

O Produto Cruzado de C^* -álgebras
por Grupos Mediáveis

David Pires Dias

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise**
Orientadora: **Profa. Dra. Cristina Cerri**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

O Produto Cruzado de C^* -álgebras por Grupos Mediáveis

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por David Pires Dias e
aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, junho de 2001.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Cristina Cerri (Presidente) - IME - USP
- Prof. Dr. Ruy Exel Filho - UFSC
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ

*A todos aqueles que fizeram parte desta jornada,
em especial, a meus pais, irmãos e Karina.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar a minha orientadora, Cristina Cerri, que tanto me ensinou, me aconselhou e me inspirou a cada encontro semanal desta importante etapa de meus estudos.

A Ivan de Camargo que durante minha graduação me apoiou e incentivou a continuar estudando e dessa forma me ajudou a ingressar e prosseguir no mestrado.

A meus familiares, em especial a meus pais Carlos e Helena, irmãos Antônio, Luciana e Mariana e avó Noemia, que tanto me apoiaram e me suportaram durante estes e todos os outros anos de minha vida.

A Karina que como mais um membro de minha família me apoiou, aturou e auxiliou nestes últimos anos.

Aos amigos Leonardo, Ernani, Ricardo, Rubens, Rodnei, Daniel (que a vida levou estúpida e futilmente), Douglas, Fernando, Marcone, Plácido, Daniela e tantos outros, amigos de graduação e pós-graduação, que estiveram ao meu lado nas festas, estudos, jogos, churrascos, cervejadas, viagens e em muitas outras grandes alegrias.

A todos os professores que ajudaram a fazer de mim aquilo que hoje sou.

E finalmente, a todos aqueles que fizeram parte de minha vida nestes anos, mas que não tive a oportunidade de mencionar nesta página.

RESUMO

Dado um C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ construímos uma C^* -álgebra $G \rtimes A$, chamada de Produto Cruzado, e também uma C^* -álgebra $G \rtimes_{\alpha r} A$, chamada de Produto Cruzado Reduzido. Obtemos também uma relação bijetiva entre as representações covariantes do C^* -sistema dinâmico e as representações não-degeneradas de $G \rtimes A$. Ao particularizarmos este C^* -sistema dinâmico para o caso em que o grupo G é mediável, a representação regular será um isomorfismo isométrico entre as C^* -álgebras $G \rtimes A$ e $G \rtimes_{\alpha r} A$. Verifica-se também que ao tomarmos o C^* -sistema dinâmico $\{\mathbb{C}, G, \alpha\}$ temos a veracidade da recíproca, isto é, a representação regular é fiel se, e somente se, o grupo G é mediável.

ABSTRACT

Given a C^* -dynamical system $\{A, G, \alpha\}$ we construct the C^* -algebra $G \rtimes A$, which is called Crossed Product, as well as, the C^* -algebra $G \rtimes_{\alpha r} A$, which is called Reduced Crossed Product. We achieve a bijection between the covariant representations of the C^* -dynamical system and the nondegenerate representations of $G \rtimes A$. Restricting this C^* -dynamical system to the case in which the group G is amenable, the regular representation will be an isometric isomorphism between the C^* -algebras $G \rtimes A$ and $G \rtimes_{\alpha r} A$. It can also be noted that if we take the C^* -dynamical system $\{\mathbb{C}, G, \alpha\}$ we achieve the truth of the reciprocal, that is, the regular representation is faithful if, and only if, the group G is amenable.

Índice

Introdução	1
1 C*-álgebras	5
1.1 Preliminares	5
1.2 O Teorema de Gelfand-Naimark para C*-álgebras comutativas	14
1.3 Aproximação da Unidade e Elementos Positivos	18
1.4 Teorema de Gelfand-Naimark-Segal e a Teoria das Representações . .	20
1.5 Multiplicadores e Centralizadores de uma C*-álgebra	28
2 Grupos Topológicos e Medida de Haar	33
2.1 Grupos Topológicos	33
2.2 Medida de Haar	37
3 Produtos Cruzados	49
3.1 Produto Cruzado	49
3.2 Produto Cruzado Reduzido	72
4 Mediabilidade e o Produto Cruzado Discreto	75
4.1 Mediabilidade	76

4.2	O Produto Cruzado Discreto	78
4.3	O Produto Cruzado de um Grupo Mediável Discreto pela C^* -álgebra dos Complexos	80
4.4	O Produto Cruzado de um Grupo Mediável Discreto por uma C^* -álgebra qualquer	88
Apêndice A		93
	Integração de Funções a Valores Vetoriais	93
Referências Bibliográficas		101

Introdução

Um C^* -sistema dinâmico é uma tripla $\{A, G, \alpha\}$, onde A é uma C^* -álgebra, G é um grupo topológico localmente compacto e α é um homomorfismo contínuo de G no grupo dos automorfismos de A , equipado com a topologia da convergência pontual. Podemos construir a partir de um C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ uma C^* -álgebra chamada de Produto Cruzado e denotada por $G \rtimes_{\alpha} A$.

Uma representação covariante de um C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ é uma terna (π, u, H) , onde H é um espaço de Hilbert, π é uma representação de A em $B(H)$ e u é uma representação unitária de G em $B(H)$, tal que $u_t \pi(a) u_t^* = \pi(\alpha_t(a))$. Estas representações desempenham um papel fundamental na construção do Produto Cruzado $G \rtimes_{\alpha} A$, uma vez que existe uma relação bijetiva entre as representações covariantes do C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ e as representações não-degeneradas de $L_1(G, A)$. Através dessa bijetividade podemos obter a representação (π_u, H_u) de $L_1(G, A)$, chamada de representação universal por ser a soma direta de todas as representações não degeneradas de $L_1(G, A)$, e utilizar esta representação, (π_u, H_u) , para definir o Produto Cruzado $G \rtimes_{\alpha} A$ como sendo o fecho de $\pi_u(L_1(G, A))$ em $B(H_u)$.

Tomando-se a representação covariante $(\tilde{\pi}_u, \lambda, L_2(G, H_u))$, onde $(\tilde{\pi}_u, L_2(G, H_u))$ é uma representação de A , construída a partir da representação universal (π_u, H_u) e λ é a representação regular de G , isto é, $\lambda_s(t) = s^{-1}t, \forall s, t \in G$, pode-se obter a partir da bijetividade citada no parágrafo anterior, a representação $(\tilde{\pi}_u \times \lambda, L_2(G, H_u))$, chamada de representação regular de $G \rtimes_{\alpha} A$. E assim, definimos o Produto Cruzado Reduzido, $G \rtimes_{\alpha} A$, como sendo a imagem de $G \rtimes_{\alpha} A$ via representação regular, isto é, $G \rtimes_{\alpha} A = \tilde{\pi}_u \times \lambda(G \rtimes_{\alpha} A)$.

Estas novas estruturas possuem propriedades especiais quando passamos a particularizar o C^* -sistema dinâmico inicial $\{A, G, \alpha\}$. Um exemplo é o caso em que o grupo G é *mediável*, esta é uma tradução não literal do termo inglês "amenable", pois se G é mediável então, $\tilde{\pi}_u \times \lambda$ é uma representação fiel e conseqüentemente o Produto Cruzado $G \rtimes_\alpha A$ será isometricamente isomorfo ao Produto Cruzado Reduzido $G \rtimes_{\alpha r} A$. Temos também o exemplo em que a C^* -álgebra A , em $\{A, G, \alpha\}$, é o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, neste caso a representação regular é fiel se, e somente se, o grupo G é mediável.

Neste trabalho desenvolveremos o que foi dito acima como a construção do Produto Cruzado $(G \rtimes_\alpha A)$ e do Produto Cruzado Reduzido $(G \rtimes_{\alpha r} A)$ para o caso geral, assim como, a bijetividade entre as representações covariantes de um C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ e as representações não-degeneradas de $L_1(G, A)$, ou melhor, de $G \rtimes_\alpha A$. Faremos também a demonstração dos dois teoremas envolvendo grupos mediáveis que foram descritos anteriormente, contudo, neste caso trataremos somente dos grupos mediáveis discretos a fim de simplificar um pouco as demonstrações de tais teoremas.

Para que pudéssemos desenvolver os resultados acima citados precisamos preliminarmente desenvolver um capítulo sobre C^* -álgebras onde apresentamos algumas das principais definições e exemplos de tal teoria e também alguns de seus principais resultados que serão de fundamental importância para o desenvolvimento dos dois últimos capítulos desta dissertação.

Assim como o primeiro capítulo, fez-se necessário um segundo capítulo que abrangesse tópicos como Grupos Topológicos e Medida de Haar para que conseguíssemos trabalhar com maior segurança nos capítulos posteriores. Em meio a este capítulo nos deparamos com algumas integrais de funções a valores vetoriais e por este motivo foi necessária a inclusão de um apêndice ao final da dissertação sobre este tópico, Integração de Funções a Valores Vetoriais, que será muito utilizado nos capítulos dois e três deste trabalho.

No terceiro capítulo mostramos a bijetividade existente entre as representações covariantes (π, u, H) de um C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ qualquer, e as representações não-degeneradas de $L_1(G, A)$ e logo após isto, definimos o Produto Cruzado

$G \rtimes_{\alpha} A$, e o Produto Cruzado Reduzido $G \rtimes_{\alpha^r} A$, mostrando também alguns exemplos e propriedades de tais estruturas.

Para finalizar este texto trazemos o capítulo quatro onde definimos o que é um grupo mediável e damos alguns exemplos de tais grupos, visto isto, faremos um pequeno insejo sobre o Produto Cruzado $G \rtimes_{\alpha} A$ e o Produto Cruzado Reduzido $G \rtimes_{\alpha^r} A$ nos casos em que o grupo G é discreto. Tal insejo tem a finalidade de auxiliar no desenvolvimento dos dois principais teoremas deste capítulo, que já foram descritos anteriormente.

Capítulo 1

C*-álgebras

Neste primeiro capítulo trataremos de alguns resultados de C*-álgebras que serão necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Servirá, não só, como um capítulo preliminar para orientar e dar referência sobre resultados que serão úteis no decorrer do texto, como também, realizará um trabalho de fixação da notação que será utilizada em toda a dissertação. Contudo, alguns dos resultados deste capítulo não serão desenvolvidos, deixando-se apenas uma referência ou uma idéia de como fazê-los, com a finalidade de não tornar o capítulo muito longo, o que fugiria de seu propósito.

1.1 Preliminares

Definição 1.1 *Uma álgebra A é um espaço vetorial, sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido de uma aplicação bilinear, aqui chamada de multiplicação, onde para todo a, b e $c \in A$ vale*

$$a(bc) = (ab)c.$$

Quando essa álgebra A possui uma norma, $\| \cdot \|$, que satisfaz a desigualdade

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \text{ para todo } a \text{ e } b \in A,$$

chamaremos ao par $(A, \| \cdot \|)$ de álgebra normada. Se A for completo, segundo essa norma, diz-se que A é uma álgebra de Banach.

E ainda, se a álgebra de Banach A admite uma unidade 1_A , isto é, se para todo $a \in A$ temos $1_A a = a 1_A = a$ e $\|1_A\| = 1$, então dizemos que A é uma álgebra de Banach com unidade.

No decorrer deste trabalho estaremos sempre utilizando álgebras definidas a partir de espaços vetoriais sobre o corpo dos números complexos e por este motivo iremos sempre nos referir a um espaço como sendo uma álgebra, ou uma álgebra de Banach ao invés de uma álgebra complexa ou uma álgebra de Banach complexa.

Da definição de álgebra normada, ou melhor, da desigualdade anterior podemos obter

$$\|ab - a'b'\| \leq \|a\| \|b - b'\| + \|a - a'\| \|b'\| \quad \text{para } a, b, a' \text{ e } b' \text{ em } A,$$

donde decorre a continuidade da multiplicação na álgebra normada A .

Definição 1.2 *Seja A uma álgebra, uma involução em A é um operador $*$ tal que*

$$\begin{aligned} * : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^* \end{aligned}$$

e para todo a e b em A e λ em $\mathbb{K}$, vale

$$\begin{aligned} (a + b)^* &= a^* + b^* \\ (\lambda a)^* &= \bar{\lambda} a^* \\ (a^*)^* &= a \\ (ab)^* &= b^* a^*. \end{aligned}$$

Uma álgebra com uma involução é dita uma álgebra involutiva ou uma $*$ -álgebra e uma álgebra de Banach A com uma involução que satisfaz a igualdade $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a \in A$, é chamada de $*$ -álgebra de Banach.

Definição 1.3 *Uma C^* -álgebra A é uma $*$ -álgebra de Banach onde $\|a^* a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$. Se A possui unidade, 1_A , então dizemos que A é uma C^* -álgebra com unidade.*

Observe que numa C^* -álgebra A , para cada elemento $a \in A$ temos

$$\|a\| = \sup_{\|a'\| \leq 1} \|aa'\|.$$

De fato, como $\|a'\| \leq 1$ então, $\|aa'\| \leq \|a\|$ e assumindo que $\|a\| = 1$ temos $\|a^*\| = 1$ e assim $\sup_{\|a'\| \leq 1} \|aa'\| \geq \|aa^*\| = \|a\|^2 = 1$.

Não é necessário supor que $\|1_A\| = 1$ quando A for uma C^* -álgebra não-nula e com unidade, porque segue automaticamente do fato anterior que $\|1_A\| = 1$.

Exemplo 1.4 O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ munido da involução dada pela conjugação complexa, $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$, e da norma obtida pelo módulo, $|\cdot|$, é uma C^* -álgebra.

Exemplo 1.5 O conjunto $C_0(X)$ das funções contínuas que tendem a zero fora de um subconjunto compacto de X , onde X é um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto (mais precisamente podemos definir $C_0(X)$ como o conjunto das funções f que tornam o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ compacto para todo $\epsilon > 0$), munido das operações pontuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

da norma do supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

E da involução dada por $f \mapsto \bar{f}$, onde $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, também é uma C^* -álgebra.

Exemplo 1.6 Seja H um espaço de Hilbert então $B(H)$, conjunto dos operadores limitados de H , é uma C^* -álgebra quando consideradas as operações

$$(T + S)(h) = T(h) + S(h)$$

$$(TS)(h) = T(S(h))$$

$$(\lambda T)(h) = \lambda T(h),$$

a norma usual de operadores

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| : h \in H, \|h\| \leq 1\},$$

e a involução obtida através do produto interno,

$$\langle Th, k \rangle = \langle h, T^*k \rangle \quad \text{para } h \text{ e } k \text{ em } H.$$

Exemplo 1.7 O conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ a valores complexos, $M_n(\mathbb{C})$, também é uma C^* -álgebra, basta identificarmos este espaço com $B(\mathbb{C}^n)$ e temos um caso particular do exemplo anterior.

Exemplo 1.8 As subálgebras fechadas e auto-adjuntas de $B(H)$, H um espaço de Hilbert, como no exemplo (1.6) também são C^* -álgebras.

O exemplo (1.6) acima sugere algumas definições para elementos com propriedades especiais dentro de uma C^* -álgebra, dentre elas podemos destacar.

Definição 1.9 Seja A uma álgebra involutiva e a um elemento de A então dizemos que:

- (i) a é hermitiano, ou auto-adjunto, quando $a^* = a$.
- (ii) a é normal, se $a^*a = aa^*$.
- (iii) se A possui unidade e $a^*a = aa^* = 1_A$ então, dizemos que a é unitário.

Definição 1.10 Um aplicação linear ϕ de uma $*$ -álgebra A a uma $*$ -álgebra B é chamada de $*$ -homomorfismo se

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= \phi(x)\phi(y) \quad e \\ \phi(x^*) &= \phi(x)^* \quad \forall x, y \in A. \end{aligned}$$

Se A e B possuem unidade exigimos que $\phi(1_A) = 1_B$. Um $*$ -homomorfismo bijetivo ϕ é chamado $*$ -isomorfismo. Se ϕ é um $*$ -isomorfismo de A em A dizemos que ϕ é um $*$ -automorfismo de A .

Como no decorrer do texto estaremos sempre utilizando a involução, abusaremos algumas vezes da linguagem e escreveremos apenas Álgebra de Banach, homomorfismo, isomorfismos, etc. ao invés de $*$ -álgebra de Banach, $*$ -homomorfismos, $*$ -isomorfismos.

Se uma álgebra A não possui unidade é freqüentemente conveniente e necessário construir, a partir de A , uma álgebra que possua uma unidade. Isso pode ser feito se construirmos $\tilde{A}$, chamada de unitização de A ¹, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A \oplus \mathbb{C} \\ (a, \lambda)(b, \mu) &= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\end{aligned}$$

e teremos como unidade de $\tilde{A}$ o elemento $(0, 1)$. Além disso, teremos uma identificação, através de um homomorfismo injetivo, de A com um ideal maximal de $\tilde{A}$ através dos elementos $(a, 0)$, para todo $a \in A$.

Se A é uma $*$ -álgebra então $\tilde{A}$ também é uma $*$ -álgebra considerando a involução

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}).$$

E se A for uma álgebra normada podemos tornar $\tilde{A}$ uma álgebra normada utilizando como uma das possíveis normas

$$\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

que satisfaz, para todo a e b em A e λ e μ em $\mathbb{C}$, as condições

$$\begin{aligned}\|(a, \lambda)(b, \mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| = \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\ &\leq \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu| \\ &= (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) \leq \|(a, \lambda)\|\|(b, \mu)\|\end{aligned}$$

e

$$\|(a, \lambda)^*\| = \|(a^*, \bar{\lambda})\| = \|a^*\| + |\bar{\lambda}| = \|a\| + |\lambda| = \|(a, \lambda)\|.$$

Como A pode ser identificado com uma subálgebra fechada² de $\tilde{A}$ então, $\tilde{A}$ será uma $*$ -álgebra de Banach se A de fato for uma $*$ -álgebra de Banach.

Por fim, se A é uma C^* -álgebra podemos definir em $\tilde{A}$ uma norma de tal forma que $\tilde{A}$ se torna uma C^* -álgebra, a demonstração desse fato está feita mais adiante em (1.15).

¹A unitização $\tilde{A}$ de uma álgebra A pode ser feita mesmo nos casos em que A já possui unidade.

²A verificação de que é um espaço fechado se torna simples simples, basta notar que uma seqüência convergente de elementos da forma $(a, 0)$ converge para um elemento deste mesmo tipo.

A unitização de uma álgebra descrita acima, serve para vários propósitos, entre eles, o de definir o espectro de um elemento a em uma álgebra A qualquer. Observe que a partir da definição de espectro para o caso em que A possui unidade dada a seguir, definimos com o auxílio da unitização o espectro quando A não possui unidade.

Definição 1.11 *Dada uma álgebra A com unidade e um elemento $a \in A$ definimos como o espectro de a em A o conjunto*

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1_A \notin \text{inv}(A)\}$$

onde $\text{inv}(A)$ é o conjunto dos elementos inversíveis de A . Definimos também o raio espectral de um elemento a de A como sendo

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(a)\}.$$

Mas para o caso em que A não possui unidade utilizamos o auxílio da unitização de A , como segue.

Definição 1.12 *Dada uma álgebra A sem unidade dizemos que o espectro de um elemento $a \in A$ é o conjunto*

$$\sigma_A(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a).$$

E da mesma forma o raio espectral de a será

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(a)\}.$$

O espectro de um elemento a em uma $*$ -álgebra de Banach A é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e diferente do vazio, por 1.2.4 e 1.2.5 de [10]. E pelo Teorema de Beurling, 1.2.7 de [10], temos para todo $a \in A$,

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \|a\|.$$

Lema 1.13 *Se a é um elemento auto-adjunto de uma C^* -álgebra A então,*

$$r(a) = \|a\|.$$

Demonstração: Como estamos numa C^* -álgebra e a é auto-adjunto então $a^* = a$ e $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$, indutivamente temos $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$ e pelo Teorema de Beurling

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2n}\|^{1/2n} = \|a\|.$$

■

Corolário 1.14 *Existe no máximo uma norma sobre uma $*$ -álgebra que a torna uma C^* -álgebra.*

Demonstração: Decorre imediatamente do Lema anterior que se tivéssemos duas normas, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, na $*$ -álgebra A tornando-a uma C^* -álgebra então,

$$\|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a)$$

$$\|a\|_2^2 = \|a^*a\|_2 = r(a^*a)$$

ou seja, $\|a\|_1 = \|a\|_2$, para todo a em A .

■

Antes de enunciarmos e provarmos o próximo teorema faremos alguns esclarecimentos, a fim de tornar sua demonstração mais clara e simples.

Dado um espaço de Banach A definimos $B(A)$ como sendo o conjunto dos operadores lineares limitados de A , isto é $\phi \in B(A)$ se, e somente se, $\phi : A \rightarrow A$ e também $\|\phi\| < \infty$, segundo a norma usual de operadores.

Sendo assim, podemos definir, para cada elemento (x, λ) de $\tilde{A}$, um operador $L_{(x, \lambda)}$ dado por

$$L_{(x, \lambda)}(y) = xy + \lambda y \quad \forall y \in A,$$

que claramente está em $B(A)$ pois,

$$\|L_{(x, \lambda)}\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy + \lambda y\| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \|x + \lambda\| \|y\| \leq \|x + \lambda\| < \infty.$$

Mais detalhes sobre este tipo de operadores podem ser vistos na última seção deste capítulo.

Teorema 1.15 *Seja A uma C^* -álgebra sem unidade então existe uma única norma em $\tilde{A}$ que o torna uma C^* -álgebra e que estende a norma de A .*

Demonstração: A unicidade dessa norma decorre imediatamente de (1.14) e sua existência será demonstrada a seguir.

Seja $(x, \lambda) \in \tilde{A}$ definimos

$$\|(x, \lambda)\|_c = \sup\{\|xy + \lambda y\| : \|y\| \leq 1, y \in A\},$$

ou de forma equivalente

$$\|(x, \lambda)\|_c = \|L_{(x, \lambda)}\|.$$

Observe que $\|(x, \lambda)\|_c < \infty$ pois, $\|(x, \lambda)\|_c = \|L_{(x, \lambda)}\| < \infty$.

De fato $\|\cdot\|_c$ é uma norma, já que, pela própria definição

$$\|(x, \lambda) + (z, \mu)\|_c \leq \|(x, \lambda)\|_c + \|(z, \mu)\|_c \quad e \quad \|\alpha(x, \lambda)\|_c = |\alpha| \|(x, \lambda)\|_c$$

para quaisquer x e z em A e λ, μ e α em $\mathbb{C}$.

