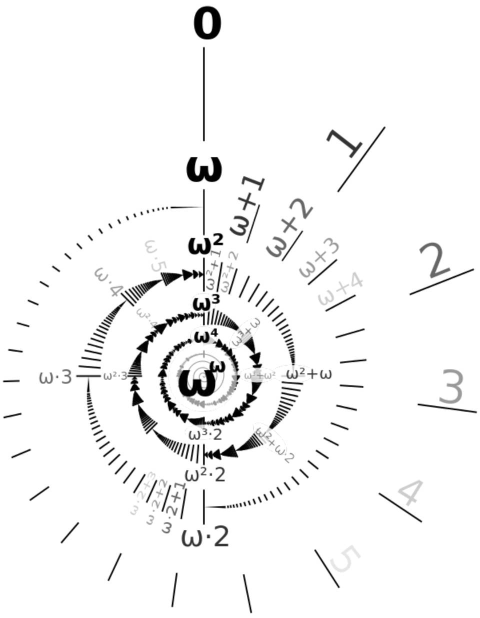
Árvores em em Teoria dos Conjuntos

Douglas de Araujo Smigly

Conteúdo



1 Árvores

A noção de árvore ocorre em muitas áreas da matemática e da computação. A definição que trataremos neste texto será voltada a aplicações na Teoria dos Conjuntos.

2 Conceitos preliminares

Vamos registrar brevemente alguns conceitos que serão citados e usados.

2.1 Filtros

Os filtros são muito úteis em diversas construções matemáticas em Topologia, Teoria dos Conjuntos e Teoria dos Modelos.

Definição 1. Seja X um conjunto. Uma *álgebra de conjuntos* é uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tais que

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$;

(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Uma família de conjuntos $\mathfrak{B}$ é *centrada* se $B_0 \cap ... \cap B_n \neq \emptyset$, $B_0, ..., \in \mathfrak{B}, n \in \omega$.

Definição 2. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos em X. Uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ é chamada de *filtro* se

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

(iii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \{B \in \mathcal{A} : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ é um filtro em $\mathcal{P}(X)$, diremos que $\mathcal{F}$ é um filtro de X. Um filtro que é maximal com respeito à inclusão (isto é, não está contido propriamente em nenhum outro filtro) é chamado *ultrafiltro*.

Se $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$, o filtro é dito *livre*.

Exemplo 1. Seja $X = \{a, b, c\}$. Então, o conjunto

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

é um filtro de $\mathcal{P}(X)$.

Exemplo 2. Seja $X = \mathbb{N}$. O conjunto

$$\mathfrak{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\mathbb{N} \setminus A) \text{ é finito.}\}$$

é um filtro do reticulado $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, conhecido como *filtro de Fréchet* ou *filtro cofinito*. Este é um exemplo de filtro livre que não é um ultrafiltro.

Exemplo 3. Seja $a \in \mathbb{N}$. Então

$$\mathcal{F}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : a \in A\}$$

é um ultrafiltro que não é livre.

Teorema 1. *Todo ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$ pode ser extendido para um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_0$ um filtro em $\mathbb{N}$ e denote S o conjunto de todos os filtros livres em $\mathbb{N}$ contendo $\mathcal{F}_0$,

$$\mathsf{S} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \text{ e } \mathcal{F} \text{ é um filtro livre.}\}$$

Observe que $\mathsf{S} \neq \emptyset$, pois $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$. Introduziremos uma ordem parcial em S com a inclusão natural. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia em S, tal que $\forall \mathcal{F}_i \in \mathcal{C}$, ou $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$. Seja $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$. Vamos mostrar que $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$, ou seja, que $\mathcal{G}$ é um filtro livre que contém $\mathcal{F}_0$.

Afirmação. *$\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$ é um filtro.*

Prova. Basta mostrar que $\mathcal{G}$ satisfaz as condições da definição 2.

- ♠ $\emptyset \notin \mathcal{G}$ e $\mathbb{N} \in \mathcal{G}$. Suponha por absurdo que $\emptyset \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$, existe algum $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{F}$, uma contradição, já que $\mathcal{F}$ é um filtro livre.

- ♣ Se $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$. Como $A, B \in \mathcal{G}$, então $A \in \mathcal{F}_i$ e $B \in \mathcal{F}_j$ para algum $\mathcal{F}_i$ e algum $\mathcal{F}_j$ em $\mathcal{C}$.

  Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, $A \cap B \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$, e $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$ também é um filtro, o que implica $A \cap B \in \mathcal{G}$.

- ♥ $A \in \mathcal{G} \Rightarrow \{B \in \mathbb{N} : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{G}$. Seja $X \in \mathcal{G}$ e $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Suponha $X \subseteq Y$. Então, $X \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ está na união de $\mathcal{G}$. Já que $\mathcal{F}$ é um filtro livre e $X \subseteq Y$, então $Y \in \mathcal{F}$. Consequentemente, Y está em $\mathcal{G}$.

□

Afirmação. *O filtro $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$ é livre.*

Prova. ♦ Vamos mostrar que $\bigcap_{A \in \mathcal{G}} A = \emptyset$.

Suponha por absurdo que, para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in \bigcap_{A \in \mathcal{G}} A$$

Então $(\forall x \in \mathcal{G})(n \in \mathbb{N})$, o que implica que para algum $\mathcal{F}$ em $\mathcal{C}$, temos

$$n \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A,$$

o que é uma contradição, pois $\mathcal{F}$ é um filtro livre.

□

Essas duas afirmações nos permite concluir que $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$. Então, para qualquer cadeia em S existe uma cota superior $\mathcal{G}$.

Utilizando o Lema de Zorn, sabemos que S contém um elemento maximal, digamos $\mathcal{T}$. Por construção, sabemos que $F_0 \subseteq \mathcal{T}$, o que prova que todo filtro livre pode ser extendido para um ultrafiltro livre. □

2.1.1 Ordem parcial

Definição 3. Uma *ordem parcial* é um par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, tal que $\mathbb{P} \neq 0$, e $\leq$ é uma relação em $\mathbb{P}$ onde para $a, b, c \in \mathbb{P}$, temos

1. (Reflexividade) $a \leq a$;
2. (Transitividade) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

   Dizemos que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma ordem parcial no *sentido estrito* se e somente se satisfaz a seguinte condição adicional:

3. (Antissimetria) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$;

Vamos ver agora o conceito de maior cadeia para posets.

