MAT6209 – Dinâmica Complexa
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Edson de Faria

1 de Setembro de 2013

1 Automorfismos

1. Sejam $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ dois automorfismos, ambos distintos da identidade. Prove que ϕ e ψ comutam se e somente se eles possuem os mesmos pontos fixos[1], isto é, $\mathrm{Fix}(\phi) = \mathrm{Fix}(\psi)$.

2. A afirmação do exercício 1 é verdadeira para automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$? E de $\mathbb{C}$? Justifique.

3. Se $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ não tem pontos fixos, prove que ϕ é conjugado a uma única transformação da forma $z \mapsto z+1$, $z \mapsto z-1$ ou $z \mapsto \lambda z$ (para algum λ real > 1).

4. Prove que todo $\phi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ admite uma decomposição da forma $\phi = T_1 \circ \Lambda \circ J \circ T_2$, em que T_1, T_2 são translações, Λ é uma homotetia (com centro em $z = 0$), e J ou é a identidade ou é a inversão $z \mapsto 1/z$.

5. Definimos o *cross-ratio* (ou *razão projetiva*) de quatro pontos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ como sendo

$$\mathrm{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) \;=\; \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} \; .$$

Prove que todo automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ preserva cross-ratios. Em outras palavras, prove que se $\phi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ e $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$, então

$$\mathrm{Cr}(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) \;=\; \mathrm{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) \; .$$

Vale a recíproca? Justifique.

[1] $\mathrm{Fix}(\phi) = \{z : \phi(z) = z\}$

2 Métrica de Poincaré, lema de Schwarz, e mais automorfismos

6. Seja $ds = \rho(z)\,dz$ uma métrica conforme num aberto $U \subseteq \mathbb{C}$, onde ρ é uma função positiva de classe C^2. Mostre que a curvatura escalar de tal métrica é dada por[2]

$$\kappa \;=\; \frac{1}{\rho^4}\,\big(|\boldsymbol{\nabla}\rho|^2 - \rho\boldsymbol{\Delta}\rho\big)$$

[Consulte um bom livro de geometria Riemanniana se julgar necessário.]

7. Lembremos que a *métrica de Poincaré* no disco unitário $\mathbb{D}$ é definida por

$$d_{\mathbb{D}}s \;=\; \frac{2|dz|}{1-|z|^2}\;,$$

e que no semi-plano superior $\mathbb{H}$ ela é definida por

$$d_{\mathbb{H}}s \;=\; \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}\;.$$

Prove que tais métricas têm, ambas, curvatura constante igual a -1.

8. Sejam X e Y superfícies de Riemann hiperbólicas (isto é, cujo recobrimento universal holomorfo é isomorfo a $\mathbb{D}$). Denotemos por dist_X e dist_Y as distâncias de Poincaré em X e Y, respectivamente.

(a) Se $f : X \to Y$ é holomorfa, mostre que f contrai tais distâncias fracamente, ou seja

$$\mathrm{dist}_Y(f(z), f(w)) \;\le\; \mathrm{dist}_X(z, w)\;,\quad \forall\; z, w \in X\;.$$

(b) Mostre que se f é um recobrimento holomorfo, então f é uma *isometria local*, ou seja, a desigualdade acima torna-se uma igualdade para todo par de pontos z, w suficientemente próximos.

(c) Mostre que se f *não* é um recobrimento holomorfo, então a desigualdade do item (a) é estrita para todo par de pontos distintos $z, w \in X$. Neste caso, mostre também que se $K \subset X$ é compacto, então $f|_K$ é uma contração forte, ou seja, existe uma constante $0 < \lambda_K < 1$ tal que

$$z, w \in K \;\Longrightarrow\; \mathrm{dist}_Y(f(z), f(w)) \;\le\; \lambda_K \mathrm{dist}_X(z, w)\;.$$

[2] Aqui, $\boldsymbol{\nabla} = (\partial_x, \partial_y)$ é o operador gradiente, enquanto $\boldsymbol{\Delta} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ é o operador laplaciano.

9. Calcule explicitamente a expressão ($ds = \rho(z)\, dz$) da métrica de Poincaré de $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. [*Sugestão:* Considere $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ dada por $\phi(z) = e^{iz}$.]

10. Determine $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$.

11. Mostre que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^*)$ é isomorfo a $SO(2)$, o grupo das rotações do plano (em torno da origem).

12. Para cada $1 < r < \infty$, considere a região anular $\mathbb{A}_r = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$.

(a) Prove que $\mathbb{A}_{r_1} \simeq \mathbb{A}_{r_2}$ se e somente se $r_1 = r_2$.

(b) Prove que $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_r)$ é isomorfo ao grupo ortogonal $O(2)$.

(c) Existe algum valor de r para o qual $\mathbb{A}_r$ seja bi-holomorfo a $\mathbb{C}^*$, ou $\mathbb{D}^*$? Justifique.

13. Considere a faixa horizontal $B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$.

(a) Mostre que a função exponencial $z \mapsto w = e^z$ estabelece um bi-holomorfismo entre B e o semi-plano $S = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w > 0\}$.

(b) Deduza que a métrica de Poincaré de B é dada por

$$d_B s \;=\; \frac{|dz|}{\cos y}\ ,$$

onde $z = x + iy$.

(c) Mostre que o eixo real $\gamma_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0\} \subset B$ é uma geodésica na métrica de Poincaré de B, e que restrita a $\gamma_{\mathbb{R}}$ tal métrica coincide com a métrica euclidiana.

(d) Mostre que toda translação $T_\lambda : z \mapsto z + \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma isometria de B na métrica de Poincaré.

14. Considere novamente a situação do exercício anterior. Fixado $\lambda > 0$, seja G_λ o grupo

$$G_\lambda \;=\; \{T_\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\} \;\simeq \mathbb{Z}\ .$$

e tome o quociente $C_\lambda = B/G_\lambda$. Topologicamente, C_λ é um cilindro (verifique). A geodésica $\gamma_{\mathbb{R}}$ de B se projeta, pela transformação quociente $\pi_\lambda : B \to C_\lambda$, sobre uma geodésica fechada $\gamma_\lambda \subset C_\lambda$.

(a) Qual é o comprimento hiperbólico de γ_λ?

(b) Mostre que $C_\lambda \simeq \mathbb{A}_r$, onde r satisfaz

$$\log r \;=\; \frac{2\pi^2}{\lambda}\ .$$

O número $\mathrm{mod}(\mathbb{A}_r) = 2\pi^2/\log r$ é chamado *módulo de conformidade* de $\mathbb{A}_r$.

(c) Verifique que $\mathrm{mod}(\mathbb{A}_r)$ é um invariante conforme.

15. Seja $\mathrm{dist}_{\mathbb{D}}$ a distância de Poincaré do disco unitário.

(a) Mostre que para todo $z \in \mathbb{D}$ temos

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{D}}(0,z) \;=\; \log \frac{1+|z|}{1-|z|}\ .$$

(b) Utilizando (a), dê uma fórmula para $\mathrm{dist}_{\mathbb{D}}(z,w)$ quando $z,w \in \mathbb{D}$ são arbitrários.