iii) U é um *domínio parabólico*: existe um ponto fixo parabólico $w \in \partial U$ e $f^n(z) \to w$ para todo $z \in U$;

(iv) U é um *disco de Siegel*: existem um ponto fixo irracionalmente indiferente $w \in U$ e uma transformação bi-holomorfa $h : \mathbb{D} \to U$ com $h(0) = w$ que conjuga $f|_U$ a uma rotação irracional do disco unitário;

(v) U é um *anel de Herman*: existem $0 < r < 1$ e uma transformação bi-holomorfa $h : \{z : r < |z| < 1/r\} \to U$ tais que h conjuga $f|_U$ a uma rotação irracional do anel $\{z : r < |z| < 1/r\}$.

3 Tópicos complementares

8. *Teorema de Denjoy-Wolff*. Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica, $f \neq \mathrm{id}$. Prove que se f *não* é uma transformação de Möbius elíptica, então existe $p \in \partial\mathbb{D}$ tal que $f^n(z) \to p$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

9. Sejam $f, g \in \mathrm{Rat}_d(\widehat{\mathbb{C}})$ $(d \geq 2)$. Mostre que se f e g comutam, *i.e.* $f \circ g = g \circ f$, então $J(f) = J(g)$.

10. Dada $f \in \mathrm{Rat}_d(\widehat{\mathbb{C}})$, $d \geq 2$, seja

$$\Gamma \ = \ \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) : \ \gamma \circ f = f \circ \gamma\} \ .$$

Prove que Γ é um grupo finito.

11. Seja $f \in \mathrm{Rat}_2(\widehat{\mathbb{C}})$ dada por $f(z) = z^2 + i$. Mostre que $J(f) \subset \mathbb{C}$ é uma *dendrite*, isto é, um conjunto compacto, conexo, simplesmente conexo e de interior vazio. [*Sugestão:* Utilize o teorema da classificação das componentes.]

12. Seja $f \in \mathrm{Rat}_2(\widehat{\mathbb{C}})$ dada por $f(z) = 1 - 2/z^2$. Mostre que $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$. [*Sugestão:* Utilize o teorema da classificação das componentes.]

13. Prove que nenhum polinômio $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ possui anéis de Herman. [*Sugestão:* Aplique o princípio do máximo para mostrar que toda componente limitada de $\mathcal{F}(f)$ é simplesmente conexa.]