Definição 4. A maior cadeia em um poset é aquela de maior tamanho possível. O tamanho da maior cadeia é conhecida como *altura de poset*, e o tamanho da maior anticadeia é conhecido como *largura de poset.*

Veja que a maior cadeia/anticadeia deve ser maximal: se C é máximo, então não existem cadeias de tamanho maior do que $|C|$; se C possui um subconjunto próprio de uma cadeia D, então $|D| > |C|$ irá contradizer a asserção.

Alguns exemplos:

Exemplo 4. Considere o poset $P = \langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18\}, | \rangle$, lembrando que $a \mid b$ é a se a é divisor de b.

Note que $\{1, 2, 4, 12\}$ é uma maior cadeia, pois não existem cadeias de tamanho maior do que 4. A maior cadeia não é única: $\{1, 3, 6, 18\}$ também é uma cadeia máxima, assim como $\{1, 2, 6, 12\}$ e muitas outras.

A maior anticadeia que podemos encontrar tem tamanho 4: $\{4, 6, 9, 5\}$.

Proposição. *Suponha que P está particionado em um conjunto finito de cadeias $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Se A é uma anticadeia, então existe no máximo um elemento de A em cada C_i, então $n \geq |A|$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que temos dois elementos distintos x e y de A onde ambos residem na mesma cadeia C_i. A associação em A obriga x e y a serem incomparáveis, mas a associação em C_i acarreta sua comparabilidade. Logo,

$$|A \cap C_i| \leq 1 \ \forall i.$$

□

2.1.2 Condição de Cadeia Enumerável

Definição 5. Um espaço topológico (X, τ) satisfaz a *Condição de Cadeia Enumerável* [1] se toda família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos é enumerável.

Vale destacar alguns exemplos:

Exemplo 5. Todo espaço topológico separável satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável.

Exemplo 6. Todo espaço topológico paracompacto que satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável é de Lindelöf.

Exemplo 7. O espaço totalemnte ordenado ω_1 não satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável. Para ver isso, note primeiramente que ω_1 não é separável, pois para qualquer subsocnjunto enumerável A de ω_1, existe um ordinal κ tal que é maior do que qualquer elemento de A, então o conjunto aberto (κ, ω_1) satisfaz

$$(\kappa, \omega_1) \cap A = \emptyset$$

Além disso,

$$\{\{\alpha + 1\} : \alpha < \omega_1\}$$

é uma família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos não-enumerável, pois $\{alpha + 1\}$ pode ser expresso como um intervalo aberto $(\alpha, \alpha + 2)$.

Exemplo 8. Seja $X = \{0, 1\}^{2^{2^{\aleph_0}}}$, e considere (X, τ), onde τ é a topologia produto satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, mas **não** é separável.

Todo espaço separável satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, e assim, espaços com base enumerável satisfazem a Condição de Cadeia Enumerável. Apesar disso, cabe salientar que a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem todo espaço que satisfaz a satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável é separável.

Além disso, a classe dos espaços que satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável é fechado por imagem contínua, como garantido pelo lema seguinte:

Lema. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f \in \mathbb{C}(X, Y)$. Se f_*X é denso em Y e X satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, então Y também satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável.*

Demonstração. Considere $(U_I)_{i \in I}$ uma família de abertos não-vazios dois a dois disjuntos em Y.

Como f_*X é denso em Y, a família f^*U_i, $i \in I$, é composta por abertos não-vazios e dois a dois disjuntos.

Como X satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, $card(I) \leq \aleph_0$.

Assim, concluímos que, se $(U_I)_{i \in I}$ é uma família de abertos não-vazios dois a dois disjuntos em $Y, card(I) \leq \aleph_0$, ou seja, a família $(U_I)_{i \in I}$ é enumerável. Logo, Y satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável. □

[1] Costuma ser abreviado para **c.c.c.**, do inglês *Countable Chain Condition.*

2.1.3 Axioma de Martin

Definição 6. O κ-Axioma de Martin[2] (indicaremos por notação $MA(\kappa)$)é a seguinte afirmação:

Sempre que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ for uma ordem parcial não-vazia que satisfaz a Condição de Cadeia Contável, e $\mathscr{D}$ é uma família de $\leq_\kappa$ subconjuntos densos em $\mathbb{P}$ então existe um filtro $G \in \mathbb{P}$ tal que

$$\boxed{\forall D \in \mathscr{D}(G \cap D \neq 0)}$$

O Axioma de Martin (MA) é a afirmação:

$$\boxed{\forall \kappa < 2^\omega (MA(\kappa))}$$

É interessante notar que, se $\kappa < \kappa'$, então $MA(\kappa') \to MA(\kappa)$. Além disso, $MA(2^\omega)$ é falso, e $MA(\omega)$ é verdadeiro.

Teorema 2. *Assuma $MA(\kappa)$. Seja (X, τ) um espaço topológico compacto e Hausdorff que satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, e U_α subconjuntos abertos e densos em X para $\alpha < \kappa$. Então*

$$\bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha \neq \emptyset$$

Demonstração. Seja

$$\mathbb{P} = \{p \subset X : p \in \tau \wedge p \neq \emptyset\},$$

com $p \leq q \leftrightarrow p \subset q$. Então $p \perp q \leftrightarrow p \cap q = \emptyset$, então $\mathbb{P}$ satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável uma vez que X a satisfaz. Se F é um filtro em $\mathbb{P}$, então F tem a propriedade da intersecção finita, e então pela compacidade

$$\bigcap \{\overline{p} : p \in F\} \neq \emptyset$$

Para cada α, considere $\mathscr{D}_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \overline{p} \in U_\alpha\}$. $\mathscr{D}_\alpha$ é denso na ordenação $\mathbb{P}$, uma vez que U_α é denso no espaço X e X é regular.