E também ao assumirmos que $\|(x, \lambda)\|_c = 0$, para $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos $xy + \lambda y = 0$, para todo $y \in A$ com $\|y\| \leq 1$. Supondo $\lambda \neq 0$, temos $-\lambda^{-1}xy = y$ para todo $y \in A$ e dessa forma $u = -\lambda^{-1}x$ é uma unidade à esquerda de A e u^* uma unidade à direita. Como $u = uu^* = u^*$ então u é uma unidade de A , o que é uma contradição e portanto $\lambda = 0$ e conseqüentemente $x = 0$.

Observe que como $\|x\| = \sup\{\|xy\| : \|y\| \leq 1, y \in A\}$, para todo $x \in A$, então $\|\cdot\|_c$ estende a norma de A ($\|x\| = \|(x, 0)\|_c, \forall x \in A$).

Vejamos agora que $\|\cdot\|_c$ de fato torna $\tilde{A}$ uma C^* -álgebra. Dados (x, λ) e (y, μ) elementos de $\tilde{A}$, como $\|(x, \lambda)\|_c = \|L_{(x, \lambda)}\|$ então,

$$\|(x, \lambda)(y, \mu)\|_c \leq \|(x, \lambda)\|_c \|(y, \mu)\|_c$$

é válida.

E assim é suficiente mostrar que

$$\|(x, \lambda)\|_c^2 \leq \|(x, \lambda)^*(x, \lambda)\|_c.$$

Podemos escrever os elementos $(x, \lambda) \in \tilde{A}$ na forma $x + \lambda 1_{\tilde{A}}$, onde x se lê $(x, 0)$ e $1_{\tilde{A}}$ é a unidade $(0, 1)$ de $\tilde{A}$.

Seja r um número real, $0 < r < 1$. Pela definição da norma $\|\cdot\|_c$ existe $y \in A$, com $\|y\| \leq 1$ e tal que $r\|(x, \lambda)\|_c < \|xy + \lambda y\|$. Utilizando-se o fato de que $\|y\| = \|y\|_c$ e a identificação anterior temos

$$\begin{aligned} r^2\|(x, \lambda)\|_c^2 &\leq \|xy + \lambda y\|^2 = \|(xy + \lambda y)^*(xy + \lambda y)\| \\ &= \|y^*(x + \lambda 1_{\tilde{A}})^*(x + \lambda 1_{\tilde{A}})y\|_c \\ &\leq \|y^*\|_c \|(x + \lambda 1_{\tilde{A}})^*(x + \lambda 1_{\tilde{A}})\|_c \|y\|_c \\ &\leq \|(x + \lambda 1_{\tilde{A}})^*(x + \lambda 1_{\tilde{A}})\|_c \\ &= \|(x, \lambda)^*(x, \lambda)\|_c \end{aligned}$$

e fazendo $r \rightarrow 1$ temos $\|(x, \lambda)\|_c^2 \leq \|(x, \lambda)^*(x, \lambda)\|_c$.

Para mostrar que $\tilde{A}$ é completo tomemos uma seqüência de Cauchy (x_n, λ_n) em $\tilde{A}$. Então a seqüência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada pois, caso contrário poderíamos assumir que existe uma subseqüência $(\lambda_{n_i})_{i \in I}$ com $|\lambda_{n_i}| \rightarrow \infty$. Mas como $(x_{n_i}, \lambda_{n_i})_{i \in I}$ é limitada, teríamos

$$(1/\lambda_{n_i})x_{n_i} + 1_{\tilde{A}} = (1/\lambda_{n_i})(x_{n_i} + \lambda_{n_i} 1_{\tilde{A}}) \rightarrow 0,$$

e como A é completo e fechado em $\tilde{A}$ então $-x_{n_i}/\lambda_{n_i} \rightarrow 1_{\tilde{A}}$ e assim $1_{\tilde{A}} \in A$, uma contradição. Dessa forma $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e podemos assumir que existe uma subseqüência $(\lambda_{n_i})_{i \in I}$ onde $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Com isso escrevemos $x_{n_i} = (x_{n_i}, \lambda_{n_i}) - (0, \lambda_{n_i})$ o que nos mostra que $(x_{n_i})_{i \in I}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto $x_{n_i} \rightarrow x$, $x \in A$. E assim $(x_{n_i}, \lambda_{n_i}) \rightarrow (x, \lambda)$, com $(x, \lambda) \in \tilde{A}$. Portanto $(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x, \lambda)$.

■

Para finalizar esta parte relativa a unitização vale ressaltar que podemos também estender um $*$ -homomorfismo $\phi : A \rightarrow B$, A e B $*$ -álgebras, de forma única para um $*$ -homomorfismo $\tilde{\phi}$, da $*$ -álgebra $\tilde{A}$ para a $*$ -álgebra $\tilde{B}$. Para mostrarmos esta extensão teríamos que dividi-la em vários casos, como quando A e B não possuem unidade onde fazendo a identificação dos elementos $(x, \lambda) \in \tilde{A}$ como fizemos

anteriormente

$$(x, \lambda) = x + \lambda 1_{\tilde{A}}$$

teremos

$$\tilde{\phi}(x + \lambda 1_{\tilde{A}}) = \phi(x) + \lambda 1_{\tilde{B}}.$$

Mas precisaríamos também separar os casos em que A tem unidade e B não, o caso em que B tem unidade e A não e o caso em que A e B tem unidade e por este motivo não faremos tal demonstração deixando como referência o teorema 2.1.6 de [10] e seus comentários.

Com isto podemos provar o resultado a seguir.

Lema 1.16 *Todo $*$ -homomorfismo ϕ entre uma $*$ -álgebra de Banach A e uma C^* -álgebra B é norma decrescente, isto é, contrai a norma. Ou seja, para todo $a \in A$ vale*

$$\|\phi(a)\| \leq \|a\|.$$

Demonstração: Pelo que foi dito anteriormente podemos supor A e B com unidade e $\phi(1_A) = 1_B$, caso contrário, tomaríamos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, e $\tilde{\phi}$ levando a unidade de $\tilde{A}$ na unidade de $\tilde{B}$. Sendo assim, para todo $a \in A$ temos $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$, logo

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^* \phi(a)\| = \|\phi(a^* a)\| = r(\phi(a^* a)) \leq r(a^* a) \leq \|a^* a\| \leq \|a\|^2,$$

isto é, $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$.

■

Este lema será utilizado em (1.21) para demonstrar que um $*$ -homomorfismo injetivo entre C^* -álgebras é sempre uma isometria.

1.2 O Teorema de Gelfand-Naimark para C^* -álgebras comutativas

O teorema de Gelfand-Naimark nos diz que toda C^* -álgebra A comutativa é isometricamente isomorfa a $C_0(X)$ onde X é um espaço Hausdorff localmente com-

pacto. Para verificarmos isto iremos ver nesta seção este isomorfismo isométrico acompanhado da construção do espaço X .

Definição 1.17 *Numa C^* -álgebra comutativa A chamamos de caracter de A a todo $*$ -homomorfismo, não nulo, de A em $\mathbb{C}$ e denotamos por $\hat{A}$ ao conjunto de todos os caracteres de A , que também é chamado de espectro de A .*

Através da própria definição de caracter podemos ver que $\|\phi\| \leq 1$ para todo $\phi \in \hat{A}$. Além disso, existe uma relação entre os caracteres de A e o espectro dos elementos de A , que pode ser vista no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em 1.3.4 de [10].

Teorema 1.18 *Seja A uma $*$ -álgebra de Banach:*

i) *Se A possui unidade então,*

$$\sigma_A(a) = \{\phi(a) : \phi \in \hat{A}\}.$$

ii) *Se A não possui unidade então,*

$$\sigma_A(a) = \{\phi(a) : \phi \in \hat{A}\} \cup \{0\}.$$

Notação: Dado E um espaço normado denotamos por E^* ao dual de E , isto é, ao conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de E em $\mathbb{C}$.

Definição 1.19 *Dada uma $*$ -álgebra de Banach A comutativa, para cada $a \in A$, seja $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, para todo ϕ em $\hat{A}$. A aplicação que a cada elemento $a \in A$ associa a função $\hat{a} : \hat{A} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de transformada de Gelfand.*

A topologia em $\hat{A}$ é a topologia menos fina que torna todos os elementos $\hat{a}$ de $\hat{A}$ contínuos. Essa topologia coincide quando olhamos $\hat{A}$ como um subespaço de A^* munido da topologia fraco- $*$.

Dessa forma $\hat{A} \cup \{0\}$ é um espaço fraco- $*$ fechado na bola unitária fechada de A^* e pelo Teorema de Banach-Alaoglu, vide 3.1 de [2], sabemos que a bola unitária fechada de A^* é fraco- $*$ compacta, ou seja, $\hat{A} \cup \{0\}$ é fraco- $*$ compacto e assim $\hat{A}$ é

localmente compacto. Da mesma forma, vemos que quando A possui unidade então $\widehat{A}$ é fraco- $*$ fechado na bola unitária de A^* e assim sendo, é compacto.

Pelo teorema anterior podemos observar também que a transformada de Gelfand é um $*$ -homomorfismo e que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) \leq \|a\|$, ou seja, é norma decrescente.

Estamos prontos, agora, para demonstrar o Teorema de Gelfand-Naimark.

Teorema 1.20 (Gelfand-Naimark) *Se A é uma C^* -álgebra comutativa e não nula então, a representação de Gelfand dada por*

$$\begin{aligned}\Phi : A &\rightarrow C_0(\widehat{A}) \\ a &\mapsto \hat{a}\end{aligned}$$

é um $$ -isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Já vimos que Φ é um $*$ -homomorfismo norma decrescente com $\|\hat{a}(\phi)\|_\infty = \|\Phi(a)\|_\infty = r(a)$, além disso Φ é isométrico pois,

$$\|\Phi(a)\|_\infty^2 = \|\Phi(a)^* \Phi(a)\|_\infty = \|\Phi(a^* a)\|_\infty = r(a^* a) = \|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Como $\Phi(A)$ é uma $*$ -subálgebra fechada de $C_0(\widehat{A})$ que separa os pontos de $\widehat{A}$ e como para todo $\hat{a} \in \widehat{A}$ existe um elemento $a \in A$ tal que $\Phi(a)(\hat{a}) \neq 0$ temos como consequência do Teorema de Stone-Weierstrass, vide V.8.3 de [2], que $\Phi(A) = C_0(\widehat{A})$.

■

O Teorema de Gelfand-Naimark nos mostra que toda C^* -álgebra comutativa é isometricamente isomorfa a $C_0(X)$ para X um espaço localmente compacto, isto é, toda C^* -álgebra comutativa é essencialmente a álgebra das funções contínuas que tendem a zero no infinito sobre um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto. E ainda, se essa C^* -álgebra possui unidade então ela é a álgebra das funções contínuas sobre um compacto.

Como já conhecemos o Teorema de Gelfand-Naimark podemos demonstrar um resultado importante que foi citado na seção anterior, mas que não foi demonstrado pela necessidade de tal teorema agora enunciado.

Teorema 1.21 *Todo $*$ -homomorfismo injetivo $\phi : A \rightarrow B$, onde A e B são ambas C^* -álgebras, é necessariamente uma isometria.*

Demonstração: Vamos mostrar que $\|\phi(a)\|^2 = \|a\|^2$ para todo $a \in A$, o que equivale a mostrar que $\|\phi(a^*a)\| = \|a^*a\|$. Podemos supor A comutativo, caso contrário, tome a C^* -álgebra gerada por a^*a que está necessariamente contida em A . Podemos também supor B comutativo, ou então, restringirmos o contra-domínio ao fecho do conjunto gerado por $\phi(a^*a)$ que está necessariamente contido em B . E mais, podemos também supor A e B com unidade e $\phi(1_A) = 1_B$, como fizemos na demonstração de (1.16).

Se τ é um caracter de B então, $\tau \circ \phi$ é um caracter de A e assim podemos definir a função

$$\begin{aligned}\psi : \widehat{B} &\rightarrow \widehat{A} \\ \tau &\mapsto \tau \circ \phi\end{aligned}$$

que é contínua. Dessa forma $\psi(\widehat{B})$ é compacto, ou seja, $\psi(\widehat{B})$ é fechado em $\widehat{A}$ que também é compacto e pelo lema de Urysohn existe uma função contínua e não nula $f : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{C}$ que se anula em $\psi(\widehat{B})$.

Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, (1.20), $f = \hat{a}$ para algum $a \in A$, ou seja, para cada τ em $\widehat{B}$ temos $\tau \circ \phi(a) = \hat{a}(\tau \circ \phi) = 0$. Com isto, $\phi(a) = 0$ e portanto $a = 0$. Mas isto implica que $f = 0$, o que é uma contradição, ou seja, $\psi(\widehat{B}) = \widehat{A}$. Portanto,

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau \in \widehat{A}} |\tau(a)| = \sup_{\tau \in \widehat{B}} |\tau \circ \phi(a)| = \|\phi(a)\|,$$

para cada $a \in A$, o que nos mostra que ϕ é uma isometria. ■

A partir deste resultado podemos concluir outros muito importantes dentre eles o de que um $*$ -homomorfismo, $\phi : A \rightarrow B$, entre C^* -álgebras, nos dá sempre $\phi(A) \subset B$ é uma C^* -álgebra. Alguns outros resultados sobre este assunto podem ser encontrados no capítulo 3 de [10].

1.3 Aproximação da Unidade e Elementos Positivos

Definição 1.22 Um elemento a de uma C^* -álgebra A , qualquer, é dito positivo se a é auto-adjunto e $\sigma_A(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Escrevemos $a \geq 0$ para dizer que a é um elemento positivo e denotamos por A^+ o conjunto de todos elementos positivos de A . Para simplificar escreve-se que $a \geq b$ ou $b \leq a$ se $a - b \in A^+$.

Existe uma série de equivalências em relação a definição de elementos positivos e por isso descreveremos algumas delas na próxima proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em 1.6.1 de [4].

Proposição 1.23 Se A é uma C^* -álgebra e a é um elemento auto-adjunto qualquer de A então as afirmações abaixo são equivalentes:

- i) a é positivo;
 - ii) a é da forma b^*b para algum $b \in A$;
 - iii) existe algum h auto-adjunto de A tal que $a = h^2$;
- e ainda o conjunto A^+ forma um cone convexo e fechado tal que $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$.

A afirmação (iii), anterior, possui uma outra formulação que nos diz que todo elemento positivo a em A^+ possui uma única raiz quadrada positiva, ou seja, dado $a \in A^+$ existe $b \in A^+$ tal que $a = b^{1/2}$. Utilizando esta outra formulação podemos demonstrar o lema a seguir que nos será útil, na última seção deste capítulo, para provar a limitação de um centralizador, que ainda será definido.

Lema 1.24 Sejam a e b elementos de uma C^* -álgebra A tal que $a \geq 0$ e $b^*b \leq a$. Existe um elemento $u \in A$ tal que $\|u\| \leq \|a^{1/4}\|$ e $b = ua^{1/4}$.

Demonstração: Por conveniência utilizaremos A como se tivesse unidade, caso contrário poderíamos utilizar o artifício de identificar A em $\tilde{A}$ que possui uma unidade e teríamos os mesmos resultados que temos abaixo inclusive a existência de u em A .

Definindo-se para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = b(a + \frac{1}{n}1_A)^{-1/2}a^{1/4} \quad , \quad f_n(t) = t^{3/4}(t + \frac{1}{n})^{-1/2}$$

$$e \quad d_{nm} = (a + \frac{1}{n}1_A)^{-1/2} - (a + \frac{1}{m}1_A)^{-1/2}.$$

Observe que u_n , d_{mn} e f_n estão bem definidos pois, como a e $\frac{1}{n}1_A$ são positivos sua soma também será um elemento positivo, ou seja, $(a + \frac{1}{n}1_A)^{1/2}$ existe e esta bem definido. Note também que $a + \frac{1}{n}1_A$ é inversível porque pela positividade de a temos $\sigma_A(a) \subset \mathbb{R}_+$, no entanto, se olharmos $a + \frac{1}{n}1_A$ como $a - \lambda 1_A$ onde $\lambda = -\frac{1}{n}$ vemos que λ não pertence a $\sigma_A(a)$, ou seja, $a + \frac{1}{n}1_A$ é inversível.

Temos também a convergência uniforme de f_n para $t^{1/4}$ quando $t \in [0, \|a\|]$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \|bd_{nm}a^{1/4}\|^2 = \|a^{1/4}d_{nm}b^*bd_{nm}a^{1/4}\| \\ &\leq \|a^{1/4}d_{nm}ad_{nm}a^{1/4}\| = \|d_{nm}a^{3/4}\|^2 \\ &= \|f_n(a) - f_m(a)\|^2 \leq \sup_{t \in [0, \|a\|]} \|f_n(t) - f_m(t)\|^2 = \|f_n - f_m\|_\infty^2 \end{aligned}$$

e como f_n é de Cauchy então, u_n também é.

E assim, tomando-se $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ teremos

$$ua^{1/4} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n a^{1/4} = \lim_{n \rightarrow \infty} b(a + \frac{1}{n}1_A)^{-1/2} a^{1/2} = b.$$

Para terminar vejamos que

$$\|u_n\| = \|b(a + \frac{1}{n}1_A)^{-1/2} a^{1/4}\| \leq \|a^{1/2}(a + \frac{1}{n}1_A)^{-1/2} a^{1/4}\|$$

e assim $\|u\| \leq \|a^{1/4}\|$.

■

Definição 1.25 Uma aproximação da unidade numa álgebra normada A é uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em A que satisfaz $\lim_\lambda x_\lambda a = a = \lim_\lambda a x_\lambda$, para todo $a \in A$.

Se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_\lambda\| < M$, para todo $\lambda \in \Lambda$, diz-se que a aproximação da unidade é limitada.

Para o caso em que A é uma C^* -álgebra dizemos que a aproximação da unidade é crescente se x_λ for positivo para todo λ e se $\lambda \leq \gamma$ implicar em $x_\lambda \leq x_\gamma$.

Enunciaremos agora um teorema, muito útil para o restante deste trabalho, que garante a existência de uma aproximação da unidade crescente em uma C^* -álgebra. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em 13.1 de [6] e também em 3.1.1 de [10].

Teorema 1.26 *Dada uma C^* -álgebra A e um ideal denso I de A , então existe uma aproximação da unidade $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em I , crescente e tal que $\|u_\lambda\| \leq 1$. E ainda, se A é separável a aproximação da unidade pode ser indexada por um conjunto enumerável como $\mathbb{N}$.*

1.4 Teorema de Gelfand-Naimark-Segal e a Teoria das Representações

Definição 1.27 *Uma representação numa $*$ -álgebra A é um par (π, H) , onde H é um espaço de Hilbert e $\pi : A \rightarrow B(H)$ é um $*$ -homomorfismo. Quando A possui unidade exigimos que $\pi(1_A) = I_{B(H)}$. Uma representação π é dita fiel se o homomorfismo π é injetor, isto é, $\pi(a) = 0$ se, e somente se, $a = 0$.*

Definição 1.28 *Uma representação (π, H) de uma $*$ -álgebra A é dita cíclica se existe um vetor $\xi \in H$ tal que o subespaço $\pi(A)\xi = \{\pi(a)\xi : a \in A\}$ é denso em H . O vetor ξ é chamado de vetor cíclico.*

Observemos que como $B(H)$ é uma C^* -álgebra então, uma representação π de uma C^* -álgebra A , é um $*$ -homomorfismo entre C^* -álgebras e portanto, por (1.16), temos $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$, isto é π é limitado. Se π for fiel então, por (1.21), π é uma isometria de A em uma C^* -subálgebra de $B(H)$.

A soma direta de representações de uma C^* -álgebra A também é uma representação de A . De fato dada uma família de representações $(\pi_\lambda, H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ podemos construir a representação (π, H) de A , onde $H = \bigoplus_\lambda H_\lambda$ e $\pi(a)((\xi_\lambda)_\lambda) = (\pi_\lambda(a)\xi_\lambda)_\lambda$, para todo $a \in A$ e $\xi_\lambda \in H_\lambda$.

Definição 1.29 *Seja A uma C^* -álgebra, dizemos que um funcional ϕ de A é positivo se ele leva elementos positivos em números positivos ou equivalentemente, por (1.23), se*

$$\phi(a^*a) \geq 0 \quad \forall a \in A.$$

Um funcional linear positivo ϕ é chamado de estado se $\|\phi\| = 1$. O conjunto de todos os estados de A é denotado por $S(A)$ ³.

Lema 1.30 *Todo funcional linear positivo ϕ de uma C^* -álgebra A é contínuo. E seja $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma aproximação da unidade de A então $\|\phi\| = \lim_\lambda \phi(u_\lambda)$. No caso em que A possui unidade temos $\|\phi\| = \phi(1_A)$ ⁴.*

Esse é um resultado bastante conhecido e sua demonstração pode ser encontrada em I.9.5 de [3] ou em 3.3.1 e 3.3.3 de [10].

Antes de construirmos a representação de GNS desenvolveremos uma desigualdade que será necessária à construção. Seja ϕ um funcional linear positivo de uma C^* -álgebra A qualquer, podemos então definir um outro funcional linear positivo f de A da seguinte forma $f(c) = \frac{\phi(b^*cb)}{\phi(b^*b)}$ para um $b \in A$ fixo. Cabe notar que, de fato, f é funcional e linear e sua positividade decorre de $f(c^*c) = \frac{\phi(b^*c^*cb)}{\phi(b^*b)} \geq 0$, para todo $c \in A$.

Utilizando-se a continuidade de f , (1.30), temos

$$\|f\| = \lim_\lambda f(u_\lambda) = \lim_\lambda \frac{\phi(b^*u_\lambda b)}{\phi(b^*b)} = \frac{\phi(b^*b)}{\phi(b^*b)} = 1,$$

para (u_λ) uma aproximação da unidade de A . Com isso, $f(a^*a) \leq \|a^*a\|$, ou seja, $\phi(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\phi(b^*b)$.

Teorema 1.31 *Todo funcional linear positivo ϕ de uma C^* -álgebra A pode ser associado a uma representação (π_ϕ, H_ϕ) de A , chamada de representação GNS associada*

³Existe também uma generalização dessa definição para A uma $*$ -álgebra qualquer, onde um funcional é dito positivo se $\phi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

⁴Assim como a definição de funcional positivo pode ser estendida para A uma $*$ -álgebra de Banach, podemos estender este lema para A uma $*$ -álgebra de Banach com uma aproximação da unidade $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, uma demonstração deste fato pode ser vista em 2.1.5 de [4].

a ϕ , de forma que exista um vetor $\xi_\phi \in H_\phi$ cíclico, tal que

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle.$$

Demonstração: Seja ϕ um funcional positivo de A . Verifica-se facilmente pela desigualdade anterior que

$$N_\phi = \{a \in A : \phi(a^*a) = 0\}$$

é um ideal à esquerda fechado de A .

