MAT 0320 – Introdução à Análise Complexa
Terceira Lista de Exercícios
Fórmula Integral de Cauchy

Prof. Edson de Faria

9 de outubro de 2014

1. Calcule a expansão em série de Taylor das seguintes funções analíticas nos pontos indicados:

(a) $f(z) = \sin z$, em $z_0 = \pi$;

(b) $f(z) = e^{-z^2}$, em $z_0 = 0$;

(c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, em $z_0 = 0$.

2. Utilizando a fórmula integral de Cauchy nos contornos indicados, calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z \, dz}{z(z-1)}$, onde C é o círculo de centro na origem e raio 2, orientado no sentido anti-horário;

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z \, dz}{z^2-1}$, onde C é o mesmo círculo do item (a), orientado no sentido horário.

3. Utilize a fórmula integral de Cauchy para calcular a seguinte integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+3} \, dx \ .$$

4. Calcule a integral definida

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} \ .$$

5. Utilizando a fórmula integral de Cauchy, calcule a integral imprópria

$$I_n \ = \ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n} \ ,$$

onde $n = 2, 3, \ldots$

6. Considere o polinômio $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. Utilizando o teorema de Gauss-Lucas, prove que todas as raízes da equação $P(z) = 0$ estão no interior do disco unitário.

7. Mostre que para todo $a > 0$ real vale a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1 + x^2} \, dx \ = \ \pi e^{-a} \ .$$