Se pegarmos F de modo a fazer $F \cap \mathscr{D}_\alpha \neq \emptyset \; \forall \alpha < \kappa$, então

$$\bigcap \{\overline{p} : p \in F\}$$

é um conjunto não-vazio contido em $\bigcap\limits_{\alpha < \kappa} U_\alpha$.

□

[2]Donald A. Martin (1940-), matemático estadunidense

3 Árvores

Definição 7. Uma árvore é uma ordem parcial estrita $\langle T, \leq \rangle$ tal que, para cada $x \in T$, o conjunto
$$\{y \in T : y < x\}$$
é bem-ordenado por $<$. Denotamos também $y \downarrow = \{y \in T : y < x\}$ e $y \uparrow = \{y \in T : x < y\}$

Definição 8. Seja $\langle T, \leq \rangle$ uma árvore e $x \in T$. Dizemos que a *altura* de x em T como
$$h(x, T) = \text{type}(y \downarrow)$$

Definição 9. Seja $\langle T, \leq \rangle$ uma árvore. Para cada ordinal α, definimos o α-ésimo *nível* de T como
$$\text{Lev}_\alpha(T) = \{x \in T : h(x, T) = \alpha$$

A altura de T é o menor α tal que $\text{Lev}_\alpha(T) = 0$. Denotamos também
$$T_\alpha = \{y \in T : h(y, T) \leq \alpha\}.$$

Definição 10. Seja $\langle T, \leq \rangle$ uma árvore. Uma *sub-árvore* de T é um subconjunto $T' \subset T$ com a ordem induzida tal que
$$\forall x \in T' \; \forall y \in T (y < x \rightarrow y \in T')$$

Podemos escrever também $h(T) = \sup\{h(x, T) + 1 : x \in T\}$. Também é interessante observar que se T' é uma sub-árvore de T, então para $x \in T'$,
$$h(x, T) = h(x, T'),$$
ou seja, a altura de um elemento em T' é igual a sua altura em T, isto é, $h \restriction_{T'} = h$. Vamos agora dar alguns exemplos de árvores.

Exemplo 9. Seja T um conjunto qualquer, e $<$ a ordem vazia. Então $\langle T, \leq \rangle$ é uma árvore. $h(x, T) = 0 \forall x \in T$ e $h(T) = 1$.

Exemplo 10. Seja δ um ordinal, e $<$ a ordem usual. Então $\langle \delta, \leq \rangle$ é uma árvore. Temos $h(\alpha, \delta) = \alpha$ e $h(\delta) = \delta$.

Exemplo 11. ${}^{<\delta}I = \bigcup\{{}^\alpha I : \alpha < \delta\}$ é uma árvore, conhecida como árvore I-nária completa de altura δ. Definimos ${}^{<\delta}I$ que $s \leq t$ se e somente $s \subset t$. Se $\alpha < \delta$, então $\text{Lev}_\alpha({}^\delta I) ={}^\alpha I$ e $h({}^\delta I) = \delta$. Quando $I = 2$, chamaremos ${}^{<\delta}2$ de árvore binária completa de altura δ.

Vale a pena aqui registrar a definição de árvore binária.

Definição 11. O conjunto de todas as sequências binárias definidas em ordinais enumeráveis ordenadas pela inclusão, que chamaremos aqui de *árvore binária* e denotaremos por ${}^{<\omega_1}2$, é definido da seguinte maneira:
$$^{<\omega_1} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} {}^\alpha 2$$

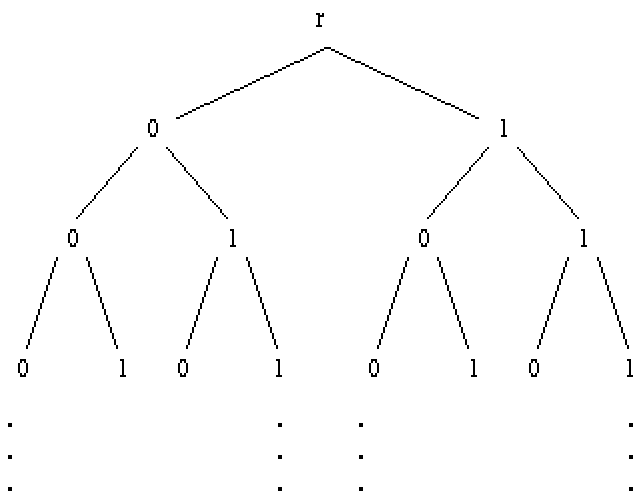


Figura 1: Representação de uma árvore binária

Podemos identificar os subconjuntos de $\omega + 1$ com as suas funções-característica que têm ω_1 como domínio. Tais funções característica podem se encaradas como os ramos da árvore binária.

Definição 12. Seja T uma árvore. Dizemos que uma *cadeia* em T é um conjunto $C \subset T$ que é totalmente ordenado por $<$.

Definição 13. Seja T uma árvore. Dizemos que uma *anticadeia* em T é um conjunto $A \subset T$ tal que

$$\forall x, y \in A(x \neq y \rightarrow (x \nleq y \wedge y \nleq x))$$

4 Árvore de Suslin

Vamos agora definir uma *árvore de Suslin*[3]. A formulação da hipótese de Suslin em termos de árvores facilitou o seu estudo usando métodos teóricos de Teoria dos Conjuntos, particularmente Forcing.

Definição 14 (Árvore de Suslin)**.** Para qualquer cardinal infinito κ, dizemos que uma árvore T tal que $|T| = \kappa$ e todas as cadeias e anticadeias de T possuem cardinalidade $< \kappa$ é uma *$\kappa-$árvore de Suslin.*

Definição 15. Uma *linha de Suslin* é uma ordem total $\langle X, < \rangle$ tal que na topologia da ordem, X satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, mas não é separável. A Hipótese de Suslin é "não existem linhas de Suslin."

