MAT 0320 – Introdução à Análise Complexa
Quarta Lista de Exercícios
Integração por Resíduos

Prof. Edson de Faria

17 de novembro de 2014

1. Utilizando cálculo de resíduos, mostre que cada uma das integrais abaixo é de fato igual ao valor indicado correspondente.

(a) Função racional no integrando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{4\pi}{3}$$

(b) Círculo unitário:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

com $a > b > 0$.

(c) Ponto de ramificação:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

com $0 < \alpha < 1$.

(d) Singularidade removível:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(e) Função inteira no integrando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}$$

com $a > 0$.

(f) Pólo de ordem 2 e singularidade removível:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{3}{2e}\right)$$

(g) Logaritmo e pólos de ordem 2:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

2. Calcule a transformada de Fourier das funções abaixo:

(a) $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$

(b) $f(x) = e^{-ax^2}\sin(cx)$, $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^{-(ix+x^2)}$

3. Considere a função complexa $f(z) = \log z$ definida para todos os valores de z, exceto aqueles no semi-eixo dos reais negativos (e a origem, é claro). Mostre, utilizando as equações de Cauchy-Riemann, que $f(z)$ é analítica, e calcule sua derivada.

4. Seja $f = u + iv$ uma função analítica (u e v são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de f). Em cada um dos seguintes casos, calcule v dada u.

(a) $u = x^2 - y^2$;

(b) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

(c) $u = \cosh x \cos y$.