Definimos então um produto interno em A/N_ϕ como sendo,

$$\langle a + N_\phi, b + N_\phi \rangle = \phi(b^*a)$$

e denotaremos por H_ϕ ao espaço de Hilbert obtido através do completamento do espaço pré-hilbertiano A/N_ϕ .

Para todo $a \in A$ definimos o operador $\pi(a)$ em A/N_ϕ dado por

$$\pi(a)(b + N_\phi) = ab + N_\phi$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \|\pi(a)(b + N_\phi)\|^2 &= \langle ab + N_\phi, ab + N_\phi \rangle = \phi(b^*a^*ab) \\ &\leq \|a^*a\|\phi(b^*b) = \|a\|^2\|b + N_\phi\|^2 \end{aligned}$$

ou seja, $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ e assim o operador $\pi(a) \in B(A/N_\phi)$ tem uma única extensão contínua a um operador $\pi_\phi(a) \in B(H_\phi)$.

É imediato que π_ϕ é um $*$ -homomorfismo e dessa forma fica demonstrado que dado uma funcional linear positivo ϕ de uma C^* -álgebra A podemos construir uma representação (π_ϕ, H_ϕ) associada a esse funcional.

Observe que se a C^* -álgebra A possui unidade podemos definir um vetor ξ_ϕ em H_ϕ , com $\xi_\phi = 1 + N_\phi$, e assim teremos para todo $a \in A$,

$$\phi(a) = \phi(1^*a) = \langle a + n_\phi, 1 + N_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a)(1 + N_\phi), (1 + N_\phi) \rangle = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle$$

e ainda, como $\xi_\phi = 1 + N_\phi$ temos $\pi(A)\xi_\phi = A/N_\phi$ que é denso em H e assim fica provado que ξ_ϕ é cíclico.

Se a C^* -álgebra A não possui unidade podemos proceder da mesma forma só que ao invés de utilizarmos a unidade, para obtermos ξ_ϕ , utilizamos a aproximação da unidade $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, isto é, tomamos $\xi_\phi = \lim_\lambda (u_\lambda + N_\phi)$.

Observe que a sequência $(u_\lambda + N_\phi)_{\lambda \in \Lambda}$ é de Cauchy pois, por (1.30) sabemos que $\phi(u_\lambda) = \|\phi\|$ e assim dado $\epsilon > 0$ existem índices α e β em Λ com $\alpha \leq \beta$,

$$\phi(u_\alpha) > \|\phi\| - \epsilon \quad \|u_\lambda u_\alpha - u_\alpha\| < \epsilon \text{ para todo } \lambda \geq \beta.$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \phi(u_\lambda u_\alpha) = \phi(u_\alpha) - \operatorname{Re} \phi(u_\lambda u_\alpha - u_\alpha) \geq \|\phi\| - 2\epsilon$$

e então,

$$\begin{aligned} \|(u_\lambda + N_\phi) - (u_\alpha + N_\phi)\|^2 &= \phi((u_\lambda - u_\alpha)^2) \\ &= \phi(u_\lambda^2) + \phi(u_\alpha^2) - 2\operatorname{Re} \phi(u_\lambda u_\alpha) \\ &\leq \phi(u_\lambda) + \phi(u_\alpha) - 2(\|\phi\| - 2\epsilon) \leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para $\lambda, \mu \geq \beta$ temos

$$\|(u_\lambda + N_\phi) - (u_\mu + N_\phi)\| \leq \|(u_\lambda + N_\phi) - (u_\alpha + N_\phi)\| + \|(u_\alpha + N_\phi) - (u_\mu + N_\phi)\| \leq 4\epsilon^{1/2}.$$

E assim tomando-se $\xi_\phi = \lim_\lambda (u_\lambda + N_\phi)$ teremos,

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \lim_\lambda \phi(u_\lambda^* a u_\lambda) = \lim_\lambda \langle a u_\lambda + N_\phi, u_\lambda + N_\phi \rangle \\ &= \lim_\lambda \langle \pi_\phi(a)(u_\lambda + N_\phi), (u_\lambda + N_\phi) \rangle = \langle \pi_\phi(a) \xi_\phi, \xi_\phi \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, como $\xi_\phi = \lim_\lambda (u_\lambda + N_\phi)$ temos $\pi(A)\xi_\phi = A/N_\phi$ que é denso em H e portanto ξ_ϕ é um vetor cíclico.

■

Mais uma vez gostaria de ressaltar que o teorema anterior se aplica também para o caso de A ser uma $*$ -álgebra de Banach com uma aproximação da unidade $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, como o próprio leitor pode verificar.

Definição 1.32 *Seja A uma C^* -álgebra não nula, definimos (π_u, H_u) a representação universal de A como sendo a soma direta de todas as representações (π_ϕ, H_ϕ) , onde $\phi \in S(A)$.*

Antes de enunciarmos e provarmos o Teorema de Gelfand-Naimark-Segal, um dos principais de toda a Teoria de C^* -álgebra, se não o principal, vejamos um lema bastante importante para esta demonstração que pode ser encontrado em 5.1.11 de [10].

Lema 1.33 *Seja A uma C^* -álgebra não nula e a um elemento positivo de A então existe um estado ϕ de A tal que $\phi(a) = \|a\|$.*

Teorema 1.34 (Gelfand-Naimark-Segal) *Se A é uma C^* -álgebra não nula então a representação universal (π_u, H_u) é fiel.*

Demonstração: Sendo (π_u, H_u) a representação universal de A e supondo que $\pi_u(a) = 0$, sabemos por (1.33) que existe um estado ϕ tal que $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$ e pelo que vimos anteriormente

$$\phi(a^*a) = \langle \pi_\phi(a^*a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \|\pi_\phi(a)\xi_\phi\|^2$$

e assim como $\pi_u(a) = 0$ então, $\pi_\phi(a) = 0$ e por consequência da equação anterior $0 = \phi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, ou seja, $\|a\| = 0$. E dessa forma concluímos que a representação universal é fiel.

■

Por (1.21) sabemos que π_u ser fiel implica automaticamente que π_u é uma isometria, e portanto o que acabamos de provar é que toda C^* -álgebra é isometricamente isomorfa a uma C^* -subálgebra de $B(H)$, para H um espaço de Hilbert, isto é, podemos sempre enxergar uma C^* -álgebra como uma subálgebra de operadores de um espaço de Hilbert.

Enunciaremos e daremos a idéia da demonstração de um teorema que será necessário para a demonstração de um teorema importante do capítulo 3, mas para isto precisaremos, antes de enunciá-lo, definir algumas ferramentas importantes para a teoria das representações como as representações irredutíveis, os estados puros, etc..

Definição 1.35 *Um subespaço fechado K de H , H espaço de Hilbert, é invariante para um subconjunto Q de $B(H)$, se $\phi(K) \subset K$ para todo operador ϕ de Q .*

Uma representação (π, H) de uma $$ -álgebra A é dita topologicamente irredutível se os únicos subespaços fechados invariantes por $\pi(A)$ de H são os triviais, isto é, 0 e o próprio H . Ou equivalentemente, uma representação (π, H) não-nula é dita topologicamente irredutível se todo vetor não-nulo de H é cíclico.*

Definição 1.36 *Seja ϕ um estado de uma $*$ -álgebra de Banach A qualquer dizemos que ϕ é um estado puro se, para todo funcional linear positivo ρ de A , tal que $\rho \leq \phi$, necessariamente existe $t \in [0, 1]$ tal que $\rho = t\phi$.*

Como vimos anteriormente, na construção da representação GNS, todo funcional ϕ pode ser associado a uma representação (π_ϕ, H_ϕ) e através dessa associação veremos que os dois novos conceitos anteriormente definidos, representações irredutíveis e estados puros, estão estreitamente associados como nos sugere o teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em 2.5.4 de [4], ou em V.5.16 de [10], ou também em I.9.8 de [3].

Teorema 1.37 *Seja A uma $*$ -álgebra de Banach então ϕ é um estado puro se, e somente se, (π_ϕ, H_ϕ) é topologicamente irredutível.*

Um ponto x num conjunto convexo C é dito ponto extremo de C se a condição de que $x = ty + (1 - t)z$, para y e z em C e algum t tal que $0 < t < 1$, implica que $x = y = z$. Ou equivalente, x é um ponto extremo de C se, e somente se, para todo y e z em C tais que $x = \frac{y+z}{2}$ temos $x = y = z$.

Definição 1.38 *Dado um espaço vetorial E e um conjunto $C \subset E$, chamamos de convexificado de C ao menor subconjunto convexo de E que contém C . E representamos este conjunto por $\text{co}(C)$.*

Um dos grandes resultados de Análise Funcional que tem inúmeras aplicações é o Teorema de Krein-Milman que envolve os pontos extremos de um conjunto e que nos diz.

Teorema 1.39 (Krein-Milman) *Seja C um conjunto convexo, compacto e não vazio num espaço vetorial Hausdorff e localmente convexo X . Então o conjunto dos pontos extremos de C , denotado por E , é não vazio e $C = \overline{\text{co}}(E)$. E ainda se um subconjunto fechado E' de C é tal que $\overline{\text{co}}(E') = C$, então $E \subset E'$.*

Uma das aplicações do Teorema de Krein-Milman é o teorema a seguir que será de fundamental importância para a demonstração do último resultado desta seção.

Teorema 1.40 *Seja A uma $*$ -álgebra de Banach com uma aproximação da unidade e seja P o conjunto dos funcionais lineares positivos com norma menor ou igual a um, então:*

- i) o conjunto P é convexo e compacto segundo a topologia fraca- $*$ relativa a A^* ,*
- ii) os pontos extremos de P são o funcional nulo e os estados puros de A*
- iii) P é o fecho do convexificado do conjunto formado pelos estados puros de A e o funcional nulo.*

As demonstrações desses teoremas, (1.39) e (1.40), podem ser vistas, respectivamente, em A.14 de [10] e em 2.5.5 de [4].

Para um maior aprofundamento nesse assunto sobre representações topologicamente irredutíveis e estados puros recomendamos que o leitor veja o capítulo 5 de [10] pois, existem muitos resultados bonitos e importantes que não serão feitos aqui porque tornariam este capítulo introdutório muito extenso.

Teorema 1.41 *Seja A uma $*$ -álgebra de Banach com uma aproximação da unidade e sejam R o conjunto de todas as representações de A , R' o conjunto de todas as representações irredutíveis de A , P o conjunto dos funcionais positivos com norma menor ou igual a 1 de A e P' o conjunto de todos os estados puros de A . Então para cada $a \in A$ temos:*

$$\sup_{\pi \in R} \|\pi(a)\| = \sup_{\pi \in R'} \|\pi(a)\| = \sup_{f \in P} f(a^*a)^{1/2} = \sup_{f \in P'} f(a^*a)^{1/2}.$$

Se $\|a\|' = \sup_{\pi \in R} \|\pi(a)\|$, para todo $a \in A$, teremos $\|a\|' \leq \|a\|$, para todo $a \in A$, e com isto, $a \mapsto \|a\|'$ é uma seminorma para A tal que

$$\|ab\|' \leq \|a\|' \|b\|' \quad \|a^*\|' = \|a\|' \quad \|a^*a\|' = \|a\|'^2$$

para todo a e $b \in A$.

Demonstração: Para facilitar denotemos $\sup_{\pi \in R} \|\pi(a)\|$ por α , $\sup_{\pi \in R'} \|\pi(a)\|$ por β , $\sup_{f \in P} f(a^*a)^{1/2}$ por γ e $\sup_{f \in P'} f(a^*a)^{1/2}$ por δ .

($\delta \leq \beta$) Seja π uma representação irredutível ($\pi \in R'$) e f um estado puro associado a π ($f \in P'$), isto é, $f(a^*a) = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle$ para algum ξ unitário. E como

$$\|\pi(a)\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle$$

então, $\|\pi(a)\| \geq f(a^*a)^{1/2}$.

($\alpha \leq \gamma$) Como no caso anterior, podemos ver que

$$\|\pi(a)\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \phi_{\xi, \pi}(a^*a).$$

E assim $\|\pi(a)\| = \phi_{\xi, \pi}(a^*a)^{1/2}$, onde $\|\phi\| \leq 1$, já que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. Portanto $\sup_{\pi \in R} \|\pi(a)\| \leq \sup_{f \in P} f(a^*a)^{1/2}$.

($\beta \leq \alpha$) É óbvio, já que $R' \subset R$.

($\gamma \leq \delta$) Como os estados puros (P') e o funcional nulo (0) são os pontos extremos de P (1.40) temos, para todo $g \in P$, que $0 \leq g(a^*a) \leq f(a^*a)$ para algum $f \in P'$. Então $\sup_{f \in P} f(a^*a)^{1/2} = \sup_{f \in P'} f(a^*a)^{1/2}$.

Unindo-se todas as desigualdades anteriores teremos $\delta \leq \beta \leq \alpha \leq \gamma \leq \delta$, ou seja, $\delta = \beta = \alpha = \gamma$ que será designado por $\|\cdot\|'$.

Como $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$ então $\|a\|' \leq \|a\|$. Temos também $\|\pi(ab)\| \leq \|\pi(a)\| \|\pi(b)\|$, $\|\pi(a^*)\| = \|\pi(a)^*\| = \|\pi(a)\|^*$ e $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$, ou seja, $\|ab\|' \leq \|a\|' \|b\|'$, $\|a^*\|' = \|a\|'$ e $\|a^*a\|' = (\|a\|')^2$ para todo a e $b \in A$. E assim $\|\cdot\|'$ é uma seminorma em A .

E como feito anteriormente, podemos tomar um ideal $I = \{a \in A : \|a\|' = 0\}$ e passarmos A ao quociente com I , isto é, tomarmos A/I e assim teremos $\|\cdot\|'$ uma norma de A/I .

Observe que quando A é uma C^* -álgebra teremos $\|a\|' = \|a\|$ para todo $a \in A$.

■

1.5 Multiplicadores e Centralizadores de uma C^* -álgebra

Definição 1.42 Uma representação (π, H) é dita não degenerada se $\pi(A)$ é não degenerada, isto é, se $\forall h \in H, h \neq 0$, existe $T \in \pi(A)$ tal que $T(h) \neq 0$.

Definição 1.43 Seja A uma C^* -subálgebra não degenerada de $B(H)$ dizemos que um operador $x \in B(H)$ é um multiplicador à esquerda (à direita) de A se $xA \subset A$ ($Ax \subset A$). Se x é ao mesmo tempo multiplicador à esquerda e à direita dizemos que x é um duplo multiplicador de A .

Denotaremos por $LM(A)$, $RM(A)$ e $M(A)$, respectivamente, o conjunto dos multiplicadores à esquerda, à direita e duplo multiplicadores de A . Observe que $LM(A)$, $RM(A)$ e $M(A)$ são subconjuntos de $B(H)$ e para mostrar que estes multiplicadores não dependem da particular representação π em $B(H)$, introduziremos a noção de centralizadores de uma C^* -álgebra.

Definição 1.44 Uma função linear $L : A \rightarrow A$ é chamada centralizador à esquerda de A se $L(xy) = L(x)y$, para todo x e y em A . Analogamente uma função linear $R : A \rightarrow A$ é chamada centralizador à direita de A se $R(xy) = xR(y)$. Um par (L, R) é dito duplo centralizador de A se L e R são respectivamente centralizadores à esquerda e à direita de A e ainda $xL(y) = R(x)y$ para todo x e y em A .

Um fato importante e que será necessário no decorrer do texto é o de que todo centralizador à esquerda (à direita, ou duplo) é um operador limitado. Para demonstrarmos tal resultado utilizaremos o lema 1.24, já provado neste capítulo.

Proposição 1.45 Todo centralizador à esquerda L de uma C^* -álgebra é limitado.

Demonstração: Supondo que L é ilimitado então podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A com $\|x_n\| < 1/n$ e $\|L(x_n)\| > n$. Mas para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir $a = \sum_{i=1}^n x_i^* x_i$ e pelo lema (1.24) existe y_n em A tal que $\|y_n\| \leq \|a^{1/4}\|$ e $x_n = a^{1/4} y_n$, mas

$$n < \|L(x_n)\| = \|L(a^{1/4} y_n)\| \leq \|L(a^{1/4})\| \|a^{1/4}\|,$$

o que é uma contradição. ■

De modo análogo podemos demonstrar que o centralizador à direita e também o duplo centralizador são operadores limitados.

Proposição 1.46 *Seja A uma C^* -subálgebra não degenerada de $B(H)$ existe uma correspondência bijetiva entre os multiplicadores à esquerda, à direita e duplo multiplicador e os centralizadores respectivamente à esquerda, à direita e duplo centralizador.*

Demonstração: Seja L um centralizador à esquerda de A e $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma aproximação da unidade de A então a rede $(L(u_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ é limitada, por (1.45), e portanto existe uma sub-rede que converge fracamente para um elemento x em $B(H)$.

Como para todo y em A a rede (yu_λ) converge na norma para y então, por (1.45), temos $L(yu_\lambda)$ convergindo para $L(y)$, e como $L(u_\lambda y) = L(u_\lambda)y$ temos $xy = L(y)$. Ou seja, x é o multiplicador à esquerda correspondente ao centralizador L .

Supondo que exista outro multiplicador à esquerda x_1 correspondente a L então $x_1 y = L(y)$, logo $(x - x_1)y = 0$ e como estamos numa C^* -álgebra não degenerada e y é qualquer em A então, $x = x_1$. Observemos também que

$$\|L\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|L(y)\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\| = \|x\|.$$

Mostramos assim a bijetividade da correspondência entre os multiplicadores à esquerda e os centralizadores à esquerda de A . Analogamente podemos demonstrar a correspondência existente entre os multiplicadores à direita e os centralizadores à direita.

Para o duplo centralizador (L, R) temos seus respectivos correspondentes (l, r) multiplicadores à esquerda e à direita de A , mas para todo x e y em A temos $xry = R(x)y = xL(y) = xly$, ou seja, $r = l$ e portanto é um duplo multiplicador. ■

Com base na proposição anterior trataremos sem muita distinção os multiplicadores e os centralizadores. Além disso, denotaremos sem restrições $M(A)$, $LM(A)$ e $RM(A)$ também como o conjunto, respectivamente, dos duplo centralizadores, centralizadores à esquerda e à direita de A .

Teorema 1.47 *Se A é uma C^* -álgebra então, $M(A)$ também é uma C^* -álgebra sob a multiplicação, involução e norma, dadas por*

$$(L, R)(L_1, R_1) = (LL_1, R_1R) \quad \|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*) \text{ onde } L^*(a) = (L(a^*))^* \text{ e } R^*(a) = (R(a^*))^*$$

para todo (L, R) e (L_1, R_1) em $M(A)$ e a em A .

Demonstração: Apesar desta demonstração parecer óbvia via multiplicadores faremos uma demonstração utilizando apenas a definição de multiplicadores sem precisar da analogia entre multiplicadores e centralizadores.

Em primeiro lugar vamos provar que $\|L\| = \|R\|$, para isto vejamos que

$$\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\|\|a\|\|b\|,$$

e assim

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\|\|b\|$$

e assim $\|L\| \leq \|R\|$, e de modo análogo ($\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\|\|a\|\|b\|$) podemos demonstrar que $\|R\| \leq \|L\|$, ou seja, $\|L\| = \|R\|$.

Alguns cálculos imediatos nos mostram que o produto de dois duplo centralizadores, $(L, R)(L_1, R_1) = (LL_1, R_1R)$, é de fato um duplo centralizador, que $\|(LL_1, R_1R)\| \leq \|(L, R)\|\|(L_1, R_1)\|$ e também que $(L, R)^*$ como definida acima é uma involução em $M(A)$ que preserva a norma.

Nos resta mostrar que o duplo centralizador $(L, R) \in M(A)$ de fato satisfaz a condição $\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(L, R)\|^2$.

Seja $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$ então,

$$\begin{aligned} \|R(a)\|^2 &= \|(R(a))^*R(a)\| = \|R^*(a^*)R(a)\| = \|a^*L^*(R(a))\| \\ &= \|a^*L^*R(a)\| \leq \|L^*R(a)\| \leq \|L^*R\| = \|R^*L\| \\ &= \|(R^*L, RL^*)\| = \|(R^*, L^*)(L, R)\| = \|(L, R)^*(L, R)\| \end{aligned}$$

e

$$\|(L, R)\|^2 = \sup_{\|a\| \leq 1} \|R(a)\|^2 \leq \|(L, R)^*(L, R)\| \leq \|(L, R)\|^2$$

e assim temos $\|(L, R)\|^2 = \|(L, R)^*(L, R)\|$. Ou seja, $M(A)$ é uma C^* -álgebra.

■

Além de $M(A)$ ser uma C^* -álgebra com unidade (basta tomar (id_A, id_A)) temos a propriedade de que dado $a \in A$, o par (L_a, R_a) , onde $L_a(x) = ax$ e $R_a(x) = xa$ para todo $x \in A$, é um duplo centralizador de A e ainda

$$\|a\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|xa\|,$$

ou seja, $\|a\| = \|L_a\| = \|R_a\|$ e com isto, A pode ser visto em $M(A)$ através do $*$ -isomorfismo isométrico $a \mapsto (L_a, R_a)$.

Assim como A pode ser identificado a uma C^* -subálgebra de $M(A)$, $\tilde{A}$ pode ser identificado a uma C^* -subálgebra de $M(A)$ através do $*$ -isomorfismo isométrico $(a, \lambda) \mapsto (L_{(a, \lambda)}, R_{(a, \lambda)})$, para todo $(a, \lambda) \in \tilde{A}$, onde $L_{(a, \lambda)}$ e $R_{(a, \lambda)}$ são dados por:

$$L_{(a, \lambda)}(b) = ab + \lambda b$$

$$R_{(a, \lambda)}(b) = ba + \lambda b$$

para todo b em A .

Verifica-se que de fato $(L_{(a, \lambda)}, R_{(a, \lambda)})$ é um duplo centralizador de A . E também vemos que $\|L_{(a, \lambda)}\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\| = \|(a, \lambda)\|_{\tilde{A}}$. Isto nos mostra a identificação que queremos de $\tilde{A}$ em $M(A)$.

Capítulo 2

Grupos Topológicos e Medida de Haar

Este capítulo, assim como o anterior, tem uma caráter introdutório pois, aqui serão dadas definições e feitas demonstrações de resultados que serão necessários ao desenvolvimento dos próximos capítulos. Subdividimos tal capítulo em duas seções, que mais parecem uma só, onde trataremos de Grupos Topológicos e de Medida de Haar.