Definição 16 (Hipótese de Suslin)**.** A Hipótese de Suslin é a seguinte asserção:

$$\boxed{\text{Não existe uma linha de Suslin.}}$$

Teorema 3. *Se existe uma linha de Suslin, então existe uma linha de Suslin X tal que*

- ♠ *X é denso em si mesmo $((a < b) \to (a, b) \neq 0)$*
- ♣ *Nenhum subconjunto aberto de X é separável.*

Demonstração. Seja Y uma linha de Suslin. Defina uma relação de equivalência $\sim$ em Y tomando

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y), & sex < y \\ (y, x), & sex > x \end{cases} \text{ é separável.}$$

Seja X o conjunto de todas as $\sim$-classes de equivalência. Se $I \in X$, então I é convexo, isto é

$$x, y \in I \wedge x < y \to (x, y) \subset I$$

Vamos ordenar totalmente X considerando $I < J$ se e somente se algum elemento de I é menor do que algum elemento de J.

Note que cada $I \in X$ é separável. Para comprovar isso, considere $\mathscr{M}$ a coleção maximal disjunta de não-0 intervalos abertos da forma (x, y) com $x, y \in I$. $\mathscr{M}$ é enumerável, uma vez que Y satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável. Escreva então

$$\mathscr{M} = \{(x_n, y_n) : n \in \omega\}$$

Como $x_n \sim y_n$, seja D_n um subconjunto enumerável e denso de (x_n, y_n). Tome

$$D = \bigcup_n D_n.$$

Então D é denso em $\bigcup_n (x_n, y_n)$.

[3]Mikhail Yakovlevich Suslin (1894 - 1919), matemático russso

Se $z \in I$ e $z \in (x, y) \subset I$, então (x, y) intersecta algum (x_n, y_n) pela maximalidade de $\mathscr{M}$, isso implica $z \in \overline{D}$ a menos de z ser o primeiro ou o último elemento de I.

Assim, D junto com o primeiro e o último elemento de I (se I possuir primeiro e/ou último elemento) forma um subconjunto enumerável e denso de I.

Vamos mostrar agora que X é uma linha de Suslin que satisfaz ♠ e ♣.

- ♥ Condição ♠ : X é denso em si mesmo $((a < b) \to (a, b) \neq 0)$

  Para ver que X é denso em si mesmo, suponha por absurdo que $I < J$ mas $(I, J) = 0$. Escolha $x \in I$ e $y \in J$, e então $(x, y) \subset I \cup J$, o qual é separável, e logo $x \sim y$, uma contradição.

- ♦ Condição ♣ : Nenhum subconjunto aberto de X é separável.

  Para verificar a condição ♣, é suficiente notar que (I, J) não é separável sempre que $I < J$. Suponha por absurdo que seja. Considere

$$\{K_n : 2 \leq n < \omega\}$$

  densos em (I, J), e faça $K_0 = I$ e $K_1 = J$. Em Y, seja D_n um subconjunto denso e enumerável de K_n., então $\bigcup\limits_n D_n$ é denso em

$$\bigcup\{L : I \leq L \leq J\},$$

  e os pontos de I são equivalentes aos pontos de J, uma contradição.

  Para comprovar que X satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, suponha que (I_α, J_α) são intervalos abertos disjuntos em X para $\alpha < \omega_1$.

  Escolha $x_\alpha \in I_\alpha$. Então (x_α, y_α) seria disjunto e não-0 em Y.

□

As árvores de Suslin foram introduzidas por Kurepa, que mostrou que existe uma ω_1-árvore de Suslin se, e somente se, existe uma linha de Suslin.

Vamos observar as propriedades das κ-árvores de Suslin quando κ é regular.

Definição 17. Para qualquer κ regular, uma κ-árvore é uma árvore T de altura κ tal que

$$\forall \alpha < \kappa (|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \kappa)$$

Lema. *Para qualquer κ regular, toda κ-árvore de Suslin é uma $\kappa-$árvore.*

Demonstração. Primeiramente, note que, se $x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$, $\{y : y < x\}$ é uma cadeia de cardinalidade κ, e então

$$\mathrm{Lev}_\alpha(T) = 0.$$

Este fato implica que $h(T) \leq \kappa$.

Como cada $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ é uma anticadeia,

$$|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| \leq \kappa$$

Como $|T| = \kappa$ e

$$T = \bigcup \{\mathrm{Lev}_\alpha(T) \colon \alpha < h(T)\}$$

segue que $h(T) = \kappa$, pois κ é regular. □

Uma pergunta interessante a se fazer nesse momento é a seguinte: será que existe uma ω-árvore de Suslin?

Verificaremos agora que a resposta a essa questão é negativa.

Lema (König)**.** *Se T é uma $\omega-$árvore, então T possui uma cadeia infinita.*

Demonstração. Escolha um $x_0 \in \mathrm{Lev}_0(T)$ de modo que ocorra que o conjunto

$$\{y \in T : y \geq x_0\}$$

é infinito.

É possível fazer isso pois, como $\mathrm{Lev}_0(T)$ é finito, T é infinito, e todo elemento $t \in T$ é tal que $t \geq s$, para $s \in \mathrm{Lev}_0(T)$.

Com argumentação similar, podemos escolher

$$\begin{cases} x_0 \in \mathrm{Lev}_0(T) \\ x_1 \in \mathrm{Lev}_1(T) \\ x_2 \in \mathrm{Lev}_2(T) \\ \qquad \vdots \\ x_n \in \mathrm{Lev}_n(T) \end{cases}$$

tal que, para cada n, $x_{n+1} > x_n$ e $\{y \in T : y \geq x_{n+1}\}$ é infinito.

Desse modo, concluímos que a cadeia $\{x_n : n \in \omega\}$ é uma cadeia infinita em T, o que conclui a demonstração. □

5 Árvore de Aronszajn

Vamos definir agora a árvore de Aronszajn[4]

Definição 18 (Árvore de Aronszajn)**.** Para qualquer κ regular, definimos a $\kappa-$ *árvore de Aronszajn* como uma $\kappa-$árvore em que toda cadeia em T tem cardinalidade menor do que κ.

De maneira informal, uma árvore de Aronszajn (mais especificamente, uma ω_1-árvore de Aronszajn) é uma árvore não-enumerável sem níveis não-enumeráveis e sem braços não-enumeráveis.

O estudo dessas árvores é de grande importância na Combinatória Infinitária e possui diversas aplicações em Topologia Geral.

