Séries Racionais Não-Comutativas

Douglas de Araujo Smigly (Bolsista PICME)
Javier Sánchez Serdà (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo
dsmigly@ime.usp.br - jsanchez@ime.usp.br

IME-USP

26° Simpósio Internacional de Iniciação Científica da Universidade de São Paulo — XXVI SIICUSP

Introdução

Neste trabalho, tivemos como objetivo de estudo as séries racionais não-comutativas e o cálculo da altura de estrela de uma série formal.

Definição 1 Seja R um semianel e A um alfabeto. Dizemos então que uma *série formal* S é uma função

$$A^* \to R$$

Onde A^* é o monoide livre de um alfabeto (conjunto finito) A e R é um semianel.

Em outras palavras, uma série formal é uma função que tem como objetivo associar a cada palavra do fechamento do alfabeto um elemento do semianel R.

A imagem por uma série formal S de uma palavra $w \in A^*$ é denominado *coeficiente* de w em S e utilizamos a seguinte notação: (S, w).

Séries racionais e reconhecíveis

Agora, iremos definir o conceito de operações racionais de $R\langle\langle A\rangle\rangle$, que será a base para a conceitualização do fecho racional.

Definição 2 Seja R um semianel e A um alfabeto. Chamaremos as operações:

- Soma $(R\langle\langle A\rangle\rangle \times R\langle\langle A\rangle\rangle \to R\langle\langle A\rangle\rangle)$
- Produto $(R\langle\langle A\rangle\rangle \times R\langle\langle A\rangle\rangle \to R\langle\langle A\rangle\rangle)$
- Estrela de Kleene $(\{S \in R\langle\langle A\rangle\rangle : (S, \varepsilon) = 0\} \to R\langle\langle A\rangle\rangle)$
- multiplicação por escalar à esquerda (à direita)

de *operações racionais* de $R\langle\langle A\rangle\rangle$.

Um subconjunto de $R\langle\langle A\rangle\rangle$ é *racionalmente fechado* se é fechado com respeito às operações racionais. O menor subconjunto contendo um subconjunto D de $R\langle\langle A\rangle\rangle$ de forma que este é racionalmente fechado é chamado *fecho racional* de D.

Uma série formal é dita *racional* se esta pertence ao fecho racional de $R\langle A\rangle$.

Definição 3 Uma série formal $S \in R\langle\langle A\rangle\rangle$ é dita *reconhecível* se existe um inteiro $n \geq 1$ e um morfismo de monoides $\mu : A^* \to \mathcal{M}_n(R)$, utilizando a estrutura multiplicativa de $\mathcal{M}_n(R)$, e duas matrizes $\lambda \in \mathcal{M}_{1\times n}(R)$ e $\gamma \in \mathcal{M}_{n\times 1}(R)$ tais que, para toda palavra ω,

$$(S, \omega) = \lambda\mu(\omega)\gamma$$

Nesse caso, chamamos a *tripla* (λ, μ, γ) de *representação linear* de S, e n sua *dimensão.*

Os conceitos de séries racionais e séries reconhecíveis são equivalentes, como estabelecido pelo

Teorema 1 (Teorema de Schützenberger) Uma série formal é reconhecível se, e somente se, esta for racional.

Uma versão para linguagens também é conhecida, por permitir equivalência dos conceitos de série regular e reconhecível.

Teorema 2 (Teorema de Kleene) Uma linguagem é racional se e somente se é reconhecível.

Minimização

Toda série racional possui representação linear da forma:

$$(\lambda, \mu, \gamma)$$

Onde $\lambda \in \mathcal{M}_{1\times n}(K)$ é uma matriz-linha, $\mu : A^* \to \mathcal{M}_n(K)$ é um morfismo de monoides e $\gamma \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ é uma matriz-coluna. Dizemos que a dimensão da reprensentação linear é n. Chamaremos o processo de obtenção da representação linear de menor dimensão possível de *minimização*.

Definição 4 Um Autômato Finito Determinístico $\mathcal{A}$ é uma quíntupla (Q, A, δ, q_0, F) em que:

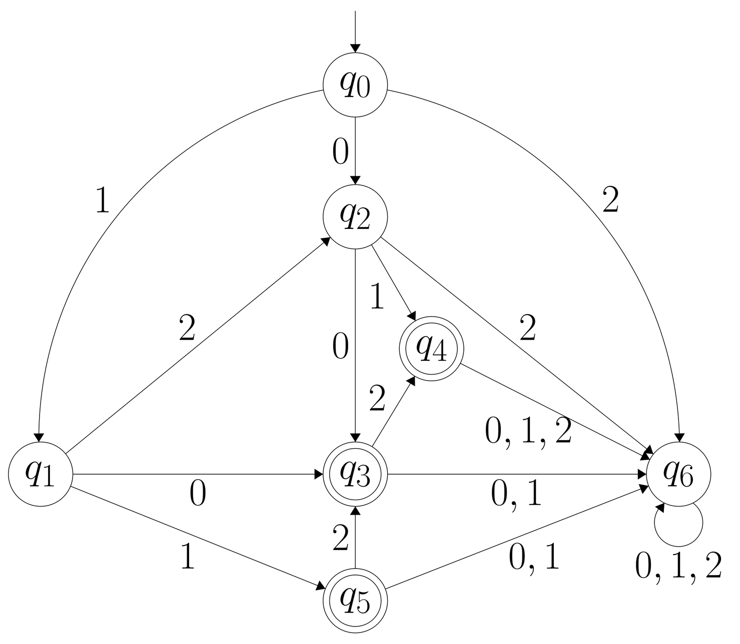
- Q é um conjunto finito de estados;
- A é um alfabeto;
- $\delta \colon Q \times A \to Q$ é uma função de transição;
- q_0 é o estado inicial;
- F é um conjunto de estados finais.

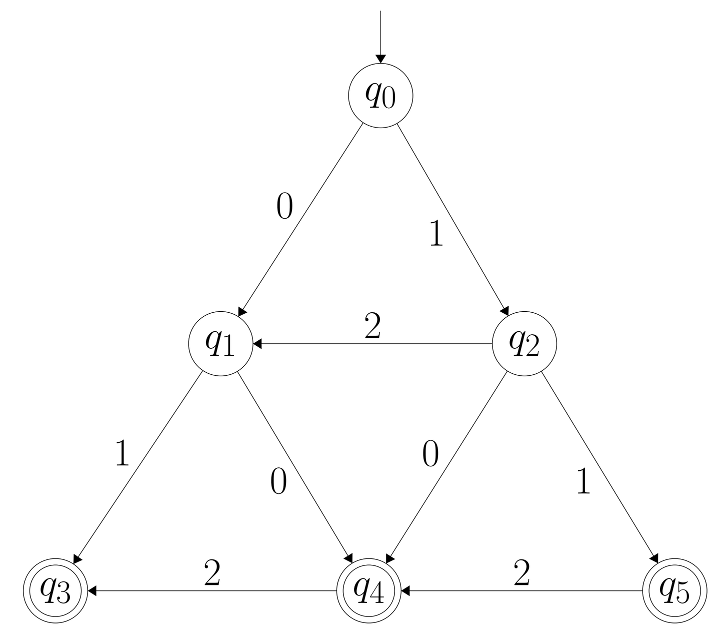
Podemos pensar no problema de minimização como uma maneira de se obter um autômato com o menor número possível de estados que identifica a série.

Como exemplo, observe abaixo um autômato finito determinístico para a linguagem

$$L = \{11, 112, 1122, 10, 102, 120, 1202, 121, 00, 002, 01\}$$

e sua versão minimizada:





Definição 5 Uma *representação linear minimal* de uma série S é a representação linear de S com menor dimensão entre todas as representações possíveis.

Teorema 3 Uma representação linear (λ, μ, γ) de dimensão n de uma série S é minimal se, e somente se, tomando $\mathfrak{M} = \mu(K\langle A\rangle)$,

$$\lambda\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{1\times n}(K) \qquad \mathfrak{M}\gamma = \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$$

Definição 6 Duas representações lineares (λ, μ, γ) e $(\lambda', \mu', \gamma')$ são chamadas *semelhantes* se existe uma matriz m tal que $\lambda' = \lambda m, \mu' = m^{-1}\mu(\omega)m, \gamma' = m^{-1}\gamma$.

Vamos agora enunciar um importante teorema, que revela uma conexão entre as representações minimais possíveis para uma série.

Teorema 4 Duas representações lineares minimais são semelhantes.

Altura de Estrela

Vamos estudar agora a altura de estrela de séries racionais. Para isso, precisaremos de alguns conceitos básicos sobre grafos.

Definição 7 Um *grafo direcionado* (também chamado de *dirigido* ou *orientado*) $G = (V, E)$ consiste de

- um conjunto V de vértices,
- um conjunto E de arestas,
- mapas $s, t \colon E \to V$, onde $s(e)$ é a fonte e $t(e)$ é o alvo da aresta direcionada e.