Em alguns momentos deste capítulo será necessária a integração de funções a valores vetoriais e para não prolongar ainda mais estes tópicos introdutórios deixamos o desenvolvimento de tal assunto no final desta dissertação em forma de apêndice para aqueles que quiserem ou por insegurança, ou por curiosidade, ou por qualquer outro motivo consultarem tais assuntos.

2.1 Grupos Topológicos

Definição 2.1 *Um grupo topológico G é um grupo e ao mesmo tempo um espaço topológico Hausdorff no qual as operações $G \times G \rightarrow G$ definida por $(s, t) \mapsto st$ e $G \rightarrow G$ dada por $t \mapsto t^{-1}$ são contínuas.*

Exemplo 2.2 *Os grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ munidos da topologia usual são grupos topológicos*

relativos a adição.

Exemplo 2.3 Para $n \in \mathbb{N}$, o grupo $\mathbb{Z}_n$, dos inteiros módulo n , munido da topologia discreta, também é um grupo topológico relativo a adição.

Exemplo 2.4 O grupo $\mathbb{R}_+^*$, munido da topologia induzida pela topologia usual da reta, é um grupo topológico relativo a multiplicação que denotaremos por $\mathbb{R}_\times$.

Exemplo 2.5 O grupo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, munido pela topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{C}$, é um grupo topológico relativo a multiplicação usual dos complexos.

Existem muitos outros exemplos de tais grupos que, como toda a teoria que será desenvolvida nesta seção, podem ser facilmente encontrados em livros como [8] e [9] citados na referência bibliográfica.

Sempre que nos referirmos ao grupo topológico G denotaremos a unidade deste por e e para todo subconjunto F de G e todo elemento x de G teremos

$$Ft = \{st : s \in F\} \quad tF = \{ts : s \in F\} \quad F^{-1} = \{s^{-1} : s \in F\}$$

e diremos que F é simétrico se $F = F^{-1}$.

Proposição 2.6 Seja G um grupo topológico então :

1. A topologia de G é invariante por translações e inversões, isto é, se U é um aberto de G e t um elemento de G então, tU , Ut e U^{-1} serão abertos de G . E também, se U é um aberto de G então UF e FU também serão abertos, para qualquer $F \subset G$.
2. Para toda vizinhança U de e existe uma vizinhança V de e simétrica e tal que $VV \subset U$.
3. Se F e E são subconjuntos compactos de G então FE também é compacto.

Demonstração:

1. Seja U um aberto então para todo $t \in G$ teremos tU , Ut e U^{-1} abertos devido a continuidade das funções $(t, s) \rightarrow ts$ e $s \rightarrow s^{-1}$. E ainda, $AU = \bigcup_{t \in A} tU$ e $UA = \bigcup_{t \in A} Ut$, ou seja, uma união de abertos, logo abertos.
2. Pela continuidade da multiplicação temos para cada vizinhança U de e existem outras vizinhanças V_1 e V_2 de e tais que $V_1 V_2 \subset U$ e sendo assim tomamos V , a vizinhança simétrica de e desejada, como $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$.
3. Basta observar que EF é a imagem do compacto $E \times F$ pela função multiplicação que é contínua, isto é, EF é compacto.

■

Seja f uma função cujo domínio é um grupo topológico G e cujo contra-domínio em nossos exemplos será ou $\mathbb{C}$ ou um espaço de Banach A qualquer. Dado s um elemento de G definiremos translações à esquerda e à direita por s , respectivamente, como

$$\lambda_s f(t) = f(s^{-1}t) \quad e \quad {}_s\lambda f(t) = f(ts) \quad \forall t \in G$$

a razão de usarmos s^{-1} em λ_s e s em ${}_s\lambda$ é que dessa forma essas translações se tornam homomorfismos, para isso basta observar que dados s, t e r em G temos

$$\lambda_{sr} f(t) = f(r^{-1}s^{-1}t) = \lambda_r f(s^{-1}t) = \lambda_s \lambda_r f(t)$$

e

$${}_s\lambda {}_r\lambda f(t) = f(tsr) = {}_r\lambda f(ts) = {}_s\lambda {}_r\lambda f(t).$$

Definição 2.7 *Uma função f é uniformemente contínua à esquerda se*

$$\|\lambda_s f - f\|_{sup} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \rightarrow e.$$

Analogamente dizemos que f é uniformemente contínua à direita se

$$\|{}_s\lambda f - f\|_{sup} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \rightarrow e.$$

Observe que a norma utilizada na definição acima é o supremo dentre os valores atingidos pela norma do contra-domínio de f , que em nosso caso será ou a norma

usual de $\mathbb{C}$ ou a norma de um espaço de Banach A . Além disso, pela própria definição de função uniformemente contínua podemos ver que toda função uniformemente contínua é contínua.

Definição 2.8 Definimos o suporte de uma função $f : A \rightarrow B$, onde A e B são espaços vetoriais topológicos, como o fecho do conjunto $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$. E denotamos este conjunto por $\text{supp} f$.

Definição 2.9 Denotaremos por $K(G)$ o conjunto das funções $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas e de suporte compacto.

Proposição 2.10 Se $f \in K(G)$ então f é uniformemente contínua à esquerda e à direita.

Demonstração: Faremos a demonstração apenas para λ_s já que para ${}_s\lambda$ se faz, sem maiores dificuldades, uma prova análoga.

Sejam f em $K(G)$ e $\epsilon > 0$ denote por $C = \text{supp} f$. Para cada $t \in C$ existe uma vizinhança U_t de e tal que $|f(s^{-1}t) - f(t)| < \epsilon/2$ para $s^{-1} \in U_t$, existe também uma vizinhança V_t de e simétrica tal que $V_t V_t \subset U_t$. As vizinhanças $\{V_t t, t \in C\}$, fornecem uma cobertura para C e portanto existem $t_1, t_2, \dots, t_n \in C$ tais que $C \subset \bigcup_{i=1}^n V_{t_i} t_i$.

Tomemos $V = \bigcap_{i=1}^n V_{t_i}$, logo $\|\lambda_s f - f\|_{\text{sup}} < \epsilon$ para $s \in V$ pois, se $t \in C$ então existe algum j tal que $tt_j^{-1} \in V_{t_j}$ e também $s^{-1}t = s^{-1}(tt_j^{-1})t_j \in U_{t_j} t_j$.

Desse modo,

$$|f(s^{-1}t) - f(t)| \leq |f(s^{-1}t) - f(t_j)| + |f(t_j) - f(t)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Para o caso em que $s^{-1}t \in C$ e o caso em que ambos não estão em C teremos o mesmo resultado, ressaltando-se que neste último teremos $f(s^{-1}t) = f(t) = 0$.

■

2.2 Medida de Haar

Definição 2.11 *Um grupo localmente compacto é um grupo topológico cuja topologia é localmente compacta.*

Seja G um grupo localmente compacto e tomemos $K^+(G) \subset K(G)$ como sendo o conjunto das funções contínuas de suporte compacto positivas e não identicamente nulas, isto é,

$$K^+(G) = \{f \in K(G) : f \geq 0 \text{ e } f(t) \neq 0, \text{ para algum } t \in G\}$$

Definição 2.12 *Seja X um espaço Hausdorff e localmente compacto, com Ω uma σ -álgebra que contenha todos os borelianos. Uma medida μ é chamada de medida de Radon se $\mu(C) < \infty$, para todo C subconjunto compacto de X e se para todo U em Ω vale $\mu(U) = \sup \{\mu(C) : C \subset U \text{ e } C \text{ compacto}\}$ e também $\mu(U) = \inf \{\mu(V) : U \subset V \text{ e } V \text{ aberto}\}$.*

Denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ conjunto de todas as medidas complexas de Radon sobre um espaço X Hausdorff e localmente compacto.

O próximo teorema será apenas enunciado, mas pode-se encontrar uma demonstração bastante clara deste no apêndice C de [2].

Teorema 2.13 (Teorema da representação de Riesz) *Se X é um espaço localmente compacto e $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definimos $F_\mu : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ por*

$$F_\mu(f) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C_0(X)$$

e assim a função $\mu \rightarrow F_\mu$ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{M}(X)$ e $C_0(X)^$.*

Definição 2.14 *Uma medida de Haar invariante à esquerda (respectivamente à direita) sobre um grupo localmente compacto G é uma medida de Radon não nula μ sobre G tal que $\mu(tU) = \mu(U)$ (respectivamente $\mu(Ut) = \mu(U)$), para todo conjunto $U \subset G$ boreliano e todo $t \in G$.*

Proposição 2.15 *Seja μ uma medida de Radon sobre um grupo localmente compacto G e $\tilde{\mu}(U) = \mu(U^{-1})$.*

i) μ é uma medida de Haar invariante à esquerda se, e somente se, $\tilde{\mu}$ é uma medida de Haar invariante à direita.

ii) μ é uma medida de Haar invariante à esquerda se, e somente se, $\int_G \lambda_s f d\mu = \int_G f d\mu$ para toda $f \in K^+(G)$ e todo $s \in G$.

Demonstração: i) Basta observar que se uma das duas for uma medida de Radon não nula então a outra também será e que se $\mu(tU) = \mu(U)$ então, $\tilde{\mu}(Ut) = \tilde{\mu}(U)$ e vice-versa para todo $U \subset G$ conjunto boreliano e todo $t \in G$.

ii) Para toda medida de Radon μ e $f \in K(G)^+$ temos $\int_G \lambda_s f d\mu = \int_G f d\mu_s$, onde $\mu_s(U) = \mu(sU)$, isto porque toda f de $K^+(G)$ pode ser aproximada por funções simples, isto é, por funções da forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{U_i}$, onde a igualdade é válida. E dessa forma, se μ é uma medida de Haar invariante à esquerda então, $\int_G \lambda_s f d\mu = \int_G f d\mu$.

Supondo que $\int_G \lambda_s f d\mu = \int_G f d\mu$ para toda f em $K^+(G)$ então, a igualdade também vale para toda f em $K(G)$ já que, toda $f \in K(G)$ pode ser escrita como $f = f_+ - f_-$, onde f_+ e f_- estão em $K^+(G)$ e por conseguinte para todo $f \in L_1(G, \mu)$. Pelo Teorema da representação de Riesz temos a unicidade da medida, ou seja, $\mu = \mu_s$.

■

Teorema 2.16 *Todo grupo localmente compacto G possui uma medida de Haar invariante à esquerda μ . E se μ e λ são duas medidas de Haar invariantes à esquerda sobre G então, existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\mu = c\lambda$.*

A demonstração deste teorema não será feita devido a sua extensão, mas pode ser encontrada em 2.10 e 2.20 de [8] e também em 15.5 e 15.8 de [9].

Um espaço bastante importante e que será muito utilizado no decorrer deste trabalho e que também é um belo exemplo da utilização da medida de Haar é o $L_1(G, \mu)$, onde μ é uma medida de Haar sobre um grupo localmente compacto G .

Este espaço é construído a partir de

$$\mathcal{L}_1(G, \mu) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ mensurável e } \int_G |f(t)| d\mu(t) < \infty\}$$

e da relação de equivalência $f \sim g \leftrightarrow f = g$ quase sempre. Definimos então,

$$L_1(G, \mu) = \mathcal{L}_1(G, \mu) / \sim$$

Proposição 2.17 *Se G é um grupo topológico localmente compacto então $L_1(G, \mu)$ é um espaço vetorial que munido da norma $\|f\|_1 = \int_G |f(t)| d\mu(t)$ e da multiplicação, chamada de convolução, $(f \times g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t) d\mu(s)$ se torna uma álgebra de Banach. Além disso, se G é abeliano então, $L_1(G)$ também será abeliano.*

A demonstração deste resultado e de alguns outros bastante conhecidos que serão utilizados aqui, como $K(G)$ ser fortemente denso em $L_1(G)$, $C_0(G)$ também ser denso em $L_1(G)$, e além disso, ser uma subálgebra de Banach de $L_1(G)$ podem ser encontrada em [9].

Algumas vezes, quando não causar nenhum tipo de confusão, denotaremos $L_1(G, \mu)$ apenas por L_1 , por $L_1(G)$, ou por $L_1(\mu)$.

A construção de uma medida de Haar invariante à esquerda em um grupo G localmente compacto nos remete a pensar na relação desta com uma possível medida de Haar invariante à direita. Sendo assim suponhamos μ uma medida de Haar invariante à esquerda em G então, para todo $t \in G$ e $U \subset G$ definimos $\mu_t(U) = \mu(Ut)$ onde μ_t será ainda uma medida de Haar invariante à esquerda, isto devido a associatividade do grupo (para todo $s \in G$ temos $s(Ut) = (sU)t$). Pela unicidade (a menos de multiplicação por constante) da medida vista no teorema (2.16) temos a existência de um número real positivo $\Delta(t)$, para cada t , tal que $\mu_t = \Delta(t)\mu$. Cabe ressaltar que Δ independe da escolha de μ e também que Δ é uma função de G em $\mathbb{R}_+$.

Definição 2.18 *A função Δ obtida através da construção acima é chamada de função modular de G .*

Proposição 2.19 A função Δ é um homomorfismo contínuo de G em $\mathbb{R}_\times$ e também para toda f em $L_1(G)$ vale,

$$\int_G {}_s\lambda f d\mu = \Delta(s^{-1}) \int_G f d\mu,$$

ou

$$\int_G f(ts) d\mu(t) = \Delta(s^{-1}) \int_G f(t) d\mu(t).$$

Demonstração: Para todo t e $s \in G$ e $U \subset G$,

$$\Delta(ts)\mu(U) = \mu(Uts) = \Delta(s)\mu(Ut) = \Delta(s)\Delta(t)\mu(U) = \Delta(t)\Delta(s)\mu(U),$$

ou seja, Δ é um homomorfismo de G em $\mathbb{R}_\times$. Como $\chi_U(ts) = \chi_{Us^{-1}}(t)$ temos

$$\int_G \chi_U(ts) d\mu(t) = \mu(Us^{-1}) = \Delta(s^{-1})\mu(U) = \Delta(s^{-1}) \int_G \chi_U(t) d\mu(t).$$

O que demonstra a igualdade acima para $f = \chi_U$, e como podemos aproximar uma f qualquer em $L_1(G)$ por funções simples então o resultado segue para qualquer f .

Seja $f \in L_1(G)$ uma função com integral não nula, então

$$\Delta(s) = \left[\int_G f d\mu \right] \left[\int_G {}_s\lambda f d\mu \right]^{-1},$$

ou seja, a continuidade de Δ decorre da continuidade da função ${}_s\lambda$.

■

Além desse resultado envolvendo a função modular podemos citar alguns outros como por exemplo:

Proposição 2.20 Seja μ uma medida de Haar invariante à esquerda em G um grupo topológico localmente compacto então, para toda $f \in L_1(G)$ e $s, t \in G$ temos

$$\begin{aligned} \int_G f(s) d\mu(ts) &= \int_G f(s) d\mu(s) \\ \int_G f(s) d\mu(st) &= \int_G \Delta(t) f(s) d\mu(s) \\ \int_G f(s) d\mu(s^{-1}) &= \int_G \Delta(s^{-1}) f(s) d\mu(s) \end{aligned}$$

A demonstração das duas primeiras igualdades podem ser feitas de forma análoga a demonstração de (2.19), levando-se em conta que a medida μ é invariante à esquerda e aproximando-se $f \in L_1(G)$ por funções simples. Já a demonstração da última igualdade pode ser vista em 15.15 de [9].

Utilizando-se o conceito de função modular podemos enriquecer, ainda mais, a estrutura de $L_1(G)$, visto em (2.17), como veremos na proposição abaixo.

Proposição 2.21 *Seja G um grupo topológico como em (2.17), ao munirmos $L_1(G)$ com a operação de involução dada por $f^*(t) = \Delta(t)^{-1} \overline{f(t^{-1})}$, para toda $f \in L_1(G)$, tornamos este espaço uma $*$ -álgebra de Banach.*

Demonstração: Dado $f \in L_1(G)$ é evidente que f^* também pertence a $L_1(G)$. E complementando (2.17) basta mostrar que $\|f\|_1 = \|f^*\|_1$ para isso observemos que como Δ tem imagem em $\mathbb{R}^+$ e $|\bar{f}| = |f|$ então,

$$\begin{aligned} \|f^*\|_1 &= \int_G |\Delta(t^{-1}) \overline{f(t^{-1})}| dt = \int_G \Delta(t^{-1}) |f(t^{-1})| dt \\ &= \int_G \Delta(t^{-1}) |f(t^{-1})| dt = \int_G |f(t^{-1})| dt^{-1} = \|f\|_1. \end{aligned}$$

■

Um grupo G localmente compacto é dito unimodular quando $\Delta(t) = 1$ para todo $t \in G$, ou seja, quando as medidas de Haar invariantes à esquerda e à direita são idênticas. Podemos citar exemplos de grupos unimodulares como:

Exemplo 2.22 *Os grupos abelianos localmente compactos são unimodulares porque para todo $U \subset G$ e $t \in G$ temos $tU = Ut$, ou seja, dada uma medida μ de Haar invariante à esquerda em G teremos $\mu(Ut) = \mu(tU) = \mu(U)$ e assim será também invariante à direita.*

Exemplo 2.23 *Os grupos discretos são unimodulares já que, as funções de $K^+(G)$, neste caso, são da forma $\sum_{s \in G} \alpha_s \delta_s$ (onde δ_s é a medida de contagem, isto é, $\delta_s(t)$ vale 1 se $t = s$ e $\delta_s(t) = 0$ nos demais casos) para $\alpha_i \geq 0$ para todo $s \in G$. E assim ao integrarmos tais funções em relação a uma medida μ de Haar invariante à esquerda ou à direita teremos $\int_G \sum_{s \in G} \alpha_s \delta_s d\mu(t) = \sum_{s \in G} \alpha_s \int_G \delta_s d\mu(t) = \sum_{s \in G} \alpha_s$.*

Exemplo 2.24 Os grupos compactos são unimodulares pois, como Δ é um homomorfismo contínuo de G em $\mathbb{R}_\times$ então, $\Delta(G)$ é um subgrupo compacto de $\mathbb{R}_\times$, mas o único subgrupo de $\mathbb{R}_\times$ deste tipo é o subgrupo $\{1\}$, ou seja, $\Delta(s) = 1$ para todo $s \in G$.

Exemplo 2.25 Um exemplo de um grupo que não é unimodular, exige um pouco mais de trabalho, mas basta tomarmos o grupo G das matrizes na forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}$, que serão resumidamente representadas por (x, y) . Dessa forma, $(a, b)(x, y) = (ax, ay + b)$ e $(x, y)(a, b) = (xa, xb + y)$; para $a \in \mathbb{R}^*$ e b em $\mathbb{R}$. Considerando em G a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$ teremos G um grupo topológico localmente compacto. Observe que em G a integral dada por

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)/x^2 dx dy$$

é invariante à esquerda e a integral,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)/|x| dx dy$$

é invariante à direita. E assim ao definirmos a medida de Haar a partir de tais integrais teremos em G a função modular dada por $\Delta(x, y) = |x|$.

Outros exemplos desse mesmo tipo podem ser encontrados em 15.17 de [9].

Utilizando os resultados de Grupos Topológicos e os de Medida de Haar estamos prontos para mostrar que existe em $L_1(G)$ uma aproximação da unidade que está contida em $K(G)$, mas antes veremos um teorema essencial a demonstração desse resultado.

Teorema 2.26 Seja f em $L_1(G)$, G grupo topológico localmente compacto, e $\epsilon > 0$ então, para cada vizinhança U de e existe g em $K^+(G)$ de tal forma que $g(t^{-1}) = g(t)$ e $\int_G g(s) ds = 1$ com $\|f - f \times g\|_1 < \epsilon$ e $\|f - g \times f\|_1 < \epsilon$.

Demonstração: A função g com estas propriedades pode ser construída da seguinte forma. Dada uma vizinhança compacta U de e , existe pela primeira proposição deste capítulo uma vizinhança simétrica $V \subset U$ (neste caso queremos dizer $V \subsetneq U$). Consideraremos g a extensão contínua de uma função que vale 1 em V (como a função χ_V) e que vale 0 em $G \setminus U$ (fora de U) de tal forma que $\int_G g(s)ds = 1$.

Como podemos aproximar f por funções contínuas de suporte compacto, vamos assumir que $f \in K(G)$ e assim, por (2.10) dado $\epsilon > 0$ existe U_ϵ uma vizinhança de e tal que, para todo $s \in U_\epsilon$ temos $\|f - \lambda_s f\|_{sup} < \epsilon$. E utilizando-se o fato $\int_G g(s)ds = 1$ temos,

$$\begin{aligned} \|f - g \times f\|_1 &= \int_G |f(t) - g \times f(t)|dt = \int_G |f(t) - \int_G g(s)f(s^{-1}t)ds|dt \\ &= \int_G \left| \int_G g(s)ds f(t) - \int_G g(s)f(s^{-1}t)ds \right|dt \\ &\leq \int_G \int_G |g(s)f(t) - g(s)f(s^{-1}t)|dsdt \\ &= \int_G \int_G |g(s)| |f(t) - f(s^{-1}t)|dt ds \\ &= \int_G |g(s)| \|f - \lambda_s f\|_{sup} ds \end{aligned}$$

E como $\|f - \lambda_s f\|_{sup} < \epsilon$ e $\int_G g(s)ds = 1$ temos

$$\|f - g \times f\|_1 < \epsilon$$

Analogamente desenvolve-se o caso $\|f - f \times g\|_1 < \epsilon$.

■

Existem algumas variações do teorema anterior, para casos mais gerais ou mesmo mais específicos, caso o leitor se interesse sugerimos duas: 2.42 de [8] e também 56.3 de [6]. O teorema anterior nos fornece como um corolário direto a existência de uma aproximação da unidade em $L_1(G)$.

Corolário 2.27 *Seja G um grupo topológico localmente compacto então, existe uma aproximação da unidade $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset K(G)$ de $L_1(G)$.*

Demonstração: A família de vizinhanças da unidade e formam um conjunto dirigido quando a relação de ordem é dada pela inclusão. Seja U_λ este conjunto dirigido e sejam g_λ funções obtidas como em (2.26), então a rede $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma aproximação da unidade em $L_1(G)$. ■

Definição 2.28 *Seja G um grupo topológico localmente compacto, uma representação unitária de G é um homomorfismo u de G em $U(H) \subset B(H)$, conjunto dos operadores unitários de um espaço de Hilbert não nulo, que é contínuo, em relação a topologia forte dos operadores.*

Observe que a representação unitária $u : G \rightarrow U(H)$ por ser homomorfismo satisfaz $u(st) = u(s)u(t)$ e por ter imagem em $U(H)$ verifica $u(s)^{-1} = u(s)^*$, para todo s e t em G e também $s \mapsto u(s)\xi$ é contínuo para todo $\xi \in H$ pela continuidade forte de operadores.