A existência de tais árvores é um teorema da Teoria dos Conjuntos em ZFC. Apesar disso, muitas questões sobre suas propriedades são indecidíveis em ZFC. Por exemplo, a existência de uma Árvore de Suslin (que nada mais é do que uma árvore de Aronszajn sem anticadeia não-enumerável), que vimos acima, é indecidível em ZFC.

Toda $\kappa-$árvore de Suslin é uma κ-árvore de Aronszajn.

Proposição. *Não existe uma ω-árvore de Aronszajn.*

Demonstração. Uma vez que toda $\omega-$árvore de Aronszajn é uma ω-árvore de Suslin, e não existe uma ω-árvore de Suslin, segue que não existe uma ω-árvore de Aronszajn. □

Teorema 4. *Existe uma ω_1- árvore de Aronszajn.*

Demonstração. Seja
$$T = \{s \in \ {}^{\omega_1}\omega : s \text{ é bijetora.}\}$$
Então, T é uma subárvore de ${}^{\omega_1}\omega$.

A altura de T é ω, pois para todo $\alpha < \omega$ possui umma função bijetora de α para ω.

Se C é uma cadeia não-enumerável em T, então $\bigcup C$ pode ser uma função bijetora de ω_1 em ω, o que implica que toda cadeia em T é enumerável.

Mas T não é uma árvore de Aronszajn, pois T não é uma ω_1-árvore de Aronszajn. Além disso,
$$\text{Lev}_\alpha(T) \text{ é não-enumerável para } \ \omega \leq \alpha < \omega_1.$$

Apesar disso, podemos definir uma subárvore em T que é Aronszajn.

Vamos agora construir uma subárvore em T que será uma ω_1- árvore de Aronszajn.

Se $s, t \in \ {}^{\alpha}\omega$, vamos definir
$$s \sim t \Leftrightarrow \{\xi < \alpha : s(\xi) \neq t(\xi)\} \text{ é finito.}$$

[4]Nachman Aronszajn (1907-1980) foi um matemático estadunidense nascido na Polônia.

Iremos encontrar s_α para $\alpha < \omega_1$ tal que

(i) $s_\alpha \in^\alpha \omega$ e s_α é bijetora;

(ii) $\alpha < \beta \to s_\alpha \sim s_\beta \restriction_\alpha$;

(iii) $\omega \diagdown \mathrm{ran}(s_\alpha)$ é infinito.

Assumindo que tal s_α pode ser encontrado, tome

$$T^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{t \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) : t \sim s_\alpha\}$$

Note que T^* é uma subárvore de T, pelo item ***(ii)***. Por ***(i)***, cada $s_\alpha \in T^*$,

$$\mathrm{Lev}_\alpha(T) \neq 0.$$

Como o conjunto

$$\{t \in \ {}^\alpha\omega : t \sim s_\alpha\}$$

é enumerável, T^* é uma ω_1-árvore.

Assim, concluímos que T^* é uma ω_1-árvore de Aronszajn.

Podemos escolher s_α por indução. Dado s_α, tome qualquer $n \in \omega \diagdown \mathrm{ran}(s_\alpha)$ e considere $s_{\alpha+1} = s_\alpha \cup \{\langle \alpha, n\rangle\}$.

Suponha que temos s_α para $\alpha < \gamma$, onde γ é limite. Fixe α_n para $n < \omega$ e

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

e $\sup_n \alpha_n = \gamma$. Seja $t_0 = s_{\alpha_0}$, e defina indutivamente

$$t_n \colon \alpha_n \to \omega$$

Então temos que:

1. Cada t_i é bijetora;

2. $t_n \sim s_{\alpha_n}$;

3. $t_{n+1} \restriction_{\alpha_n} = t_n$.

Tome $T = \bigcup\limits_n t_n$. Então $t \in \ {}^\gamma\omega$ e t é bijetora. Se considerarmos $s_\gamma = t$, então ***(i)*** irá funcionar para $\alpha = \gamma$ e ***(ii)*** será satisfeito para $\alpha < \beta = \gamma$, mas ***(iii)*** pode falhar. Para resolver essa intempérie, considere o conjunto

$$\mathscr{L} = \{\alpha_n : n \in \omega\},$$

e vamos definir $s_\gamma(\alpha_n) = t(\alpha_{2n})$ e $s_\gamma(\xi) = t(\xi)$ para $\xi \notin \mathscr{L}$. Então

$$\{t(\alpha_{2n+1}) : n \in \omega\} \subset (\omega \diagdown \mathrm{ran}(s_\gamma))$$

e agora sim, a condição ***(iii)*** estará satisfeita.

Desse modo, conseguimos construir uma ω_1- árvore de Aronszajn. $\square$

Cabe observar que a árvore construída na demonstração do teorema acima nunca poderá ser uma árvore de Suslin. Isso ocorre pois qualquer árvore de Aronszajn que é uma subárvore de $\{s \in {}^{<\omega_1}\omega \colon s$ é uma função 1-1 $\}$ não pode ser uma árvore de Suslin.

Vamos agora nos concentrar na situação em que $\kappa > \omega_1$. Se $\kappa = \gamma^+$, com γ regular, e $2^{<\gamma} = \gamma$, então existe uma κ-árvore de Aronszajn. Assim, sob a Hipótese Generalizada do Contínuo, existe uma κ-árvore de Aronszajn para todo $\kappa \geq \omega_1$ regular, com exceção de quando κ é inacessível ou sucessor de um cardinal singular. É desconhecido se a Hipótese Generalizada do Contínuo implica que deve haver uma $\kappa-$árvore de Aronszajn para κ sendo o sucessor de um cardinal singular, apesar de Jensen ter mostrado que é consistente com a Hipótese Generalizada do Contínuo que há para todo κ.

Para κ fortemente inacessível, então (sem necessidade de se assumir a Hipótese Generalizada do Contínuo) existe uma $\kappa-$árvore de Aronszajn a menos que κ seja fracamente compacto, uma propriedade que implica que κ é o κ-ésimo inacessível.

Ainda sem a Hipótese Generalizada do Contínuo, não precisamos nem de uma ω_2-árvore de Aronszajn. A existência de tal árvore é consistente com mas independente de ZFC + $2^\omega = \omega_2$.

