MAT 0320 – Introdução à Análise Complexa
Segunda Lista de Exercícios
Séries de Potências, Funções Holomorfas

Prof. Edson de Faria

15 de setembro de 2014

1 Séries de Potências

1. Determine os raios de convergência de cada uma das séries de potências abaixo.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^5 z^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n$

2. Suponha que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência $r > 0$. Mostre que cada uma das séries de potências abaixo também tem raio de convergência igual a r.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$, onde k é um inteiro positivo qualquer.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

3. Dê um exemplo de uma série de potências $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cujo raio de convergência seja exatamente 1 e tal que $f(z)$ seja contínua no disco fechado de raio 1.

4. Sejam α e β números complexos tais que $|\alpha| < |\beta|$. Determine o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3\alpha^n - 5\beta^n)\ z^n\ .$$

5. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma seqüência de números complexos tais que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ mas $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| = \infty$. Prove que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência igual a 1.

6. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma seqüência de números reais positivos, e suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \ell \;.$$

Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

7. Utilize o exercício anterior para provar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \;=\; 0 \;.$$

8. Seja α um número real qualquer. Para todo inteiro não negativo j, definimos

$$\binom{\alpha}{j} \;=\; \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \;.$$

Note que essa definição coincide com a definição usual de coeficiente binomial quando α é um inteiro positivo.

(a) Mostre que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\binom{\alpha}{j+1}}{\binom{\alpha}{j}} \;=\; 1 \;.$$

(b) Calcule o raio de convergência da *série binomial*

$$B(z) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^n \;.$$

(c) Mostre que $B(z)$ satisfaz a equação diferencial $(1+z)B'(z) = \alpha B(z)$.

9. Utilize o exercício 7 para calcular os raios de convergência de cada uma das seguintes séries de potências.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!z^n}{n^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n z^n}{n!}$

***10.** Qual é o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}(\sin n)z^n$? Justifique.

2 Funções holomorfas

11. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = x^2 + iy^2$ (onde $z = x + iy$).

(a) Prove que f é diferenciável (no sentido complexo) em todos os pontos da reta $y = x$.

(b) Prove que f não é holomorfa em nenhum aberto do plano complexo.

12. Determine todas as funções holomorfas $f = u + iv$ tais que $u(x, y) = x^2 - y^2$.

13. Prove que não existe nenhuma função holomorfa $f = u + iv$ tal que $u(x, y) = x^2 + y^2$.

14. Dado um aberto V do plano complexo, dizemos que uma função real $\varphi : V \to \mathbb{R}$ é *harmônica em* V se $\Delta\varphi = 0$, onde Δ é o operador Laplaciano, isto é:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Se $f = u + iv$ é uma função holomorfa definida em V, mostre que u e v são funções harmônicas em V.

15. Encontre todas as soluções complexas da equação $\sin z = 2$.

***16.** Encontre todas as soluções complexas da equação $e^{e^z} = 1$.