Vamos agora mostrar um importante teorema que nos será útil no próximo capítulo. Esse resultado nos permite identificar todas as representações não degeneradas de $L_1(G)$, onde G é localmente compacto, com as representações unitárias do próprio G , mas enunciaremos e demonstraremos apenas o caso em que G é abeliano, o que já serve a nossos propósitos.

Toda representação unitária u de G em $U(H)$ determina uma representação de $L_1(G)$, que designaremos por (π, H) . Seja $f \in L_1(G)$ definimos o operador $\pi(f)$, sobre H espaço de Hilbert, como sendo

$$\pi(f) = \int_G f(s)u(s)ds.$$

Observação 2.29 *Note que esta é uma integral de uma função a valores em $B(H)$. Pelo que está feito no apêndice vemos que é possível pensar nessa integral para cada $\xi \in H$ e assim definimos $\pi(f)\xi$, isto é, pensamos na integral fracamente e mais especificamente definimos*

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int_G f(s)\langle u(s)\xi, \eta \rangle ds \quad \forall \xi, \eta \in H$$

e assim claramente a integral em questão é uma integral em $L_1(G)$.

Como o produto interno é limitado e contínuo podemos aplicar o teorema (A.5) para vermos que $\|\pi(f)\xi\| \leq \int_G |f(s)| \|u(s)\xi\| ds \leq \|\xi\| \int_G |f(s)| ds$ e portanto temos $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$.

Demonstraremos o que foi dito, antes dessa observação, através dos dois próximos teoremas.

Teorema 2.30 *Seja (u, H) uma representação unitária de G , onde G é um grupo abeliano localmente compacto, então a representação $f \mapsto \pi(f)$ dada por,*

$$\pi(f) = \int_G f(t)u(t) dt$$

para todo $f \in L_1(G, \mu)$, é não degenerada.

Demonstração: É imediato que a aplicação $f \mapsto \pi(f)$ é linear.

Tomando-se f e g em $L_1(G)$ e utilizando-se algumas propriedades de integração para funções a valores vetoriais como (A.6), temos

$$\begin{aligned} \pi(f \times g) &= \int_G (f \times g)(t)u(t)dt = \int_G \int_G f(s)g(s^{-1}t)u(t)dsdt \\ &= \int_G \int_G f(s)g(s^{-1}t)u(s)u(s^{-1}t)dtds = \pi(f)\pi(g) \end{aligned}$$

e

$$\pi(f^*) = \int_G \overline{f(t^{-1})}u(t)dt = \int_G \overline{f(t)}u(t^{-1})dt = \int_G [u(t)f(t)]^*dt = \pi(f)^*$$

Com isso vemos que π é um $*$ -homomorfismo, basta então provarmos que π é não degenerada, mas pela continuidade de u podemos tomar $\xi \in H$, não nulo, e uma vizinhança compacta V de e , em G , tal que $\|u(t)\xi - \xi\| < \|\xi\|$, para todo $t \in V$.

Seja $f = \mu(V)^{-1}\chi_V$, então

$$\begin{aligned}\|\pi(f)\xi - \xi\| &= \left\| \int_G \frac{1}{\mu(V)} \chi_V(t) u(t) \xi - \xi dt \right\| \\ &= \frac{1}{\mu(V)} \left\| \int_V u(t) \xi - \xi dt \right\| < \|\xi\|\end{aligned}$$

donde concluimos que $\pi(f)\xi \neq 0$.

■

Notação: Denotaremos por $\text{span}\{S\}$ ao conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de S .

Teorema 2.31 *Suponha que π é uma representação não degenerada de $L_1(G)$ em H , espaço de Hilbert, então π provém de uma única representação unitária u de G em H que satisfaz*

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int_G f(s) \langle u(s)\xi, \eta \rangle ds, \quad \forall \xi, \eta \in H.$$

Demonstração: Seja $\{\phi_\lambda\}$ uma aproximação da unidade de $L_1(G)$ como em (2.27), se $f \in L_1(G)$ então, $\phi_\lambda \times f \rightarrow f$. Assim sendo, $(\lambda_s \phi_\lambda) \times f = \lambda_s(\phi_\lambda \times f) \rightarrow \lambda_s f$ para todo $s \in G$, ou seja, $\pi(\lambda_s \phi_\lambda) \pi(f)\xi \rightarrow \pi(\lambda_s f)\xi$ para todo $\xi \in H$.

Seja $B = \text{span}\{\pi(f)\xi : f \in L_1(G), \xi \in H\}$, então B é um subespaço denso de H pois, supondo que exista $\eta \perp B$ então, $0 = \langle \eta, \pi(f)\xi \rangle = \langle \pi(f^*)\eta, \xi \rangle$, para todo $f \in L_1(G)$ e $\xi \in H$, e como π é não degenerada temos $\eta = 0$. Com o que foi visto acima podemos dizer que o operador $\pi(\lambda_s \phi_\lambda)$ converge fortemente, em B , para um operador $\Pi(s) : B \rightarrow B$ tal que $\Pi(s)\pi(f)\xi = \pi(\lambda_s f)\xi$ para todo $\xi \in H$.

O operador Π está bem definido já que,

$$\sum_{i=1}^n \pi(f_i)\xi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \pi(\lambda_s f_i)\xi_i = \lim_{\lambda} \sum_{i=1}^n \pi(\lambda_s \phi_\lambda) \pi(f_i)\xi_i = 0.$$

E ainda, os operadores $\pi(\lambda_s \phi_\lambda)$ satisfazem $\|\pi(\lambda_s \phi_\lambda)\| \leq \|\lambda_s \phi_\lambda\|_1 \leq 1$. Assim Π estende-se unicamente para H de modo que $\|\Pi(s)\| \leq 1$ e $\Pi(s)\pi(f) = \pi(\lambda_s f)$.

Vamos agora verificar que Π é uma representação unitária de G . Vemos que $\Pi(st)\pi(f) = \pi(\lambda_{st}f) = \pi(\lambda_s\lambda_tf) = \Pi(s)\Pi(t)\pi(f)$, ou seja, $\Pi(st) = \Pi(s)\Pi(t)$ para todo s e t em G , em B e conseqüentemente em H . Obviamente, vê-se que $\Pi(e) = Id_H$ então, Π é um $*$ -homomorfismo de G no grupo dos operadores inversíveis de H com $\|\eta\| = \|\Pi(s^{-1})\Pi(s)\eta\| \leq \|\Pi(s)\eta\| \leq \|\eta\|$, ou seja, $\|\Pi(s)\| = 1$, para todo $s \in G$.

Seja $s_\gamma \rightarrow s$ em G , então $\lambda_{s_\gamma}f \rightarrow \lambda_sf$ em $L_1(G)$ e para todo f , para verificarmos este fato basta lembrarmos que para todo $f \in L_1(G)$ e $\epsilon > 0$ existe $g_\epsilon \in K(G)$ tal que $\|f - g_\epsilon\|_1 < \epsilon/3$, logo

$$\|\lambda_{s_\gamma}f - \lambda_sf\|_1 \leq \|\lambda_{s_\gamma}f - \lambda_{s_\gamma}g_\epsilon\|_1 + \|\lambda_{s_\gamma}g_\epsilon - \lambda_sg_\epsilon\|_1 + \|\lambda_sg_\epsilon - \lambda_sf\|_1,$$

e por (2.10) temos $\|\lambda_{s_\gamma}g_\epsilon - \lambda_sg_\epsilon\|_1 \leq \epsilon/3$, ou seja, $\|\lambda_{s_\gamma}f - \lambda_sf\|_1 \leq \epsilon$.

Com isto $\Pi(s_\gamma)\pi(f) = \pi(\lambda_{s_\gamma}f) \rightarrow \pi(\lambda_sf) = \Pi(s)\pi(f)$. Em outras palavras $\Pi(s_\gamma) \rightarrow \Pi(s)$ fortemente em B , para mostrar que $\Pi(s_\gamma) \rightarrow \Pi(s)$ em H então basta observarmos que para todo $\epsilon > 0$ e $\xi \in H$ existe $\eta \in B$ tal que $\|\xi - \eta\| \leq \epsilon/3$ e assim

$$\|\Pi(s_\gamma)\xi - \Pi(s)\xi\| \leq \|\Pi(s_\gamma)\xi - \Pi(s_\gamma)\eta\| + \|\Pi(s_\gamma)\eta - \Pi(s)\eta\| + \|\Pi(s)\eta - \Pi(s)\xi\|,$$

como $\|\Pi(s_\gamma)\| = 1$ sempre e como Π é contínua em B então,

$$\|\Pi(s_\gamma)\xi - \Pi(s)\xi\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

E com isto, fica demonstrado que Π é uma representação unitária de G .

Basta agora verificar que $\pi(f) = \int_G f(s)\Pi(s)$, para $f \in L_1(G)$ como no enunciado, mas para isto basta observar que

$$\begin{aligned} \pi(f)\pi(g) &= \pi(f \times g) = \int_G f(s)\pi(\lambda_sg)ds \\ &= \int_G f(s)\Pi(s)\pi(g)ds = \int_G f(s)\Pi(s)ds \pi(g). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Π é única pois, supondo que exista outra representação Φ associada a π , então temos por (2.29) que $\langle \Pi(s)\eta, \xi \rangle = \langle \Phi(s)\eta, \xi \rangle$ para todo $s \in G$ e η e ξ em H , o que nos daria $\Pi(s) = \Phi(s)$ para todo $s \in G$.

■

Seja G um grupo localmente compacto e abeliano, sabemos por 3.6 de [8] que todas as representações irredutíveis de G são de dimensão um, isto é, podemos pensar no espaço de Hilbert H , dessas representações, como sendo $\mathbb{C}$. E dessa forma podemos definir, o seguinte.

Definição 2.32 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Chamamos de caracter de G o $*$ -homomorfismo de G no grupo do círculo unitário $\mathbb{T}$. O conjunto de todos os caracteres de G é denotado por $\widehat{G}$ e chamado de espectro de G .*

Cabe observar que esta definição nos remete a uma analogia da definição de caracter feita para C^* -álgebras comutativas. Definimos também o caracter de $L_1(G)$ como o $*$ -homomorfismo não nulos de $L_1(G)$ em $\mathbb{C}$ e chamamos ao conjunto de todos os caracteres de $L_1(G)$ de *espectro de $L_1(G)$* .

Teorema 2.33 *O conjunto dos caracteres de G , $\widehat{G}$, pode ser identificado com o espectro de $L_1(G)$ através de*

$$\pi(f) = \int_G \phi(s) f(s) ds$$

com $\phi \in \widehat{G}$, $f \in L_1(G)$, $s \in G$ e π no espectro de $L_1(G)$.

A demonstração desse teorema pode ser vista em 4.2 de [8].

Capítulo 3

Produtos Cruzados

O objetivo principal deste capítulo é o de introduzir o conceito de Produto Cruzado e de Produto Cruzado Reduzido, que são C^* -álgebras construídas a partir de uma C^* -álgebra A , um grupo topológico localmente compacto G e um homomorfismo contínuo α de G no grupo dos $*$ -automorfismos de A . Essas C^* -álgebras são denotadas, respectivamente, por $G \rtimes_{\alpha} A$ e $G \rtimes_{\alpha^r} A$.

Faremos neste capítulo o caso geral da construção de um Produto Cruzado, mas uma construção um pouco mais simples, onde a C^* -álgebra A tem unidade e o grupo G é discreto, o que automaticamente torna a ação α contínua, pode ser encontrada no capítulo 2 de [11].

3.1 Produto Cruzado

Definição 3.1 . *Seja A uma C^* -álgebra, G um grupo topológico localmente compacto e α um homomorfismo contínuo de G no grupo dos automorfismos de A , equipado com a topologia da convergência pontual, isto é, para cada a em A a aplicação $\alpha(a) : G \rightarrow A$, dada por $g \mapsto \alpha_g(a)$, é contínua. A tripla $\{A, G, \alpha\}$ é chamada de C^* -sistema dinâmico (ou apenas sistema dinâmico).*

Definição 3.2 *Definimos $K(G, A)$ como o espaço vetorial das funções de G em A contínuas e de suporte compacto.*

A definição anterior generaliza a que foi dada no capítulo anterior para $K(G)$, assim como, o próximo teorema servirá para generalizarmos o que foi feito em (2.21).

Proposição 3.3 . *Dado $\{A, G, \alpha\}$ um C^* -sistema dinâmico podemos definir em $K(G, A)$ uma involução e uma convolução dadas por:*

$$y^*(t) = \Delta(t^{-1})\alpha_t(y(t^{-1})^*)$$

$$(y \times z)(t) = \int_G y(s)\alpha_s(z(s^{-1}t))ds$$

$\forall y, z \in K(G, A)$ e ds é uma simplificação de $d\mu(s)$ onde μ é a medida de Haar¹ sobre G . Com estas operações $K(G, A)$ se torna uma $*$ -álgebra.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que as operações estão bem definidas, isto é, para todo y, z em $K(G, A)$ teremos também y^* e $y \times z$ em $K(G, A)$.

Seja $y \in K(G, A)$, dado $t \in G$ a aplicação $t \mapsto \alpha_t(y(t^{-1})^*)$ é contínua pois $t \mapsto t^{-1}$ é contínua por estarmos num grupo topológico (2.1), $t^{-1} \mapsto y(t^{-1})$ é contínua pois $y \in K(G, A)$, $y(t^{-1}) \mapsto y(t^{-1})^*$ é contínua porque a involução é contínua. E finalmente $t \mapsto \alpha_t(y(t))$ é contínua já que dado $\epsilon > 0$, $a \in A$ fixo e $t_0 \in G$ existem vizinhanças V_{t_0} e W_{t_0} , onde

$$\forall t \in V_{t_0} \Rightarrow \|y(t) - y(t_0)\| < \epsilon/2 \quad e \quad \forall t \in W_{t_0} \Rightarrow \|\alpha_{t_0}(a) - \alpha_t(a)\| < \epsilon/2$$

e assim, tomando-se $a = y(t_0)$, para todo t_0 em G , existe uma vizinhança U_{t_0} contida em $V_{t_0} \cap W_{t_0}$, onde $\forall t \in U_{t_0}$ vale

$$\begin{aligned} \|\alpha_t(y(t)) - \alpha_{t_0}(y(t_0))\| &\leq \|\alpha_t(y(t)) - \alpha_t(y(t_0))\| + \|\alpha_t(y(t_0)) - \alpha_{t_0}(y(t_0))\| \\ &\leq \|y(t) - y(t_0)\| + \|\alpha_t(y(t_0)) - \alpha_{t_0}(y(t_0))\| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Como a função modular Δ também é um homomorfismo contínuo, (2.19), então a aplicação $t \mapsto y^*(t) = \Delta(t^{-1})\alpha_t(y(t^{-1}))$ é contínua.

Seja $\text{supp } y = C$, compacto, então C^{-1} também é compacto pois, como função contínua leva compacto em compacto, e como as composições para obtermos y^* são todas contínuas então, y^* tem suporte compacto. Portanto $y^* \in K(G, A)$.

¹Utilizamos a expressão a medida de Haar ao invés de uma medida de Haar pois como vimos em (2.16) esta medida existe e é única a menos de multiplicação por constante.

Sejam y e $z \in K(G, A)$, então a aplicação $(s, t) \mapsto y(s)\alpha_s(z(s^{-1}t))$ é contínua. De fato da continuidade de $(s, t) \rightarrow s^{-1}t$, por (2.1), e por um argumento análogo ao feito anteriormente, dado $\epsilon > 0$, t_0 e $s_0 \in G$ então existem vizinhanças V_{t_0} e V_{s_0} tais que

$$\begin{aligned} & \|\alpha_{s_0}(z(s_0^{-1}t_0)) - \alpha_s(z(s^{-1}t))\| \\ & \leq \|\alpha_{s_0}(z(s_0^{-1}t_0)) - \alpha_{s_0}(z(s^{-1}t))\| + \|\alpha_{s_0}(z(s^{-1}t)) - \alpha_s(z(s^{-1}t))\| \\ & \leq \|z(s_0^{-1}t_0) - z(s^{-1}t)\| + \|\alpha_{s_0}(z(s^{-1}t)) - \alpha_s(z(s^{-1}t))\| \\ & < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

isto é, $(s, t) \mapsto \alpha_s(z(s^{-1}t))$ é contínua e limitada.

Como $y \in K(G, A)$ então teremos também $(s, t) \mapsto y(s)\alpha_s(z(s^{-1}t))$ contínua e limitada. E assim pelo teorema (A.5) sabemos que $t \mapsto \int_G y(s)\alpha_s(z(s^{-1}t))ds$ existe é contínua e tem imagem em A .

Além disso, y e z tem suporte compacto e como pode ser visto acima a aplicação $t \mapsto \int_G \alpha_s(z(s^{-1}t))ds$ é contínua, ou seja, leva compacto em compacto e assim leva o compacto $\text{supp } y \cap \text{supp } z$ em C suporte da convolução $y \times z$ que é compacto.

Até este momento temos y^* (involução) e $y \times z$ (convolução) bem definidos resta mostrar que de fato tornam $K(G, A)$ uma $*$ -álgebra. A demonstração de que $K(G, A)$ é um espaço vetorial será omitida porque é uma verificação simples, e por isso nos preocuparemos apenas com as seguintes propriedades um pouco mais trabalhosas.

Dados x, y e z em $K(G, A)$, t e p em G e utilizando-se algumas das propriedades dos dois capítulos anteriores e do apêndice como a continuidade e algumas propriedades do homomorfismo Δ (2.19) e (2.20), a continuidade de α , a comutatividade da integral com operadores lineares contínuos (A.2) e também Fubini (A.6), temos:

Associativa:

$$\begin{aligned}
((x \times y) \times z)(t) &= \int_G (x \times y)(s) \alpha_s(z(s^{-1}t)) ds \\
&= \int_G \left(\int_G x(p) \alpha_p(y(p^{-1}s)) dp \right) \alpha_s(z(s^{-1}t)) ds \\
&= \int_G \int_G x(p) \alpha_p \left((y(p^{-1}s) \alpha_{p^{-1}s}(z(s^{-1}t))) \right) dp ds \\
&= \int_G \int_G x(p) \alpha_p \left((y(p^{-1}s) \alpha_{p^{-1}s}(z(s^{-1}t))) \right) ds dp \\
&= \int_G x(p) \alpha_p \left(\int_G y(p^{-1}s) \alpha_{p^{-1}s}(z(s^{-1}t)) ds \right) dp \\
&= \int_G x(p) \alpha_p((y \times z)(p^{-1}t)) dp \\
&= (x \times (y \times z))(t).
\end{aligned}$$

Involução da involução:

$$\begin{aligned}
(y^*)^*(t) &= \Delta(t^{-1}) \alpha_t(y^*(t^{-1})^*) \\
&= \Delta(t^{-1}) \alpha_t \left(\Delta(t^{-1})^{-1} \alpha_{t^{-1}}(y(t)^*)^* \right) \\
&= \Delta(t^{-1}) \alpha_t \left(\Delta(t) \alpha_{t^{-1}}(y(t)) \right) \\
&= \Delta(t^{-1}) \Delta(t) \alpha_t \left(\alpha_{t^{-1}}(y(t)) \right) \\
&= y(t).
\end{aligned}$$

Involução da soma:

$$\begin{aligned}
(x + y)^*(t) &= \Delta(t^{-1}) \alpha_t \left([(x + y)(t^{-1})]^* \right) \\
&= \Delta(t^{-1}) \alpha_t (x(t^{-1})^* + y(t^{-1})^*) \\
&= \Delta(t^{-1}) \alpha_t (x(t^{-1})^*) + \Delta(t^{-1}) \alpha_t (y(t^{-1})^*) \\
&= x^*(t) + y^*(t).
\end{aligned}$$

Involução do produto por escalar:

$$\begin{aligned}
 (\lambda x)^*(t) &= \Delta(t^{-1})\alpha_t([(\lambda x)(t^{-1})]^*) \\
 &= \Delta(t^{-1})\alpha_t(\overline{\lambda}x(t^{-1})^*) \\
 &= \overline{\lambda}\Delta(t^{-1})\alpha_t(x(t^{-1})^*) \\
 &= \overline{\lambda}x^*(t).
 \end{aligned}$$

Involução do produto (convolução):

$$\begin{aligned}
 (x \times y)^*(t) &= \Delta(t^{-1})\alpha_t([(x \times y)(t^{-1})]^*) \\
 &= \Delta(t^{-1})\alpha_t\left(\left(\int_G x(s)\alpha_s(y(s^{-1}t^{-1}))ds\right)^*\right) \\
 &= \Delta(t^{-1})\alpha_t\left(\int_G \left(\alpha_s(y(s^{-1}t^{-1}))\right)^* x(s)^* ds\right) \\
 &= \Delta(t^{-1})\alpha_t\left(\int_G \alpha_{t^{-1}k}(y(k^{-1})^*)x(t^{-1}k)^* dk\right) \\
 &= \int_G \Delta(t^{-1}k)\Delta(k^{-1})\alpha_k(y(k^{-1})^*)\alpha_t(x(t^{-1}k)^*)dk \\
 &= \int_G \Delta(k^{-1})\alpha_k(y(k^{-1})^*)\Delta(k^{-1}t)^{-1}\alpha_t(x(t^{-1}k)^*)dk \\
 &= \int_G \Delta(k^{-1})\alpha_k(y(k^{-1})^*)\alpha_k\left(\Delta(k^{-1}t)^{-1}\alpha_{k^{-1}t}(x(t^{-1}k)^*)\right)dk \\
 &= \int_G y^*(k)\alpha_k(x^*(k^{-1}t))dk \\
 &= (y^* \times x^*)(t).
 \end{aligned}$$

E portanto $K(G, A)$ com as operações assim definidas é uma $*$ -álgebra. ■

Podemos também definir uma norma sobre $K(G, A)$ de tal forma que este se torne uma $*$ -álgebra normada. Esta norma será dada da seguinte forma, para todo y em $K(G, A)$

$$\|y\|_1 = \int_G \|y(t)\| dt.$$

Proposição 3.4 *O espaço $K(G, A)$ munido da norma $\|\cdot\|_1$, acima definida, é uma $*$ -álgebra normada e, além disso, a involução é isométrica.*

Demonstração: Dados $x, y \in K(G, A)$, utilizando-se o teorema A.4 e também 1.16 teremos:

$$\begin{aligned}
\|x \times y\|_1 &= \int_G \|(x \times y)(t)\| dt \\
&= \int_G \left\| \int_G x(s) \alpha_s(y(s^{-1}t)) ds \right\| dt \\
&\leq \int_G \int_G \|x(s) \alpha_s(y(s^{-1}t))\| ds dt \\
&= \int_G \|x(s)\| \int_G \|\alpha_s(y(s^{-1}t))\| dt ds \\
&\leq \int_G \|x(s)\| \int_G \|y(s^{-1}t)\| dt ds \\
&= \int_G \|x(s)\| \|y\|_1 ds \\
&= \|x\|_1 \|y\|_1.
\end{aligned}$$

E por (2.20)

$$\begin{aligned}
\|y^*\|_1 &= \int_G \|y^*(t)\| dt \\
&= \int_G \|\Delta(t^{-1}) \alpha_t(y(t^{-1})^*)\| dt \\
&\leq \int_G |\Delta(t^{-1})| \|y(t^{-1})\| dt \\
&= \int_G \Delta(t^{-1}) \|y(t^{-1})\| dt \\
&= \int_G \|y(t^{-1})\| dt^{-1} \\
&= \|y\|_1
\end{aligned}$$

e como $(y^*)^* = y$, então $\|y\|_1 = \|y^*\|_1$.