Vamos agora mostrar uma prova de que existe uma linha de Suslin se e somente se existe uma ω_1-árvore de Suslin. Precisaremos de alguns resultados preliminares.

Definição 19. Uma $\kappa-$ árvore *bem-podada* é uma $\kappa-$ árvore T, tal que $|\mathrm{Lev}_0(T)| = 1$ e

$$\forall x \in T\ \forall\ \alpha(h(x,T) < \alpha < \kappa) \to \exists y \in\ \mathrm{Lev}_\alpha(T)(x < y)) \tag{1}$$

Lema. *Se κ é regular e T é uma κ-árvore, então T possui uma sub-κ-árvore bem-podada.*

Demonstração. Seja $\mathscr{T}$ um cojunto de $x \in T$, tal que

$$|\{z \in T \colon z > x\}| = \kappa$$

$\mathscr{T}$ é uma sub-arvore de T. para verificar que a condição (1) é válida para $\mathscr{T}$, fixe $x \in \mathscr{T}$ e α tal que $h(x,T) < \alpha < \kappa$. Seja

$$Y = \{y \in\ \mathrm{Lev}_\alpha(T) : x < y\}$$

Por definição de $\mathscr{T}$ e pelo fato de cada $|\mathrm{Lev}_\beta(T)|\kappa$, o conjunto

$$\{z \in T : z > x \wedge h(z,T) > \alpha\}$$

tem cardinalidade κ, e cada elemento desse conjunto está acima de um elmento de Y.

Como $|Y| < \kappa$, existeum $y \in Y$ tal que $|\{z \in T : z > y\}| = \kappa$, e assim $y \in \mathscr{T}$. Analogamente, mostramos que $\mathrm{Lev}_0(\mathscr{T}) \neq 0$, e assim $\mathscr{T} \neq 0$. Agora, para todo $x \in \mathrm{Lev}_0(\mathscr{T})$,o conjunto

$$\{y \in \mathscr{T} : y \geq x\}$$

é uma subárvore de T bem-podada. □

Podar uma árvore tende a fazer os braços remanescentes a ficarem mais espessos.

Lema. *Se κ é regular, T é uma árvore de Aronszajn bem-podada e $x \in T$, então*

$$\forall n < \omega \exists \alpha > h(x,T)(|\{y \in \ Lev_\alpha(T) : y > x\}| \geq n)$$

Demonstração. Vamos demonstrar o lema por indução.

Para $n = 2$, o resultado segue do fato de que $\{y : y > x\}$ encontra todos os níveis acima de x e não forma uma cadeia.

Para $n > 2$, suponha que o lema funciona para n, fixe $\alpha > h(x,T)$ e

$$y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$$

distintos para cada $y_i > x$.

Agora, considere $\beta > \alpha$ tal que existem

$$z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$$

com $z_n, z_{n+1} > y$.

Para $i < n$, existem $z_i \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$ com $z_i > y_i$. Então o conjunto $\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ satisfaz o lema para $n+1$, e a prova está concluída.

□

Vamos mostrar que a Hipótese de Suslin é equivalente à não-existência de uma ω_1-árvore de Suslin.

Teorema 5. *Existe uma ω_1-árvore de Suslin se e somente se existe uma linha de Suslin.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$:

Primeiramente, seja T uma ω_1-árvore de Suslin. Podemos então assumir que T é bem-podada. Seja

$$\mathfrak{L} = \{C \subset T \colon C \text{ é uma cadeia maximal em } T\}.$$

Se $C \in \mathfrak{L}$, então existe um ordinal $h(C)$ tal que C contém exatamente um elemento de $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ para $\alpha < h(C)$ e não contém elementos de $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ para $\alpha \geq h(C)$. Como T é de Aronszajn, $h(C) < \omega_1$. Uma vez que T é uma árvore bem-podada, uma cadeia nacional não pode ter um máximo elemento, então cada $h(C)$ é um ordinal limite.

Para $\alpha < h(C)$, seja $C(\alpha)$ o elemento de C no nível α.

Vamos ordenar o conjunto $\mathfrak{L}$. Para lograrmos nosso objetivo, fixaremos uma ordem total arbitrária $\prec$ de T. se $C, D \in \mathfrak{L}$, e $C \neq D$, vamos considerar $d(C,D)$ o menor α tal que $C(\alpha) \neq D(\alpha)$, ou seja:

$$d(C,D) = \min\{\alpha : C(\alpha) \neq D(\alpha)\}$$

Afirmação. *Se $C \neq D$, então*

$$d(C, D) < \min\{h(C), h(D)\}$$

Prova. Como $\alpha < h(C)$ e $\alpha < h(D)$, com certeza ocorre

$$\alpha < \min\{h(C), h(D)\}$$

Assim, como $d(C, D)$ é algum α, segue o resultado. □

Seja

$$C \lhd D \Leftrightarrow C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$$

Usamos então $\prec$ para descrever uma espécie de ordem lexicográfico em $\mathfrak{L}$. Além disso, esta é uma ordem total em $\mathfrak{L}$. Vamos agora verificar a seguinte afirmação:

Afirmação. $\langle \mathfrak{L}, \lhd \rangle$ *é uma linha de Suslin.*

Prova. Vamos mostrar que $\mathfrak{L}$ satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável, ou seja, que toda anticadeia forte é enumerável. Considere a seguinte família de intervalos abertos disjuntos e não-vazios:

$$\{(C_\xi, D_\xi) : \xi < \omega_1\}$$

Escolha $E_\xi \in (C_\xi, D_\xi)$ é α_ξ tal que

$$\max(d(C_\xi, E_\xi)) < \alpha_\xi < h(E_\xi);$$

Então $\{E_\xi(\alpha_\xi) : \xi < \omega_1\}$ forma uma anticadeia em T, uma contradição, já que T é uma ω_1-árvore de Suslin.

