

MAT 0320 – Introdução à Análise Complexa

Primeira Lista de Exercícios

Revisão de Números Complexos

Prof. Edson de Faria

24 de agosto de 2014

1. Coloque todos os números complexos abaixo na forma polar.

(a) $1 + i$

(d) $4i$

(b) $1 + i\sqrt{2}$

(e) $-1 - i$

(c) -3

(f) $-5i$

2. Determine todos os valores complexos de z satisfazendo cada uma das seguintes equações:

(a) $z^2 = -5 + 12i$

(c) $z^2 = 2 + i$

(b) $(7 + 24i)z = 375$

(d) $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$

3. Em cada um dos casos abaixo, represente graficamente o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem a condição dada:

(a) $z\bar{z} = 1$

(c) $z + i\bar{z} + 1 + i = 0$

(b) $z + \bar{z} + 2 = 0$

(d) $z + \bar{z} + 2i = 0$

4. Seja λ um número real positivo, com $\lambda \neq 1$. Mostre que o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$|z| = \lambda|z - 1|$$

é um *círculo*. O que acontece quando $\lambda = 1$?

5. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, escreva¹

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad , \quad w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad .$$

¹Aqui, está implícito que $r = |z|, s = |w|$, bem como $\theta = \text{Arg}(z), \varphi = \text{Arg}(w)$.

Multiplicando z por w e utilizando as conhecidas fórmulas trigonométricas para $\cos(\theta + \varphi)$ e $\sin(\theta + \varphi)$, verifique que $\text{Arg}(z \cdot w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$.

6. Utilizando o exercício anterior e indução em n , prove a identidade de *De Moivre*:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta .$$

7. Utilizando a identidade de De Moivre, calcule:

(a) As raízes quadradas de $1 + \sqrt{3}i$, $\sqrt{3} - i$ e $1 + i$.

(b) As raízes cúbicas de $\sqrt{3} + i$, $1 - i$ e i .

Represente todos esses pontos graficamente no plano complexo.

8. Calcule as partes real e imaginária de $(1 + i)^{100}$.

9. Prove que para todo número natural n e todo complexo $z \neq 1$ vale a identidade:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} .$$

10. Utilizando a identidade do exercício anterior com $z = e^{i\theta}$ e tomando as partes reais de ambos os membros, verifique que a identidade

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{\sin[\frac{1}{2}\theta]} \right)$$

é válida para todo natural n e todo $0 < \theta < 2\pi$.

11. Seja n um número natural, e seja $\zeta = e^{2\pi i/n}$ (observe que ζ é uma raiz n -ésima da unidade). Mostre que para todo número complexo z temos:

$$z^n - 1 = (z - \zeta)(z - \zeta^2) \dots (z - \zeta^n) .$$

12. Determine todos os números complexos z tais que $e^z = -2$.

13. Faça um esboço gráfico de cada uma das regiões do plano complexo definidas pelas relações a seguir:

(a) $|z - 1| < 3$

(d) $-1 < \text{Re } z < 2$

(b) $|z - i + 3| \leq 5$

(e) $2 < |z| < 3$

(c) $\text{Im } z > 0$

(f) $0 < \text{Arg}(z) < \frac{2\pi}{3}$

14. Um fato interessante em teoria dos números é que se dois inteiros positivos a e b são ambas somas de dois quadrados, então o produto $a \cdot b$ também é soma de dois quadrados. Por exemplo:

$$(1^2 + 2^2)(3^2 + 4^2) = 125 = 5^2 + 10^2 .$$

Prove este fato utilizando multiplicação de números complexos.

15. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ quaisquer. Prove que

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

e interprete o resultado geometricamente.

16. Sejam P_0, P_1, \dots, P_{n-1} os vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo unitário. Prove que

$$|P_0P_1| \cdot |P_0P_2| \cdots |P_0P_{n-1}| = n.$$

17. Considere o polinômio $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. Prove que todas as raízes da equação $P(z) = 0$ estão no interior do disco unitário.