■

Definição 3.5 Denotaremos por $L_1(G, A)$ ao completamento de $K(G, A)$ pela $\|\cdot\|_1$, que se torna assim uma $*$ -álgebra de Banach, isto é, $\overline{K(G, A)}^{\|\cdot\|_1} = L_1(G, A)$ é uma $*$ -álgebra de Banach.

Definição 3.6 Seja $x \in A$ e $f \in L_1(G)$ denotaremos $x \otimes f \in L_1(G, A)$ os elementos dados por $x \otimes f(t) = x f(t)$.

Proposição 3.7 *O $\text{span}\{x \otimes f : \forall x \in A, \forall f \in K(G)\}$ é denso em $L_1(G, A)$.*

Demonstração: Para que isto seja verdade basta demonstrarmos que

$$K(G, A) \subset \overline{\text{span}}\{x \otimes f : \forall x \in A, \forall f \in K(G)\},$$

já que $\overline{K(G, A)} = L_1(G, A)$, onde os fechos são tomados na norma $\|\cdot\|_1$.

Dados $\epsilon > 0$ e $y \in K(G, A)$ com suporte compacto C , podemos tomar a cobertura

$$V_{n,t} = \{s \in G : \|y(t) - y(s)\| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}\mu(C)}\}$$

onde n e t variam, respectivamente, em $\mathbb{N}$ e G .

Como C é compacto sabemos que existe uma subcobertura finita para C , isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset \bigcup_{i=1}^m V_{n_i, t_i}$, para simplificar um pouco a notação escreveremos V_i ao invés de V_{n_i, t_i} .

Com isto podemos construir z em $\text{span}\{x \otimes f : \forall x \in A, \forall f \in K(G)\}$ onde $z = \sum_{i=1}^m x_i \otimes f_i$, com $x_i = y(t_i)$ para algum $t_i \in V_i$. e f_i é a extensão contínua (obtida através do Teorema de extensão de Tietze) de uma função que vale 1 em V_i (podemos pensar em V_i compacto) e que vale 0 em $G \setminus \tilde{V}_i$, onde $\tilde{V}_i$ é tomado com sendo compacto com $V_i \subset \tilde{V}_i$ e $\mu(\tilde{V}_i \setminus V_i) < \frac{\epsilon}{2M(m+1)^m}$,² onde $M = \sup_{t \in G} \|y(t)\|$.

Cabe observar que

$$\|z(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^m x_i f_i(t) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|x_i\| |f_i(t)| \leq \sum_{i=1}^m \|x_i\| \leq mM.$$

Desse modo temos

$$\begin{aligned} \|y - z\|_1 &= \int_G \|y(t) - z(t)\|_1 dt = \int_{\bigcup_{i=1}^m \tilde{V}_i} \|y(t) - z(t)\| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{\tilde{V}_i \setminus V_i} \|y(t) - z(t)\| dt + \sum_{i=1}^m \int_{V_i} \|y(t) - z(t)\| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{\tilde{V}_i \setminus V_i} \|y(t)\| + \|z(t)\| dt + \sum_{i=1}^m \int_{V_i} \|y(t) - y(t_i)\| dt \end{aligned}$$

²A notação $\tilde{V}_i \setminus V_i$ é utilizada para o caso $\tilde{V}_i \cap V_i^c$, ou seja, é o conjunto dos elementos que estão em $\tilde{V}_i$ e não estão em V_i .

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^m \int_{\tilde{V}_i \setminus V_i} M + Mn \, dt + \sum_{i=1}^m \int_{V_i} \frac{\epsilon}{2^{i+1} \mu(C)} dt \\
&= \sum_{i=1}^m M(m+1) \mu(\tilde{V}_i \setminus V_i) + \sum_{i=1}^m \frac{\epsilon}{2^{i+1} \mu(C)} \mu(V_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^m \frac{\epsilon}{2^m} + \sum_{i=1}^m \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \epsilon
\end{aligned}$$

■

Além disso, podemos construir uma aproximação da unidade em $L_1(G, A)$ utilizando-se uma aproximação da unidade $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de A , (1.26), e também uma aproximação da unidade $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de $L_1(G)$ contida em $K(G)$, (2.27), como vemos a seguir

Lema 3.8 *Sejam $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ e $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ como acima então, a rede $(x_\lambda \otimes f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma aproximação da unidade de $L_1(G, A)$.*

Demonstração: Seja $y_\lambda = x_\lambda \otimes f_\lambda$ então

$$\|y_\lambda\|_1 = \|x_\lambda \otimes f_\lambda\|_1 = \int_G \|x_\lambda f_\lambda(t)\| dt \leq \|x_\lambda\| \int_G \|f_\lambda(t)\| dt \leq 1.$$

E dessa forma dado $\epsilon > 0$ e $a \in L_1(G, A)$ de (3.7) temos a existência de $z_n = \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i$ tal que $\|a - z_n\|_1 < \epsilon/3$, logo

$$\begin{aligned}
\|a \times y_\lambda - a\|_1 &\leq \|a \times y_\lambda - z_n \times y_\lambda\|_1 + \|z_n \times y_\lambda - z_n\|_1 + \|z_n - a\| \\
&\leq \|a - z_n\| \|y_\lambda\| + \|z_n \times y_\lambda - z_n\|_1 + \|z_n - a\| \\
&< \|z_n \times y_\lambda - z_n\|_1 + \frac{2\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\|z_n \times y_\lambda - z_n\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i \times x_\lambda \otimes f_\lambda - \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i \otimes f_i \times x_\lambda \otimes f_\lambda - x_i \otimes f_i\|$$

e dessa forma basta mostrarmos que

$$\|x_i \otimes f_i \times x_\lambda \otimes f_\lambda - x_i \otimes f_i\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} \|x_i \otimes f_i \times x_\lambda \otimes f_\lambda - x_i \otimes f_i\| &= \int_G \left\| \int_G x_i f_i(s) \alpha_s(x_\lambda f_\lambda(s^{-1}t)) ds - x_i f_i(t) \right\| dt \\ &\leq \int_G \left\| \int_G x_i f_i(s) \alpha_s(x_\lambda f_\lambda(s^{-1}t)) - x_i f_i(s) \alpha_s(f_\lambda(s^{-1}t)) ds \right\| dt \\ &\quad + \int_G \left\| \int_G x_i f_i(s) \alpha_s(f_\lambda(s^{-1}t)) ds - x_i f_i(t) \right\| dt \\ &\leq \int_G \int_G \|f_i(s)\| \|f_\lambda(s^{-1}t)\| \|x_i \alpha_s(x_\lambda) - x_i\| dt ds + \int_G \|x_i\| \|(f_i \times f_\lambda - f_i)(t)\| dt \\ &\leq \int_G \int_G \|f_i(s)\| \|f_\lambda(t)\| \|\alpha_{s^{-1}}(x_i) x_\lambda - \alpha_{s^{-1}}(x_i)\| dt ds + \|x_i\| \|f_i \times f_\lambda - f_i\|_1 \end{aligned}$$

E como $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma aproximação da unidade de $L_1(G)$ então podemos assumir que

$$\|f_i \times f_\lambda - f_i\|_1 \leq \frac{\epsilon}{6\|x_i\|}.$$

Podemos também tomar uma cobertura V_j sobre o suporte compacto C destas funções de tal forma que dado um s_j de V_j tenhamos

$$\|\alpha_{s_j}(x_i) - \alpha_s(x_i)\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

e ainda para cada conjunto V_j em questão sabemos que existe um λ_j , de forma que para todo $\lambda \geq \lambda_j$ tenhamos

$$\|\alpha_{s_j}(x_i) x_\lambda - \alpha_{s_j}(x_i)\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

pois, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma aproximação da unidade de A .

Como C é compacto então, pode ser tomada uma subcobertura finita V_{j_k} de C de tal forma que $C = \bigcup_{k=1}^m V_{j_k}$, e assim tomando-se $\lambda_0 = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, teremos para $\lambda > \lambda_0$

$$\begin{aligned} \|\alpha_s(x_i) x_\lambda - \alpha_s(x_i)\| &\leq \|\alpha_s(x_i) x_\lambda - \alpha_{s_j}(x_i) x_\lambda\| \\ &\quad + \|\alpha_{s_j}(x_i) x_\lambda - \alpha_{s_j}(x_i)\| + \|\alpha_{s_j}(x_i) - \alpha_s(x_i)\| \leq \epsilon \end{aligned}$$

E assim podemos assumir que

$$\|\alpha_{s^{-1}}(x_i)x_\lambda - \alpha_{s^{-1}}(x_i)\| \leq \frac{\epsilon}{6\|f_i\|_1}$$

o que nos dá

$$\|x_i \otimes f_i \times x_\lambda \otimes f_\lambda - x_i \otimes f_i\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

como queríamos.

Demonstra-se analogamente o caso $\|y_\lambda \times a - a\|_1 < \epsilon$.

■

Definiremos agora dois operadores que serão centralizadores à direita, à esquerda e o par um duplo centralizador da $*$ -álgebra de Banach $L_1(G, A)$, mas para isto teremos que utilizar um artifício muito comum que é o de definir estes operadores em $K(G, A)$ e depois estendê-los continuamente a $L_1(G, A)$.

Definição 3.9 Para todo x em $M(A)$ e μ em $\mathcal{M}(G)$ com suporte compacto definiremos as aplicações lineares $L(x, \mu)$ e $R(x, \mu)$ sobre $K(G, A)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (L(x, \mu)y)(t) &= x \int_G \alpha_s(y(s^{-1}t)) d\mu(s) \\ (R(x, \mu)y)(t) &= \int_G y(ts^{-1}) \alpha_{ts^{-1}}(x) \Delta(s)^{-1} d\mu(s) \end{aligned}$$

para todo y em $K(G, A)$ e t em G .

Na definição anterior a integral $(R(x, \mu)y)(t)$ pode parecer não fazer muito sentido, já que α é um automorfismo de A e x pode não estar em A . Mas quando escrevemos esta igualdade podemos pensar nela como $\int_G \alpha_{ts^{-1}}(\alpha_{st^{-1}}(y(ts^{-1}))x) \Delta(s)^{-1} d\mu(s)$.

Proposição 3.10 Os operadores $L(x, \mu)$ e $R(x, \mu)$ são limitados em $K(G, A)$ por $\|x\| \|\mu\|$ (e portanto podem ser estendidos continuamente a $L_1(G, A)$) e de fato são centralizadores, respectivamente, à esquerda, à direita e o par é duplo centralizador de $L_1(G, A)$.

Demonstração: A linearidade desses operadores é imediata pois, decorre da linearidade de α e também da linearidade da integração. Seja $y \in K(G, A)$, como o suporte é compacto então existe k_y uma constante tal que:

$$\begin{aligned}
\|L(x, \mu)y\|_1 &= \int_G \left\| x \int_G \alpha_s(y(s^{-1}t)) d\mu(s) \right\| dt \\
&\leq \|x\| \int_G \int_G \|\alpha_s(y(s^{-1}t))\| d\mu(s) dt \\
&\leq \|x\| \int_G \int_G \|y(s^{-1}t)\| dt d\mu(s) \\
&= \|x\| \int_G \|y\|_1 d\mu(s) \\
&\leq k_y \|x\| \|y\|_1
\end{aligned}$$

e assim mostramos que o operador $L(x, \mu)$ é limitado.

Pelo teorema (2.13) podemos definir a norma de $\mu \in \mathcal{M}(G)$ como sendo

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| : \{E_i\}_1^n \right\},$$

onde $\{E_i\}_1^n$ é uma partição mensurável de G , vide C.3 e C.11 de [2]. Com isto $\mu(G) \leq \|\mu\|$, já que $\{E_i\}_1^1$ com $E_1 = G$ é uma partição mensurável de G . E assim temos,

$$\begin{aligned}
\|L(x, \mu)\| &= \sup_{\|y\|_1=1} \|L(x, \mu)y\|_1 \\
&= \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \left\| x \int_G \alpha_s(y(s^{-1}t)) d\mu(s) \right\| dt \\
&\leq \|x\| \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \int_G \|\alpha_s(y(s^{-1}t))\| d\mu(s) dt \\
&\leq \|x\| \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \int_G \|y(s^{-1}t)\| dt d\mu(s) \\
&= \|x\| \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \|y\|_1 d\mu(s) \\
&\leq \|x\| \|\mu\|
\end{aligned}$$

e de modo idêntico temos

$$\begin{aligned}
\|R(x, \mu)y\|_1 &= \int_G \left\| \int_G y(ts^{-1})\alpha_{ts^{-1}}(x)\Delta(s)^{-1}d\mu(s) \right\| dt \\
&= \int_G \left\| \int_G y(ts^{-1})\alpha_{ts^{-1}}(x)d\mu(s^{-1}) \right\| dt \\
&\leq \|x\| \int_G \int_G \|y(ts)\| dt d\mu(s) \\
&= \|x\| \int_G \|y\|_1 d\mu(s) \\
&= k_y \|x\| \|y\|_1
\end{aligned}$$

e novamente,

$$\begin{aligned}
\|R(x, \mu)\| &= \sup_{\|y\|_1=1} \|R(x, \mu)y\|_1 \\
&= \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \left\| \int_G y(ts^{-1})\alpha_{ts^{-1}}(x)\Delta(s)^{-1}d\mu(s) \right\| dt \\
&= \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \left\| \int_G y(ts^{-1})\alpha_{ts^{-1}}(x)d\mu(s^{-1}) \right\| dt \\
&\leq \|x\| \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \int_G \|y(ts)\| dt d\mu(s) \\
&= \|x\| \sup_{\|y\|_1=1} \int_G \|y\|_1 d\mu(s) \\
&\leq \|x\| \|\mu\|
\end{aligned}$$

e portanto $L(x, \mu)$ e $R(x, \mu)$ são limitados por $\|x\| \|\mu\|$, podendo assim serem estendidos a $L_1(G, A)$ continuamente.

Sejam y e z em $K(G, A)$ e t em G temos,

$$\begin{aligned}
L(x, \mu)(y \times z)(t) &= x \int_G \alpha_s(y \times z(s^{-1}t)) d\mu(s) \\
&= x \int_G \alpha_s \left(\int_G y(k) \alpha_k(z(k^{-1}s^{-1}t)) dk \right) d\mu(s) \\
&= x \int_G \int_G \alpha_s(y(k)) \alpha_{sk}(z(k^{-1}s^{-1}t)) dk d\mu(s) \\
&= x \int_G \int_G \alpha_s(y(s^{-1}r)) \alpha_r(z(r^{-1}t)) dr d\mu(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G x \left(\int_G \alpha_s(y(s^{-1}r)) d\mu(s) \right) \alpha_r(z(r^{-1}t)) dr \\
&= \int_G L(x, \mu) y(r) \alpha_r(z(r^{-1}t)) dr = \left((L(x, \mu)y) \times z \right)(t)
\end{aligned}$$

e assim $L(x, \mu)$ é um centralizador à esquerda pois,

$$L(x, \mu)(y \times z)(t) = \left((L(x, \mu)y) \times z \right)(t)$$

e também

$$\begin{aligned}
R(x, \mu)(y \times z)(t) &= \int_G (y \times z)(ts^{-1}) \alpha_{ts^{-1}}(x) \Delta(s)^{-1} d\mu(s) \\
&= \int_G \int_G y(r) \alpha_r(z(r^{-1}ts^{-1})) dr \alpha_{ts^{-1}}(x) \Delta(s)^{-1} d\mu(s) \\
&= \int_G \int_G y(r) \alpha_r(z(r^{-1}ts^{-1})) \alpha_{ts^{-1}}(x) \Delta(s)^{-1} d\mu(s) dr \\
&= \int_G y(r) \alpha_r \left(\int_G z(r^{-1}ts^{-1}) \alpha_{r^{-1}ts^{-1}}(x) \Delta(s)^{-1} d\mu(s) \right) dr \\
&= \int_G y(r) \alpha_r(R(x, \mu)(r^{-1}t)) dr = (y \times R(x, \mu)z)(t)
\end{aligned}$$

portanto $R(x, \mu)$ é um centralizador à direita já que,

$$R(x, \mu)(y \times z)(t) = (y \times R(x, \mu)z)(t)$$

e ainda

$$\begin{aligned}
(y \times L(x, \mu))(t) &= \int_g y(s) \alpha_s \left(L(x, \mu)z(s^{-1}t) \right) ds \\
&= \int_G \int_G y(s) \alpha_s(x) \alpha_{sr}(z(r^{-1}s^{-1}t)) d\mu(r) ds \\
&= \int_G \int_G y(kr^{-1}) \alpha_{kr^{-1}}(x) \alpha_k(z(k^{-1}t)) \Delta(r)^{-1} d\mu(r) dk \\
&= \int_G \left(\int_G y(kr^{-1}) \alpha_{kr^{-1}}(x) \Delta(r)^{-1} d\mu(r) \right) \alpha_k(z(k^{-1}t)) dk \\
&= \int_G R(x, \mu) y(k) \alpha_k(z(k^{-1}t)) dk = (R(x, \mu)y \times z)(t)
\end{aligned}$$

ou seja, o par $(L(x, \mu); R(x, \mu))$ é um duplo centralizador de $L_1(G, A)$.

■

Definição 3.11 *Sejam (π, H) uma representação de A e (u, H) uma representação unitária de G , sobre o mesmo espaço de Hilbert H . Chamamos a terna (π, u, H) de representação covariante do C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ se*

$$u_s \pi(a) u_s^* = \pi(\alpha_s(a)) \quad , \quad \forall s \in G \text{ e } \forall a \in A.$$

O teorema a seguir é muito importante pois, a partir dele definiremos o Produto Cruzado e através dele saberemos mais sobre as representações não degeneradas do Produto Cruzado, mesmo sem tê-lo construído, já que estas estarão relacionadas as representações covariantes do C^* -sistema dinâmico.

Teorema 3.12 *Se (π, u, H) é uma representação covariante de $\{A, G, \alpha\}$ então há uma representação não-degenerada $(\pi \times u, H)$ de $L_1(G, A)$ tal que*

$$(\pi \times u)(y) = \int_G \pi(y(t)) u_t dt \quad , \quad \forall y \in K(G, A)$$

e ainda, há uma correspondência biunívoca entre as representações covariantes (π, u, H) e as representações não-degeneradas $(\pi \times u, H)$.

Demonstração: Vejamos primeiro que $(\pi \times u, H)$ é de fato uma representação de $L_1(G, A)$. Para todo $y \in K(G, A)$ segue que

$$\begin{aligned} \|(\pi \times u)(y)\| &= \left\| \int_G \pi(y(t)) u_t dt \right\| \\ &\leq \int_G \|\pi(y(t)) u_t\| dt \\ &= \int_G \|\pi(y(t))\| \|u_t\| dt \\ &= \int_G \|\pi(y(t))\| dt \\ &\leq \int_G \|y(t)\| dt = \|y\|_1 \end{aligned}$$

vemos dessa forma que $(\pi \times u)(y)$ está em $B(H)$ e portanto podemos estendê-lo continuamente para $L_1(G, A)$, mostrando que $(\pi \times u)(y) \in B(H)$, para todo $y \in L_1(G, A)$.

Sejam $y, z \in K(G, A)$ então,

$$\begin{aligned}
(\pi \times u)(y^*) &= \int_G \pi(y^*(t)) u_t dt \\
&= \int_G \pi(\Delta(t^{-1}) \alpha_t(y(t^{-1})^*)) u_t dt \\
&= \int_G \Delta(t^{-1}) u_t \pi(y(t^{-1})^*) u_t^* u_t dt \\
&= \int_G \Delta(t^{-1}) u_t \pi(y(t^1))^* dt \\
&= \int_G u_t \pi(y(t^{-1}))^* d(t^{-1}) \\
&= \int_G u_{t^{-1}} \pi(y(t))^* dt \\
&= \int_G u_t^* \pi(y(t))^* dt \\
&= (\pi \times u)(y)^*
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
(\pi \times u)(y \times z) &= \int_G \pi\left(\int_G y(s) \alpha_s(z(s^{-1}t)) ds\right) u_t dt \\
&= \int_G \int_G \pi(y(s)) \pi(\alpha_s(z(s^{-1}t))) u_t ds dt \\
&= \int_G \int_G \pi(y(s)) u_s \pi(z(s^{-1}t)) u_s^* u_t ds dt \\
&= \int_G \int_G \pi(y(s)) u_s \pi(z(s^{-1}t)) u_{s^{-1}t} ds dt \\
&= \int_G \int_G \pi(y(s)) u_s \pi(z(r)) u_r ds dr \\
&= (\pi \times u)(y) (\pi \times u)(z)
\end{aligned}$$

E assim vemos que $(\pi \times u, H)$ é de fato uma representação de $L_1(G, A)$. O fato dessa representação ser não-degenerada sairá automaticamente quando for provada a biunicidade da correspondência entre as representações.

Reciprocamente, suponhamos que (ρ, H) é uma representação não-degenerada de $L_1(G, A)$ e seja $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma aproximação da unidade de $L_1(G, A)$ que está contida em $K(G, A)$, (2.27), portanto $(\rho(y_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ converge na topologia forte dos operadores para $I_{B(H)}$. Basta notar que para todo y em $L_1(G, A)$ temos,

$$\lim_{\lambda} \|\rho(y_\lambda \times y) - \rho(y)\| = \lim_{\lambda} \|\rho(y_\lambda \times y - y)\| \leq \lim_{\lambda} \|y_\lambda \times y - y\|_1 = 0.$$

Lembrando que no primeiro capítulo mostramos uma forma de se identificar A e $\tilde{A}$ a um subconjunto de $M(A)$ então, podemos tomar, ao invés de x em $M(A)$, x em A ou em $\tilde{A}$.