Para mostrar que $\mathfrak{L}$ não é separável, é suficiente ver que para cada $\delta < \omega_1$, o conjunto $\{C : h(C) < \delta\}$ não é denso em $\mathfrak{L}$. Seja $x \in \mathrm{Lev}_\delta(T)$. Então existe um $\alpha > \delta$ com 3 elementos distintos $y, z, w \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ acima de x. Sejam D, E, F os elementos de $\mathfrak{L}$ contendo y, z, w, respectivamente. Digamos que eles estão ordenados, com $D \lhd E \lhd F$, e assim (D, F) é um intervalo não-vazio, mas como $x \in D \cap F$, (D, F), não contém $C \in \mathfrak{L}$ com com $h(C) < \delta$.

□

$(\Leftarrow)$:

Reciprocamente, suponha que é dada uma linha de Suslin $\langle L, \lhd \rangle$. Podemos então assumir que $\mathfrak{L}$ é denso em si mesmo e que nenhum subconjunto aberto de $\mathfrak{L}$ é separável.

Seja $\mathscr{J}$ o conjunto de todos os intervalos abertos não-vazios de $\mathfrak{L}$. Então, os elementos de $\mathscr{J}$ são da forma (a, b), onde $a \lhd b$. $\mathscr{J}$ é parcialmente ordenado pela inclusão reversa:

$$I \leq J \Leftrightarrow J \subset I$$

Devemos definir um subconjunto $T \subset \mathscr{I}$ em que $\leq$ é uma ordenação de T.Para isso, vamos encontrar $\mathscr{I}_\beta \subset \mathscr{I}$ para $\beta < \omega_1$ tal que, para cada β,

1. os elementos de $\mathscr{I}_\beta$ são dois a dois disjuntos;
2. $\bigcup \mathscr{I}_\beta$ é denso em $\mathfrak{L}$;
3. Se $\alpha < \beta$, $I \in \mathscr{I}_\alpha$, e $J \in \mathscr{I}_\beta$, ocorre uma das duas possibilidades:
    - ♥ $I \cap J = 0$
    - ♦ $J \subset I$ e $I \setminus cl(J) \neq 0$.

Assumindo tais condições, teremos

$$T = \bigcup_\beta \mathscr{I}_\beta$$

Por 1, 2 e 3, T é uma árvore e cada $\mathscr{I}_\beta = \text{Lev}_\beta(T)$. Se $A \subset T$ é uma anticadeia, então os elementos de A são disjuntos dois a dois, e $|A| \leq \omega$. T pode não ter cadeias não-enumeráveis, uma vez que se

$$\{I_\xi : \xi < \omega_1\}$$

pode ser, com $\xi < \eta \to I_\xi \leq I_\eta$.

Logo, pela condição ♦, temos:

$$\xi < \eta \to (I_\eta \subset I_\xi \wedge I_\xi \setminus cl(I_\eta) \neq 0),$$

então $\{I_\xi \setminus cl(I_{\xi+1} : \xi < \omega_1\}$ irá contradizer a Condição de Cadeia Enumerável de $\mathfrak{L}$.

Como 2 em particular implica que $\mathscr{I}_\beta \neq 0$, então $|T| = \omega_1$. Logo, T é de Suslin. Vamos construir agora $\mathscr{I}_\beta$ por indução. $\mathscr{I}_0$ é qualquer subfamília maximal disjunta de $\mathscr{I}$, e a maximalidade implica que $\bigcup \mathscr{I}_0$ é denso. Dado $\mathscr{I}_\alpha$, vamos definir $\mathscr{I}_{\alpha+1}$ da seguinte maneira:

Para $I \in \mathscr{I}_\alpha$, tome $\mathscr{K}_I$ a subfamília maximal disjunta de

$$\{K \in \mathscr{I} : K \subset I \wedge I \setminus cl(J) \neq 0\}$$

Tomamos então

$$\mathscr{I}_{\alpha+1} = \bigcup \{\mathscr{K}_I : I \in \mathscr{I}_\alpha\}$$

Assumindo que γ é limite, já temos definido $\mathscr{I}_\alpha$ para $\alpha < \gamma$ satisfazendo as condições 1, 2 e 3 para $\alpha < \beta < \gamma$. Seja

$$\mathscr{K} = \{K \in \mathscr{I} : \forall \alpha < \gamma \forall I \in \mathscr{I}_\alpha (I \cap K = 0 \vee (K \subset I \wedge I \setminus cl(K) \neq 0))\}$$

e seja $\mathscr{I}_\gamma$ a subfamília maximal disjunta de $\mathscr{K}$. Então 1 e 3 funcionam para todo $\alpha < \beta \leq \gamma$.

A condição 2 é satisfeita pelo seguinte: para $\beta < \gamma$ suponha que não temos $J \in \mathscr{J}$ disjunto de todos os membros de $\mathscr{J}_\gamma$. Isso seguirá então pela maximalidade de $\mathscr{J}_\gamma$ se pudermos mostrar que

$$\forall J \in \mathscr{J} \exists K \in \mathscr{K} (K \subset J)$$

Seja E o conjunto de todos os pontos finais à esquerda e à direita de todos os intervalos em $\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathscr{J}_\alpha$. E é enumerável e J não é separável, então tome $K_1 \in \mathscr{J}$ com $K_1 \subset J$ e $K_1 \cap E = 0$. Se $I \in \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathscr{J}_\alpha$, então K_1 não contém os pontos finais de I, logo ou $I \cap K_1 = 0$ ou $K_1 \subset I$. Agora, considere $K \in \mathscr{J}$ com $JK \subset K_1$ e $K \setminus cl(K) \neq 0$. Então $K \in \mathscr{J}$ e $K \in \mathscr{K}$. Desse modo, concluímos que existe uma ω_1-árvore de Suslin se e somente se existe uma linha de Suslin, como queríamos demonstrar. □

Segue que $MA(\omega_1)$ implica que não existem ω_1-árvores de Suslin.

Lema. *$MA(\omega_1)$ implica que não existe uma ω_1-árvore de Suslin.*

Demonstração. Seja $\langle T, \leq \rangle$ uma ω_1-árvore de Suslin, e tome $\mathbb{P} = \langle T, \leq \rangle$ a ordem reversa de T. Como T não possui anticadeias não-eumeráveis, $\mathbb{P}$ satisfaz a Condição de Cadeia Enumerável. Podemos assumir que T é bem-podada, e nesse caso,

$$D_\alpha = \{x \in T : h(x, T) < \alpha\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. Por $MA(\omega_1)$, existe um filtro G intersectando cada D_α. Então G possui uma cadeia não-enumerável, contradizendo o fato de que T é de Suslin.