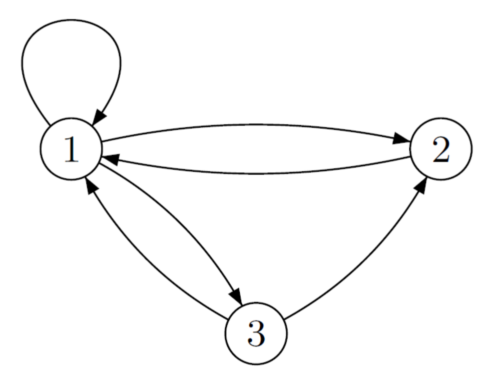
Um *caminho* em um grafo é uma seqüência alternada de vértices e arestas que começa e termina com um vértice, ou seja, é qualquer grafo da forma $(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, v_iv_{i+1} : 1 \leq i < n\})$. Os vértices v_1 e v_n são os *extremos* do caminho. Quando um caminho não tem extremos, ele é chamado de *caminho infinito.*

Definição 8 Um grafo dirigido é *fortemente conectado* se existe um caminho entre quaisquer dois vértices.

Definição 9 A *complexidade de ciclo* é definida da seguinte maneira:

- Se G não possui um caminho infinito, então sua complexidade de ciclo é 0;
- Se G é fortemente conectado, então será 1 adicionado ao menor valor entre as complexidades de ciclo dos grafos $G - v$, para todo vértice v.
- Se G não é fortemente conectado, é o máximo entre as complexidades de ciclo das componentes fortemente conectadas de G.

Exemplo 1 Por exemplo, a complexidade de ciclo do grafo abaixo é 1 :



Note que a quantidade de vértices nem sempre indica que a complexidade de ciclo é grande.

Vamos considerar V um conjunto finito totalmente ordenado e $h \colon V \to \mathbb{N}$ uma função. A partir dela, vamos definir outra função

$$n \colon V \to V \cup \{\infty\},$$

onde $\infty \notin V$ e $v < \infty$ para qualquer $v \in V$. Chamaremos n de *função próximo:* se

$$A = \{v' \in V | v' > v \ \wedge \ h(v') \geq h(v)\}$$

então:

$$n(v) = \begin{cases} \min(A), & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 10 Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado finito. Dizemos que $h \colon V \to \mathbb{N}$ é uma *função altura* para G se existe uma ordem total em V tal que, sendo n a função próximo de h, a seguinte condição é satisfeita:

Para qualquer $v \in V$ se $h(v) = 0$ (respetivamente $h(v) \geq 1$), então para cada vértice $v \to v'$, temos que $v' < v$. (respectivamente $v' < n(v)$)

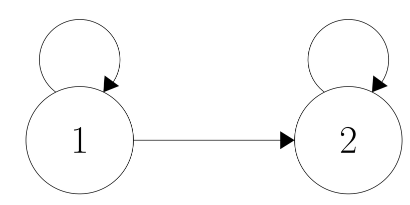
Para um conjunto $\mathcal{M}$ de matrizes quadradas de ordem n, vamos associar o grafo G com conjunto de vértices $\{1, \ldots, n\}$ e arestas $i \to j$ se $M_{i,j} \neq 0$ para alguma matriz $M \in \mathcal{M}$. Dizemos que a *complexidade de ciclo* de uma representação (λ, μ, γ) é a complexidade de ciclo do conjunto de matrizes $\mu\alpha$, com $\alpha \in A$.

Uma matriz é chamada *genérica* se seus coeficientes são variáveis distintas não-comutativas.

Exemplo 2 Seja a série formal $S = \sum_{\omega} |\omega|_a \omega \in \mathbb{N}\langle\langle A\rangle\rangle$, onde $A = \{a, b, c, d\}$. Esta série admite uma representação linear minimal (λ, μ, γ), definida por $\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, e

$$\mu\omega = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } \omega = a, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } \omega \in A \setminus \{a\}. \end{cases}$$

O grafo correspondente ao conjunto de matrizes $\mathcal{M} = \{\mu\omega | \omega \in A\}$ é



A complexidade de ciclo do grafo acima é 1. Logo, a complexidade de ciclo de S é 1.

Teorema 5 Uma série racional em $K\langle\langle A\rangle\rangle$ tem altura de estrela no máximo m se, e somente se, possui uma representação minimal com complexidade de ciclo com valor máximo m.

Corolário 1 Seja M uma matriz genérica de tamanho $n \times n$. Então cada entrada de M^* é uma série racional de altura de estrela n.

Em particular, o resultado acima revela que a altura de estrela é infinita.

Referências

[1] BERSTEL, J. e REUTENAUER, C. *Noncommutative racional series with applications.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2010

[2] SAKAROVITCH, J. (2009a). *Elements of Automata Theory.* Cambridge University Press, 2009