Para cada x em $\tilde{A}$, ou mesmo em A , t em G e $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aproximação da unidade de $L_1(G, A)$ definimos:

$$\pi(x) = \lim_{\lambda} \rho(L(x, \delta_e)y_\lambda) = \lim_{\lambda} \rho(R(x, \delta_e)y_\lambda)$$

$$u_t = \lim_{\lambda} \rho(L(1_{\tilde{A}}, \delta_t)y_\lambda) = \lim_{\lambda} \rho(R(1_{\tilde{A}}, \delta_t)y_\lambda)$$

onde os limites são tomados pontualmente na topologia fraca, isto é, para todo ξ em H temos

$$\pi(x)\xi = \lim_{\lambda} \rho(L(x, \delta_e)y_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(R(x, \delta_e)y_\lambda)\xi$$

$$u_t\xi = \lim_{\lambda} \rho(L(1_{\tilde{A}}, \delta_t)y_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(R(1_{\tilde{A}}, \delta_t)y_\lambda)\xi.$$

Observando que tais limites existem por (1.46), as igualdades acima são todas válidas pois, como ρ é contínua, $(L(x, \mu), R(x, \mu))$ é um duplo centralizador de $L_1(G, A)$, $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é aproximação da unidade nesse espaço então,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda} \rho(L(x, \mu)y_\lambda) &= \rho\left(\lim_{\lambda} L(x, \mu)y_\lambda\right) \\ &= \rho\left(\lim_{\iota} (y_\iota \times \lim_{\lambda} L(x, \mu)y_\lambda)\right) \\ &= \rho\left(\lim_{\iota} \lim_{\lambda} (y_\iota \times L(x, \mu)y_\lambda)\right) \\ &= \rho\left(\lim_{\lambda} \lim_{\iota} (R(x, \mu)y_\iota \times y_\lambda)\right) \\ &= \rho\left(\lim_{\lambda} \left(\lim_{\iota} R(x, \mu)y_\iota \times y_\lambda\right)\right) \\ &= \rho\left(\lim_{\iota} R(x, \mu)y_\iota\right) = \lim_{\iota} \rho(R(x, \mu)y_\iota) \end{aligned}$$

então para x qualquer e $\mu = \delta_e$ temos o primeiro caso e para $x = 1_{\tilde{A}}$ e $\mu = \delta_t$ temos o segundo (lembrando que δ_t é a medida dada em 2.23).

Basta mostrarmos então que (π, H) e (u, H) acima definidos são, respectivamente, representações de $\tilde{A}$ e G . Para isto vejamos que

$$L(xy, \delta_e) = L(x, \delta_e)L(y, \delta_e) \quad \forall x \text{ e } y \in M(A) \text{ e}$$

$$L(1, \delta_{st}) = L(1, \delta_s)L(1, \delta_t) \quad \forall s \text{ e } t \in G$$

pois, para todo z em $K(G, A)$ e todo t em G temos

$$\begin{aligned}
L(xy, \delta_e)(z)(t) &= xy \int_G \alpha_s(z(s^{-1})) d\delta_e(s) \\
&= xyz(t) = xL(y, \delta_e)(z)(t) \\
&= x \int_G \alpha_s(L(y, \delta_e)z(s^{-1}t)) d\delta_e(s) \\
&= L(x, \delta_e)L(y, \delta_e)(z)(t)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L(1, \delta_{st})(z)(r) &= \int_G \alpha_k(z(k^{-1}r)) d\delta_{st}(k) \\
&= \alpha_{st}(z(t^{-1}s^{-1}r)) \\
&= \alpha_s(\alpha_t(z(t^{-1}s^{-1}r))) \\
&= \alpha_s(L(1, \delta_t)(z(s^{-1}r))) \\
&= L(1, \delta_s)L(1, \delta_t)(z)(r)
\end{aligned}$$

sendo assim temos (π, H) uma representação de $\tilde{A}$ já que,

$$\begin{aligned}
\pi(z + y) &= \lim_{\lambda} \rho(L(z + y, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \lim_{\lambda} \rho(L(z, \delta_e)y_{\lambda} + L(y, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \lim_{\lambda} (\rho(L(z, \delta_e)y_{\lambda}) + \rho(L(y, \delta_e)y_{\lambda})) \\
&= \lim_{\lambda} \rho(L(z, \delta_e)y_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \rho(L(y, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \pi(z) + \pi(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(z y) &= \lim_{\lambda} \rho(L(z y, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \lim_{\lambda} \rho(L(z, \delta_e)L(y, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \lim_{\lambda} (\rho(L(z, \delta_e)y_{\lambda}) \rho(L(y, \delta_e)y_{\lambda})) \\
&= \lim_{\lambda} \rho(L(z, \delta_e)y_{\lambda}) \lim_{\lambda} \rho(L(y, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \pi(z) \pi(y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\pi(y^*) &= \lim_{\lambda} \rho(L(y^*, \delta_e)y_{\lambda}) \\
&= \lim_{\lambda} \rho(y^*y_{\lambda}) = \rho(y^*) \\
&\quad e \\
\pi(y)^* &= \lim_{\lambda} \rho(L(y, \delta_e)(y_{\lambda})^*) \\
&= \lim_{\lambda} \rho(y_{\lambda}^*y^*) = \rho(y^*).
\end{aligned}$$

e também (u, H) é uma representação unitária de G pois, é homomorfismo e preserva involução; estas demonstrações são análogas a que fizemos acima e por isto vamos verificar apenas a condição para que seja unitária. A continuidade (fraca) segue da continuidade da aplicação $t \rightarrow L(1, \delta_t)y$ na norma $\| \cdot \|_1$, para todo y em $L_1(G, A)$ e do fato que $\rho(y)\xi$, $\xi \in H$ ser denso em H . E ainda

$$(u_s u_s^*)(z) = u_e(z) = \lim_{\lambda} \rho(L(1, \delta_e)(z)) = z$$

ou seja, $(u_s)^{-1} = u_s^*$

Contudo, resta provar que esta representação (π, u, H) que acabamos de construir é covariante, seja $y \in K(G, A)$ então,

$$\begin{aligned}
(u_t \pi(x) u_t^*) \rho(y) &= \rho(L(1, \delta_t) L(x, \delta_e) L(1, \delta_{t^{-1}}) y) \\
&= \rho(L(1, \delta_t) L(x, \delta_e) (\alpha_{t^{-1}}(y(t^2)))) \\
&= \rho(L(1, \delta_t) (x \alpha_{t^{-1}}(y(t^2)))) \\
&= \rho(\alpha_t(x) y(t)) \\
&= \rho(L(\alpha_t(x), \delta_e)(y)) \\
&= \pi(\alpha_t(x)) \rho(y)
\end{aligned}$$

tomando-se $y = y_{\lambda}$ onde $(y_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ uma aproximação da unidade de $L_1(G, A)$ e passando-se ao limite temos a relação de covariância, $u_t \pi(x) u_t^* = \pi(\alpha_t(x))$, verificada.

Mostrando agora a bijetividade entre estas representações tomemos a representação covariante (π, u, H) acima obtida a partir da representação não-degenerada (ρ, H) de $L_1(G, A)$ e $y, z \in K(G, A)$.

$$\begin{aligned}
(L(y(t), \delta_e)L(1, \delta_t)z)(s) &= y(t) \int_G \alpha_r(L(1, \delta_t)(r^{-1}s)) d\delta_e(r) \\
&= y(t)L(1, \delta_t)(s) \\
&= y(t) \int_G \alpha_m(z(m^{-1}s)) d\delta_t(m) \\
&= y(t)\alpha_t(z(t^{-1}s)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_G \pi(y(t))u_t dt \rho(z) &= \int_G \rho(L(y(t), \delta_e)L(1, \delta_t)z) dt \\
&= \int_G \rho(y(t)\alpha_t(z(t^{-1}s))) dt \\
&= \rho\left(\int_G y(t)\alpha_t(z(t^{-1}s)) dt\right) \\
&= \rho(y \times z) \\
&= \rho(y)\rho(z)
\end{aligned}$$

e como anteriormente tomando-se $z = y_\lambda$ e passando-se ao limite teremos

$$\rho(y) = \int_G \pi(y(t))u_t dt,$$

ou seja, $\rho = \pi \times u$.

Reciprocamente, se $\rho = \pi \times u$, tomamos $y_\lambda = x_\lambda \times f_\lambda$ e veremos que, para todo $a \in A$ e para todo $t \in G$, temos

$$\begin{aligned}
(L(x, \delta_t)y_\lambda)(s) &= x \int_G \alpha_m(y_\lambda(m^{-1}s)) d\delta_t(m) \\
&= x\alpha_t(x_\lambda f_\lambda(t^{-1}s)) \\
&= x\alpha_t(x_\lambda)f_\lambda(t^{-1}s)
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda} (\rho(L(x, \delta_e)y_{\lambda})) &= \lim_{\lambda} \rho(xx_{\lambda}f_{\lambda}(s)) \\
&= \lim_{\lambda} \int_G \pi(xx_{\lambda}f_{\lambda}(s))u_s ds \\
&= \lim_{\lambda} \pi(xx_{\lambda}) \int_G f_{\lambda}(s)u_s ds \\
&= \pi(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda} \rho(L(1, \delta_t)y_{\lambda}) &= \lim_{\lambda} \rho(\alpha_t(x_{\lambda})f_{\lambda}(t^{-1}s)) \\
&= \lim_{\lambda} \int_G \pi(\alpha_t(x_{\lambda}))f_{\lambda}(t^{-1}s)u_s ds \\
&= \lim_{\lambda} \pi(\alpha_t(x_{\lambda})) \int_G f_{\lambda}(t^{-1}s)u_s ds \\
&= \int_G f_{\lambda}(s)u_{ts} ds \\
&= u_t \int_G f_{\lambda}(s)u_s ds \\
&= u_t
\end{aligned}$$

■

Definição 3.13 *O Produto cruzado, relativo ao C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$, é definido como sendo o completamento de $\pi_u(L_1(G, A))$ em $B(H_u)$. É representado pelo símbolo $G \rtimes_{\alpha} A$.*

Cabe observar que pelo teorema (1.41) poderíamos definir também o produto cruzado como sendo o completamento de $L_1(G, A)$ segundo a norma

$$\|a\|_u = \sup_{\pi \in R} \|\pi(a)\|$$

para todo $a \in L_1(G, A)$ onde R é o conjunto de todas as representações não degeneradas de $L_1(G, A)$.

Teorema 3.14 *Todo $*$ -homomorfismo ϕ de $L_1(G, A)$ em uma C^* -álgebra $\mathcal{A}$ pode ser estendido única e continuamente a um $*$ -homomorfismo $\tilde{\phi}$ de $G \rtimes_{\alpha} A$ em $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Seja (ψ, H) uma representação fiel de $\mathcal{A}$, por (1.21) ψ é uma isometria. Sendo assim, $(\psi \circ \phi, H)$ é uma representação de $L_1(G, A)$, logo

$$\|\phi(a)\| = \|\psi \circ \phi(a)\| \leq \|a\|$$

para todo $a \in L_1(G, A)$. Dessa forma vemos que ϕ é contínua e portanto existe uma única extensão contínua $\tilde{\phi}$ de ϕ em $G \rtimes_{\alpha} A$.

■

Teorema 3.15 *Para cada C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ existe uma representação covariante (π, u, H) tal que*

$$G \rtimes_{\alpha} A \subseteq C^*(\pi(A) \cup u_G) \subseteq M(G \rtimes_{\alpha} A).$$

Demonstração: Pela demonstração de 3.12 temos a existência de uma representação covariante (π, u, H) tal que $\pi(A) \cup u_G \subseteq M(G \rtimes_{\alpha} A)$ e como $M(G \rtimes_{\alpha} A)$ é uma C^* -álgebra então $C^*(\pi(A) \cup u_G) \subseteq M(G \rtimes_{\alpha} A)$.

Para mostrar a outra inclusão seja $y \in K(G, A)$ e $\epsilon > 0$, existe um conjunto C compacto que contém o suporte de y e por 3.7 existem $(x_i \otimes f_i) \in K(G, A)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $\|y - \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i\| < \epsilon$. Os elementos $\int_G u_t f_i(t) dt$ pertencem a $C^*(u_G)$ e assim $\sum_{i=1}^n \int_G \pi(x_i) u_t f_i(t) dt$ pertence a $C^*(\pi(A) \cup u_G)$.

Mas

$$\|\pi_u(y) - \sum_{i=1}^n \int_G \pi(x_i) u_t f_i(t) dt\| = \|\pi_u(y) - \pi_u(\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i)\| \leq \|y - \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i\|_1 \leq \epsilon$$

logo $\pi_u(y) \in C^*(\pi(A) \cup u_G)$ e portanto $G \rtimes_{\alpha} A \in C^*(\pi(A) \cup u_G)$.

■

Observe que podemos identificar A com sua imagem em $M(G \rtimes_{\alpha} A)$ através da aplicação $a \mapsto L(a, \delta_e)$ e também identificar G com sua imagem em $M(G \rtimes_{\alpha} A)$ via aplicação $t \mapsto u_t$. No caso em que A possui unidade sabemos que $A = M(A)$ e assim sendo, quando A possui unidade teremos $G \rtimes_{\alpha} A = C^*(\pi(A) \cup u_G) = M(G \rtimes_{\alpha} A)$.

Para finalizar e esclarecer um pouco mais este assunto, faremos agora alguns exemplos de Produtos Cruzados.

Exemplo 3.16 : $\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} C(\mathbb{Z}_n) \simeq M_n(\mathbb{C})$

Para um $n \in \mathbb{N}$ fixo tomemos o grupo $\mathbb{Z}_n$, a C^* -álgebra $C(\mathbb{Z}_n)$ e uma ação α de $\mathbb{Z}_n$ em $C(\mathbb{Z}_n)$ tal que $\alpha_s(f)|_t = f(t - s)$.

Dessa forma podemos construir o Produto Cruzado $\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} C(\mathbb{Z}_n)$ e verificar que

$$\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} C(\mathbb{Z}_n) \simeq M_n(\mathbb{C}).$$

Tomemos uma aplicação $\pi : C(\mathbb{Z}_n) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ dada por

$$\pi(f) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(n-1) \end{bmatrix}$$

para toda $f \in C(\mathbb{Z}_n)$, é fácil verificar $\|\pi(f)\| = \|f\|$ e que π é um $*$ -homomorfismo.

Tomemos também $S \in M_n(\mathbb{C})$ dada por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e com isto verifica-se que

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definindo-se $u_m = S^m$, para todo m em $\mathbb{Z}_n$, temos u uma representação unitária de $\mathbb{Z}_n$. Através de alguns cálculos com as matrizes pode-se chegar a conclusão de que $u_n \pi(f) u_n^* = \pi(\alpha_n(f))$, e dessa forma vemos que a representação $(\pi, u, \mathbb{C}^n)$ é uma representação covariante, e por (3.12) podemos construir $\pi \times u$.

Observe que para todo $f \in l_1(\mathbb{Z}_n, C(\mathbb{Z}_n))$ temos $\pi \times u(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} \pi(f(m)) u_m$ que é claramente sobrejetora em $B(\mathbb{C}^n) \simeq M_n(\mathbb{C})$, e como a dimensão de ambos é n^2 , temos que $\pi \times u$ é um isomorfismo. Logo

$$\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} C(\mathbb{Z}_n) \simeq M_n(\mathbb{C}).$$

Uma demonstração mais detalhada deste fato pode ser encontrada no exemplo 2.28 de [11].

Exemplo 3.17 : A álgebra de rotação $\mathcal{A}_{\theta}$

Definimos a álgebra de rotação $\mathcal{A}_{\theta}$ como sendo o Produto Cruzado $\mathbb{Z} \rtimes_{\tau_{\theta}} C(\mathbb{T})$, onde $\tau_{\theta}(f)|_z = f(e^{-2\pi i \theta} z)$. Quando o ângulo θ for irracional $\mathcal{A}_{\theta}$ recebe o nome de álgebra de rotação irracional.

Pode-se verificar que a álgebra de rotação $\mathcal{A}_{\theta}$ é a C^* -álgebra universal gerada por elementos unitários U e V e a relação $UV = e^{2\pi i \theta} VU$, mas não vamos entrar em maiores detalhes com relação a esta forma de se apresentar $\mathcal{A}_{\theta}$. Para um leitor interessado neste assunto recomendamos o capítulo VI de [3], o apêndice C de [1] e também o capítulo 5 de [11].

Exemplo 3.18 : $G \rtimes_{tr} \mathbb{C} \simeq C_0(\widehat{G})$ para G um grupo abeliano.

De fato, como G é abeliano e localmente compacto então $L_1(G)$ é uma $*$ -álgebra de Banach comutativa (2.17) e que possui uma aproximação da unidade.

Como $G \rtimes_{tr} \mathbb{C}$ é igual ao fecho de $L_1(G)$, então $G \rtimes_{tr} \mathbb{C}$ também é comutativo e pelo teorema de Gelfand-Naimark, (1.20), sabemos que

$$G \rtimes_{tr} \mathbb{C} = C_0(\text{espectro de } G \rtimes_{tr} \mathbb{C}).$$

Mas por (3.12) sabemos que as representações de $L_1(G)$ podem ser estendidas continuamente às representações de $G \rtimes_{tr} \mathbb{C}$. E por (2.33) sabemos que o espectro de $L_1(G)$ pode ser visto como $\widehat{G}$. Portanto

$$G \rtimes_{tr} \mathbb{C} \simeq C_0(\widehat{G}).$$

3.2 Produto Cruzado Reduzido

Definição 3.19 *Dado um C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ e uma representação (π, H) de A , construímos uma representação covariante $(\widetilde{\pi}, \lambda, L_2(G, H))$, tal que para todo x em A , s e t em G e ξ em $L_2(G, H)$ temos*

$$\begin{aligned} (\widetilde{\pi}(x)\xi)(t) &= \pi(\alpha_{t^{-1}}(x))\xi(t) \\ (\lambda_s\xi)(t) &= \xi(s^{-1}t). \end{aligned}$$

É claro que $\widetilde{\pi}$ e λ são, respectivamente, representações de A e G em $B(L_2(G, H))$ e também que formam uma representação covariante pois,

$$\begin{aligned} ((\lambda_s\widetilde{\pi}(x)\lambda_s^*)\xi)(t) &= (\widetilde{\pi}(x)\lambda_{s^{-1}}\xi)(s^{-1}t) \\ &= \pi(\alpha_{t^{-1}s}(x))(\lambda_{s^{-1}}\xi(s^{-1}t)) \\ &= \pi(\alpha_{t^{-1}s}(x))\xi(t) \\ &= \widetilde{\pi}(\alpha_s(x)\xi)(t). \end{aligned}$$

Definição 3.20 *A representação regular de $G \rtimes_{\alpha} A$ induzida por (π, H) , representação de A , é a representação $(\widetilde{\pi} \times \lambda, L_2(G, H))$ obtida pela definição anterior e pela proposição 3.12.*

E dessa forma teremos para todo $y \in K(G, A)$ e $\xi \in L_2(G, H)$

$$\begin{aligned} ((\widetilde{\pi} \times \lambda)y)\xi(t) &= \int_G (\widetilde{\pi}(y(s))\lambda_s\xi) ds \\ &= \int_G \pi(\alpha_{t^{-1}}(y(s)))\xi(s^{-1}t) ds. \end{aligned}$$

Definição 3.21 Dado o C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ e a representação universal (π_u, H_u) de A definimos o Produto Cruzado Reduzido de G por A como sendo a C^* -álgebra obtida por $(\tilde{\pi}_u \times \lambda)(G \rtimes_{\alpha} A)$ e denotamos esta C^* -álgebra por $G \rtimes_{\alpha r} A$.

Alguns exemplos de Produtos Cruzados Reduzidos serão deixados para serem feitos no próximo capítulo, para que possamos mostrar algumas aplicações dos teoremas que estudaremos num próximo momento. Mas mesmo assim, daremos agora um exemplo de Produto Cruzado Reduzido que não se encaixa no próximo capítulo, visto que o grupo em questão não é necessariamente abeliano.

Exemplo 3.22 : $G \rtimes_{tr} \mathbb{C} \simeq C_0(\widehat{G})$ para G um grupo abeliano.

Observando que pelo Teorema de Plancherel, 4.25 de [8], a transformada de Fourier F se estende a um operador unitário u de $L_2(G)$ em $L_2(\widehat{G})$. Dessa forma, a representação regular λ passa a funcionar como uma conjugação por u

$$u\lambda(f)u^*(\hat{g}) = u\lambda(f)(g) = F(f \times g) = \hat{f}\hat{g},$$

para toda $f \in L_1(G)$ e $g \in L_1(G) \cap L_2(G)$, ou seja, a representação regular está levando um elemento f de $L_1(G)$ em seu multiplicador $\hat{f}$, ou melhor $M_{\hat{f}}$. Portanto λ é uma isometria e como por (3.18)

$$G \rtimes_{tr} \mathbb{C} \simeq C_0(\widehat{G})$$

então,

$$G \rtimes_{tr} \mathbb{C} \simeq C_0(\widehat{G}) \simeq G \rtimes_{trr} \mathbb{C}.$$

Capítulo 4

Mediabilidade e o Produto Cruzado Discreto

Neste capítulo trataremos sobre o estudo dos grupos "amenables" que receberam esse nome devido a um trocadilho feito por M. M. Day em 1950, esse trocadilho foi feito em cima da palavra "mean" (média). Por esse motivo, ou não traduzimos o termo "amenables", ou fazemos como fizeram os franceses, alemães e outros que numa tradução não literal denominam estes grupos respectivamente por "moyennable" e "mittelbar". Numa tentativa de trazer ao português uma tradução não literal, mas condizente com as propriedades do grupo passaremos a chamá-lo de grupo *mediável*.

Além da definição, exemplos, etc. também trataremos, neste capítulo, de uma propriedade especial do produto cruzado por grupos mediáveis. Utilizando-se este tipo de grupo veremos que o produto cruzado $G \rtimes_{\alpha} A$ é isométricamente isomorfo, através da representação regular, ao produto cruzado reduzido $G \rtimes_{ar} A$. E quando a C^* -álgebra utilizada, na construção do produto cruzado, for a dos complexos, $\mathbb{C}$, provaremos também a veracidade da recíproca, isto é, mostraremos que se a representação regular é fiel então o grupo G é mediável. Estudaremos com detalhe esta propriedade dos grupos mediáveis no caso em que o grupo é discreto.