□

6 Árvore de Kurepa

Em linhas gerais, uma árvore de Kurepa [5] é uma ω_1-árvore que possui ao menos $\aleph_2$ braços não-enumeráveis. A Hipótese de Kurepa diz que uma árvore de Kurepa existe. Essa é uma afirmação indecidível. A falha da Hipótese de Kurepa é equiconsistente com a exitência de um cardinal inacessível. Vamos fazer aqui uma definição geral de tal conceito.

Definição 20. Se T é uma $\kappa-$árvore, um *caminho* através de T é uma cadeia C que intersecta $\text{Lev}_\alpha(T)$ para cada $\alpha < \kappa$.

Equivalentemente, podemos dizer que um caminho é uma cadeia maximal de cardinalidade κ.

Existem diversas κ-árvores que não são de Aronszajn. Por exemplo, o próprio ordinal κ. Um outro exemplo menos trivial é o seguinte:

Exemplo 12. Seja

$$T = \{s \in {}^{\kappa}2 | |\{\alpha \in \text{Dom}(s) : s(\alpha) = 1\}| < \omega\}$$

Então T é uma $\kappa-$árvore que não é de Aronszajn, e possui precisamente κ caminhos.

Definição 21 (Árvore de Kurepa)**.** Para qualquer κ regular, uma *κ-árvore de Kurepa* é uma $\kappa-$árvore com ao menos κ^+ caminhos.

Definição 22 ($\kappa-$Hipótese de Kurepa)**.** A $\kappa-$ Hipótese de Kurepa é a seguinte asserção:

$$\boxed{\text{Existe uma } \kappa - \text{ árvore de Kurepa.}}$$

Chamamos de Hipótese de Kurepa a afimarção "existe uma ω_1-árvore de Kurepa".

Note que a Hipótese de Suslin diz que **não existe** uma ω_1-árvore de Suslin, enquanto a Hipótese de Kurepa diz que **existe** uma ω_1-árvore de Kurepa.

A Hipótese de Kurepa é equivalente a um princípio combinatório muito siples que não envolve árvores.

Definição 23. Uma família $\kappa-$Kurepa é $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ tal que $|\mathscr{F}| \geq \kappa^+$ e

$$\forall \alpha < \kappa(|\{A \cap \alpha : A \in \mathscr{F}\}| < \kappa)$$

Observe que a definição de família $\kappa-$Kurepa não depende da ordenação de κ. Em geral, se $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(I)$ e $X \subset I$, tome

$$\mathscr{F}_X = \{A \cap X : A \in \mathscr{F}\}$$

Se $X \subset Y \subset I$ podemos definir uma função de $\mathscr{F}_Y$ em $\mathscr{F}_X$, tomando $A \cap Y$ para $A \cap X$, logo $|\mathscr{F}_X| \leq |\mathscr{F}_Y|$. Em particular, se $I = \kappa$ e κ é regular, então

$$\forall \alpha < \kappa(|\mathscr{F}_\alpha| < \kappa) \leftrightarrow \forall X \subset \kappa(|X| < \kappa \rightarrow |\mathscr{F}_X| < \kappa)$$

[5]Duro Kurepa (1907-1993), matemático iugoslavo (sérvio) que nasceu na Áustria-Hungria

Então, para κ regular, existe uma família κ-Kurepa se e somente se, para algum I com $|I| = \kappa$, existe um $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(I)$ com $|\mathscr{F}| \geq \kappa^+$ e

$$\forall X \subset I(|X| < \kappa \to |\mathscr{F}_X| < \kappa)$$

Teorema 6. *Para qualquer κ regular, existe uma família $\kappa-$Kurepa se e somente se existe uma κ-árvore de Kurepa.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$:

Se T é uma $\kappa-$árvore de Kurepa, seja $\mathscr{F}$ o conjunto de todos os caminhos através de T. Então $|\mathscr{F}| \geq \kappa^+$. $|T| = \kappa$, então teremos uma família de Kurepa se mostrarmos que para cada $X \subset T$ com $|X| < \kappa$, $|\mathscr{F}_X| < \kappa$. Fixado X, como κ é regular, existe um $\alpha < \kappa$ tal que

$$\forall x \in X(h(x,T) < \alpha)$$

Como todo $C \in \mathscr{F}$ intersecta $\text{Lev}_\alpha(T)$, cada elemento de $\mathscr{F}_X$ é da forma

$$\{x \in X : x < z\}$$

para algum $z \in \text{Lev}_\alpha(T)$. Assim, $|\mathscr{F}_X| \leq |\text{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$.

$(\Leftarrow)$:

Suponha $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ uma família $\kappa-$Kurepa. Para $B \in \mathscr{F}_\alpha$, seja $\chi_B \in {}^\alpha 2$ sua função característica. Então,

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} \{\chi_B : B \in \mathscr{F}_\alpha\} \subset {}^\kappa 2$$

é uma κ-árvore de Kurepa.

□

Referências

R. David, *Some Results on Higher Suslin Trees.* The Journal of Symbolic Logic, vol. 55, no. 2, p. 526-536, 1990. <www.jstor.org/stable/2274644>.

W. Kubiś, *Infinitary combinatorics with applications in mathematical analysis*, parte 1, Praga: Mathematical Institute, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2013. <http://users.math.cas.cz/kubis/courses/infcombins2013/InfCombins_part1.pdf>

K. Kunen, *Set Theory : An Introduction to Independence Proofs*, North Holland Publ. Co., Studies in Logic Series, 102, Amsterdam, 1980.

F. Miraglia, *Teoria dos Conjuntos : Um Mínimo*, EDUSP, 1990.

C. Schlindwein, *Consistency of Suslin's Hypothesis, A Nonspecial Aronszajn Tree, and GCH*, The Journal of Symbolic Logic, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 59, No. 1, 59 (1): 1-29, 1994