4.1 Mediabilidade

Definição 4.1 Um grupo G é dito *mediável* se existe um estado m , também chamado de *média*, sobre $L_\infty(G)$ tal que $m(\lambda_s(f)) = m(f)$, para todo $s \in G$ e $f \in L_\infty(G)$.

Exemplo 4.2 Todos os grupos compactos são mediáveis.

Para isto basta observar que a integração obtida com a medida de Haar (μ) se torna um estado invariante à esquerda sobre $L_\infty(G)$. Vejamos, $m(f) = \int_G f(s) d\mu(s)$ é um funcional linear positivo, invariante à esquerda pela própria definição da medida de Haar, vide (2.16), e também um estado já que $m(\chi_G) = \int_G \chi_G(s) d\mu(s) = \mu(G) = 1$, pois G é compacto.

Exemplo 4.3 Todo grupo abeliano localmente compacto é mediável.

Para demonstrarmos este exemplo utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Markov - Kakutani, 0.14 de [12], que nos diz:

Teorema 4.4 (Teorema de Markov - Kakutani) Seja Ω uma família comutativa de funções lineares contínuas de um espaço vetorial topológico X em si mesmo. E K um subconjunto compacto e convexo de X tal que $TK \subseteq K, \forall T \in \Omega$, então existe $x \in K$ tal que $Tx = x, \forall T \in \Omega$.

Seja S o espaço dos estados de $L_\infty(G)$ munido da topologia fraca-*. Então S é convexo pois, $\forall \alpha, \beta \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$ temos $\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \in S$ já que

$$(\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta)(\chi_G) = \lambda\alpha(\chi_G) + (1 - \lambda)\beta(\chi_G) = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

E também é compacto pois pelo teorema de Banach - Alaoglu, V.3.1 de [2], sabemos que num espaço normado, como é o caso, a bola unitária do dual deste espaço é fraca-* compacta.

Para cada $s \in G$ considere $T_s(f) = \lambda_s f$, para f em $L_\infty(G)$. Logo o operador linear T_s^* (adjunto) de $L_\infty(G)^*$ definido por $T_s^* \rho = \rho \lambda_s$, para todo $\rho \in S$ é fraco-* contínuo, e então, se $\rho_i \xrightarrow{w^*} \rho$ temos

$$T_s^* \rho_i(f) = \rho_i(\lambda_s(f)) \rightarrow \rho(\lambda_s(f)) = T_s^* \rho(f), \forall f \in L_\infty(G).$$

Mas se $\rho \in S$ então $T_s^* \rho \in S$ pois, $T_s^* \rho(f) = \rho(\lambda_s(f)) \geq 0, \forall f \in L_\infty^+(G)$ e $\|T_s^* \rho\| = \|T_s^* \rho(\chi_G)\| = \|\rho(\chi_G)\| = 1$. Logo T_s^* é um operador de S e como S é compacto e convexo, basta então a família $\Omega = \{T_s^* : s \in G\}$ ser comutativa para aplicarmos o Teorema de Markov - Kakutani. De fato

$$T_s^* T_r^* \rho = T_s^* (\rho \lambda_r) = \rho \lambda_r \lambda_s = \rho \lambda_{rs} = \rho \lambda_{sr} = T_r^* T_s^* \rho.$$

Assim sendo, existe $m \in S$ um ponto fixo dado pela família Ω tal que para todo f em $L_\infty(G)$ vale, $m(\lambda_s(f)) = T_s^* m(f) = m(f)$. Logo G é mediável.

Teorema 4.5 *Todo o grupo que contenha $\mathbb{F}_2$ (grupo livre de dois geradores) não é mediável.*

Seja $G = \mathbb{F}_2$ o grupo livre de dois geradores e sejam u e v os geradores de G (dois de seus geradores). Tomemos U_0 e U_1 como o conjunto dos elementos de G que começam, respectivamente, por potências pares e ímpares de u , para $u \in G$. Sejam V_0, V_1 e V_2 conjuntos formados, respectivamente, por elementos que começam com potências de v congruas a 0, 1 e 2, módulo 3. Sendo assim temos:

$$G = U_0 \dot{\cup} U_1 \text{ e } U_0 = uU_1$$

$$G = V_0 \dot{\cup} V_1 \dot{\cup} V_2 \text{ e } V_j = v^j V_0, j = 1, 2$$

Por absurdo vamos supor G mediável e assim existe m estado invariante à esquerda de $L_\infty(G)$ o que nos daria

$$m(\chi_G) = 1 \text{ (pois, } \chi_G \text{ é a unidade de } L_\infty(G))$$

$$m(\chi_{U_0}) = m(\chi_{U_1}) \text{ (pois, } \chi_{U_0} = \lambda_u^{-1} \chi_{U_1})$$

$$m(\chi_{V_0}) = m(\chi_{V_1}) = m(\chi_{V_2}) \text{ (pois, } \chi_{V_j} = \lambda_v^{-j} \chi_{V_0})$$

$$m(\chi_{U_1}) \leq m(\chi_{V_0}) \text{ (pois, } U_1 \subset V_0)$$

E assim, se $G = \mathbb{F}_2$ temos $m(\chi_{U_1}) = 1/2$ e $m(\chi_{V_0}) = 1/3$. O que nos dá uma contradição, ou seja, G não pode ser um grupo mediável.

A demonstração para o caso em que G contém o grupo $\mathbb{F}_2$ pode ser feita através de um simples argumento contraditório. Supondo que exista um estado m de $L_\infty(G)$ invariante à esquerda então, m também seria um estado invariante à esquerda sobre $L_\infty(\mathbb{F}_2)$, já que $\mathbb{F}_2 \subset G$, e assim teríamos mostrado que $\mathbb{F}_2$ é mediável, o que é uma contradição pelo que acabamos de demonstrar e portanto não existe tal estado m sobre $L_\infty(G)$, ou seja, G não é mediável.

Deste ponto em diante passaremos a estudar, salvo menção contrária, apenas os casos em que o grupo G , em questão, é discreto. E por esse motivo dedicamos a próxima seção para falar sobre algumas propriedades do Produto Cruzado por grupos discretos.

4.2 O Produto Cruzado Discreto

Estudamos no capítulo anterior o Produto Cruzado num caso geral onde o C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$ era constituído por uma C^* -álgebra A qualquer, um grupo G localmente compacto e uma ação α contínua. Nesta seção estaremos interessados no C^* -sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$, onde A é uma C^* -álgebra qualquer e G é um grupo discreto. Observe que não é necessário fazer referência a continuidade da ação α , porque esta é sempre contínua, já que G é discreto.

Por abuso de linguagem iremos nos referir ao Produto Cruzado por um grupo discreto como sendo o Produto Cruzado Discreto.

A mudança para um grupo G discreto provoca uma série de alterações que simplificam a teoria desenvolvida para Produtos Cruzados no caso geral. Dentre essas mudanças podemos citar que o fato de G , discreto, ser unimodular elimina algumas dificuldades impostas pela função modular Δ , as integrações do capítulo anterior se transformam em somatórios para o caso discreto, assim como, o termo suporte compacto pode ser entendido como suporte finito.

Dessa forma o espaço $L_1(G, A)$ se torna

$$l_1(G, A) = \{a : G \rightarrow A, \sum_{s \in G} \|a(s)\| < \infty\},$$

onde as operações de convolução e involução e a norma são dadas por

$$\begin{aligned}
ab(t) &= \sum_{s \in G} a(s) \alpha_s(b(s^{-1}t)) \\
a^*(t) &= \alpha_s(a(s^{-1})^*) \\
\|a\|_1 &= \sum_{s \in G} \|a(s)\|.
\end{aligned}$$

Como visto anteriormente, $l_1(G, A)$, munido dessas operações e norma, se torna uma $*$ -álgebra de Banach com o subconjunto $k(G, A)$, funções de $l_1(G, A)$ que tem suporte finito, fortemente denso. Neste caso $k(G, A)$ pode ser visto como

$$k(G, A) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \delta_{s_i} : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ e } s_i \in G \right\}.$$

Pelo teorema (3.12), uma representação covariante (π, u, H) de $\{A, G, \alpha\}$ nos dá uma representação não degenerada de $l_1(G, A)$ dada por

$$\pi \times u(a) = \sum_{s \in G} \pi(a(s)) u_s$$

e reciprocamente, dada uma representação não degenerada de $l_1(G, A)$ podemos obter uma representação covariante (π, u, H) do sistema dinâmico $\{A, G, \alpha\}$.

Pelo que foi visto no final de seção sobre Produtos Cruzados sabemos que se A possui unidade, então $G \rtimes_{\alpha} A$ é isometricamente isomorfo a $C^*(\pi(A) \cup u_G)$. E assim, $G \rtimes_{\alpha} A = \overline{\left\{ \sum_{t \in G} \pi(y_t) u_t : y \in l_1(G, A) \right\}}$.

O produto cruzado da C^* -álgebra $\mathbb{C}$ por um grupo discreto G através de uma ação trivial α , $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$, é também chamado de C^* -álgebra do grupo G e denotado por $C^*(G)$, assim como, o produto cruzado reduzido obtido a partir de $C^*(G)$ pela representação regular que neste caso se resume a λ é chamado de C^* -álgebra reduzida do grupo G e representado por $C_r^*(G)$.

Esses produtos cruzados por $\mathbb{C}$, onde o grupo G é mediável, são uma excelente motivação para o assunto que vamos tratar pois, são mais simples de se manipular e no entanto nos dão uma ótima idéia dos objetivos a serem alcançados. E por esse motivo trataremos dele nessa próxima seção.

4.3 O Produto Cruzado de um Grupo Mediável Discreto pela C^* -álgebra dos Complexos

Nesta seção estudaremos o caso particular onde o produto cruzado é construído a partir do C^* -sistema dinâmico $\{\mathbb{C}, G, \alpha\}$, onde o grupo G é discreto e mediável. Veremos com isto que a representação regular de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ é fiel, ou seja, $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C} \simeq G \rtimes_{\alpha r} \mathbb{C}$. Mostraremos também a recíproca, isto é, se a representação regular de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ é fiel então o grupo G é mediável.

Definição 4.6 *Uma função $\phi \in l_{\infty}(G)$ é dita positiva definida se*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \phi(s_j^{-1} s_i) \geq 0,$$

para todo $n \geq 1$, onde $c_i, c_j \in \mathbb{C}$, $s_i, s_j \in G$ tal que $1 \leq i, j \leq n$.

Passaremos a denotar por $P(G)$ o conjunto de todas as funções positivas definidas e por $P_1(G)$ o conjunto de todas as $\phi \in P(G)$ tais que $\phi(e) = 1$. O conjunto $P_1(G)$ é de grande valia, já que, toda $\phi \in P_1(G)$ através da relação $\phi(s) = \Phi(\delta_s), \forall s \in G$ determina um estado $\Phi \in (G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C})^*$ e reciprocamente todo estado de Φ de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ determina uma função positiva definida em $P_1(G)$.

Proposição 4.7 *Uma função $\phi \in P_1(G)$ determina um estado Φ de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ através da relação $\phi(s) = \Phi(\delta_s)$ e reciprocamente, um estado de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ determina uma função de $P_1(G)$ através da igualdade anterior.*

Demonstração: Dado um estado Φ de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ e tomando - se $\phi(s) = \Phi(\delta_s), \forall s \in G$ temos $\phi(e) = \Phi(\delta_e) = 1$. Como

$$k(G) = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \delta_{s_i} : c_i \in \mathbb{C}, s_i \in G \right\}$$

e

$$\overline{k(G)} = l_1(G)$$

então para $f = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{s_i}$ em $k(G)$ temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \phi(s_j^{-1} s_i) = \Phi(f^* \times f) \geq 0$$

ou seja, dado um estado temos uma função positiva definida em $P_1(G)$. Reciprocamente, dada uma $\phi \in P_1(G)$ definamos um funcional sobre $k(G)$ por

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n c_i \delta_{s_i}\right) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(s_i)$$

e assim Φ é linear, Φ é contínua porque $\forall f \in k(G)$ temos

$$\|\Phi(f)\| = \left\| \Phi\left(\sum_{i=1}^n c_i \delta_{s_i}\right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \|\phi\|_\infty \leq \|f\|_1 \|\phi\|_\infty$$

e assim Φ pode ser estendida continuamente a $l_1(G)$.

Temos ainda

$$\Phi(f^* \times f) \geq 0 \quad e \quad \Phi(\delta_e) = 1.$$

E assim, podemos estender Φ continuamente para um estado de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$. O que nos mostra então a bijeção entre $S(G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C})$ e $P_1(G)$ e conseqüentemente para todo

$f = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{s_i}$ em $k(G)$ temos a norma em $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ dada por

$$\|f\|_{G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}} = \sup_{\Phi \in S(G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C})} \Phi(f^* \times f) = \sup_{\phi \in P_1(G)} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \phi(s_j^{-1} s_i) \right).$$

■

Lema 4.8 Dadas ϕ_1 e ϕ_2 em $P_1(G)$ então $\phi_1 \phi_2$ também pertence a $P_1(G)$, onde $\phi_1 \phi_2(t) = \phi_1(t) \phi_2(t)$, para todo t em G .

Demonstração: Antes de demonstramos propriamente o lema vejamos que a matriz produto, em relação ao produto pontual (produto de Schur), de duas matrizes

positivas é também positiva. Seja B uma matriz positiva de elementos $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ então, existe uma matriz C de elementos (c_{ij}) tal que $b_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} \overline{c_{jk}}$, consequentemente para quaisquer γ_i e γ_j em $\mathbb{C}$ temos $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{ij}) \overline{\gamma_j} \gamma_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} \overline{c_{jk}} \right) \overline{\gamma_j} \gamma_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{c_{jk}} \gamma_j c_{ik} \gamma_i \geq 0$, já que (a_{ij}) também é positiva.

Agora sim, tomando-se $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ em G e escrevendo-se as matrizes M_k com coeficientes $m_{ij}^k = \phi_k(s_j^{-1} s_i)$ para $k = 1$ ou 2 e $1 \leq i, j \leq n$, teremos matrizes M_1 e M_2 positivas já que, para todo $c \in \mathbb{C}^n$, existe $f \in K(G)$ tal que $\langle M_k c, c \rangle = \phi(f^* \times f) \geq 0$.

Dessa maneira a matriz $M = M_1 M_2$, tomado o produto pontual das duas matrizes positivas, também é positiva, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \phi_1(s_j^{-1} s_i) \phi_2(s_j^{-1} s_i) = \langle M c, c \rangle \geq 0,$$

para todo $c \in \mathbb{C}^n$ e como $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ são tomados arbitrariamente temos $\phi_1 \phi_2$ positivo e também $\phi_1 \phi_2(e) = 1$ portanto $\phi_1 \phi_2 \in P_1(G)$. ■

Lema 4.9 *Seja $\phi \in P_1(G)$ com suporte finito então existe um vetor unitário ξ em $l_2(G)$ tal que $\phi(s) = \langle \lambda_s \xi, \xi \rangle$, para todo $s \in G$.*

Demonstração: Definindo-se um operador linear T sobre $K(G)$ por $T(f) = f \times \phi$, como ϕ é suporte finito então T é limitado (por $\sum_{s \in G} |\phi(s)|$) em $l_2(G)$ e portanto pode ser estendido continuamente a um operador limitado de $l_2(G)$. Seja $f = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{s_i}$ em $K(G)$ então,

$$\begin{aligned} \langle T f, f \rangle &= \langle f \times \phi, f \rangle = \sum_{s \in G} (f \times \phi)(s) \overline{f(s)} \\ &= \sum_{s \in G} \sum_{t \in G} f(t) \phi(t^{-1} s) \overline{f(s)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \phi(s_j^{-1} s_i) \geq 0 \end{aligned}$$

logo T é um operador positivo e ainda T comuta com λ_s , $\forall s \in G$, porque para todo f em $l_2(G)$ temos

$$(\lambda_s T)(f) = \delta_s \times (f \times \phi) = (\delta_s \times f) \times \phi = (T \lambda_s)(f)$$

E assim tomando-se $\xi = T^{1/2}\delta_e$ temos,

$$\begin{aligned}\langle \lambda_s \xi, \xi \rangle &= \langle \lambda_s T^{1/2} \delta_e, T^{1/2} \delta_e \rangle = \langle T^{1/2} \lambda_s \delta_e, T^{1/2} \delta_e \rangle \\ &= \langle \delta_s, T \delta_e \rangle = \langle \delta_s, \phi \rangle = \phi(s).\end{aligned}$$

e também ξ unitário já que, $\|\xi\|_2^2 = \phi(e) = 1$.

■

Proposição 4.10 *Sejam A uma C^* -álgebra e (ρ, H) uma representação de A . Se $F = \{f \in S(A) : f(x) = \langle \rho(x)\xi, \xi \rangle, \xi \in H, x \in A \text{ e } \|\xi\| = 1\}$ então ρ é fiel se, e somente se, $\overline{co(F)}^{w*} = S(A)$.*

Demonstração: Suponha que existe $x \neq 0, x \in A$, tal que $\rho(x) = 0$. Por um corolário do Teorema de Hahn-Banach, III.6.5 [2], existe $f \in S(A)$ tal que $f(x^*x) \neq 0$ e por hipótese existe $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset co(F)$ tal que $\phi_\lambda \xrightarrow{w*} f$, ou seja, $\phi_\lambda(x^*x) \rightarrow f(x^*x)$, mas $\rho(x) = 0$ logo $\phi_\lambda(x^*x) = 0$, o que é uma contradição e portanto ρ é fiel.

Supondo $B = \overline{co(F)}^{w*} \subsetneq S(A)$, então existe $f \in S(A)$ tal que $f \notin B$ e é auto-adjunto. Novamente por uma aplicação de Hahn-Banach, III.6.8 [2], existe $x \in A$ auto-adjunto (caso contrário toma-se $\frac{x+x^*}{2}$) e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $f(x) < \alpha$ e $g(x) \geq \alpha$ para todo $g \in B$ então, para todo $g \in B$ e para todo $\xi \in H$ com $\|\xi\| = 1$ temos

$$g(x) \geq \alpha \Rightarrow \langle \rho(x)\xi, \xi \rangle \geq \alpha \Rightarrow \langle (\rho(x) - \alpha Id)\xi, \xi \rangle \geq 0$$

como vale para todo $\xi \in H$ então $\rho(x) - \alpha Id \geq 0$ em $B(H)$, logo o espectro $\sigma(\rho(x) - \alpha Id)$ está contido em $[0, \infty)$. Considere a unitização $\tilde{A}$ de A e a extensão $\tilde{\rho}$ de ρ , a $\tilde{A}$. Com $\tilde{\rho}$ fiel, já que ρ é fiel, então

$$\sigma(x - \alpha 1) = \sigma(\tilde{\rho}(x) - \alpha Id) \subset [0, \infty)$$

Logo $x - \alpha 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) - \alpha Id \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \alpha$. Uma contradição e portanto $B = \overline{co(F)} = S(A)$.

■

Para demonstrar o resultado central desta seção, precisaremos antes enunciar um teorema importante cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 4.11 (Goldstine) *Seja X um espaço de Banach então a bola unitária, $B_1(X)$, de X é fraca* densa na bola unitária, $B_1(X^{**})$, de X^{**} , o bidual de X .*

Subdividiremos o resultado em duas partes para uma melhor compreensão e clareza.

Teorema 4.12 *Se o grupo discreto G é mediável então a representação regular λ é fiel e como consequência $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C} \simeq G \rtimes_{\alpha r} \mathbb{C}$.*

Demonstração: Seja m o estado invariante à esquerda de $l_{\infty}(G)$. Pelo Teorema de Goldstine (4.11) sabemos que a bola unitária de $l_1(G)$ é fraca* densa na bola unitária de $l_{\infty}(G)^*$, isto é, existe uma rede $(F_i)_{i \in I} \subset l_1(G)$ que converge, fraca*, para m .

Como $k(G)$ é denso em $l_1(G)$, em relação a norma, então para todo $x \in l_{\infty}(G)$ e $\epsilon > 0$ podemos tomar $|F_i(x) - m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ e também uma rede $(f_i)_{i \in I}$ na bola unitária de $k(G)$ com $\|f_i - F_i\|_1 < \frac{\epsilon}{2\|x\|_{\infty}}$, para cada $i \in I$, e assim temos

$$\begin{aligned} |f_i(x) - m(x)| &\leq |f_i(x) - F_i(x)| + |F_i(x) - m(x)| = |x(f_i - F_i)| + |F_i(x) - m(x)| \\ &= \left| \sum_{s \in G} x(s)(f_i - F_i)(s) \right| + |F_i(x) - m(x)| \\ &\leq \|x\|_{\infty} \|f_i - F_i\|_1 + |F_i(x) - m(x)| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

e assim vemos que f_i converge na topologia fraca* para m .

Seja $\mathbf{1}$ a função constante igual a 1, isto é, $\mathbf{1}(s) = 1$ para todo s em G . Vejamos que $|\hat{f}_i(\mathbf{1})| = \left| \sum_{s \in G} \mathbf{1}(s)f_i(s) \right| \leq \sum_{s \in G} |f_i(s)| = \|f_i\|_1 \leq 1$ e então para todo $i \in I$ temos $0 \leq 1 - \sum_{s \in G} |f_i(s)| \leq 1 - \left| \sum_{s \in G} f_i(s) \right| \leq \left| 1 - \sum_{s \in G} f_i(s) \right|$, mas $\sum_{s \in G} f_i(s) = \hat{f}_i(\mathbf{1})$ e $\lim_i \hat{f}_i(\mathbf{1}) = m(\mathbf{1}) = 1$ e assim dado $\epsilon_1 > 0$ existe um i suficientemente grande tal que

$$0 \leq 1 - \sum_{s \in G} |f_i(s)| \leq 1 - \left| \sum_{s \in G} f_i(s) \right| < \epsilon_1,$$

com isso podemos dizer que $\|f_i\|_1 = 1$ para um i suficientemente grande.

Podemos concluir também que os f_i são positivos pois, caso contrário tomaríamos a rede $(g_i)_{i \in I}$ onde $g_i(s) = \frac{|f_i(s)|}{\|f_i\|_1}$ que é uma rede de elementos positivos com $\|g_i\|_1 = 1$ e para i suficientemente grande g_i difere pouco, em relação a $\|\cdot\|_1$, de f_i .

Como m é invariante à esquerda para qualquer $s \in G$ então

$$w^* \lim_i (\delta_s \times f_i - f_i) = \delta_s \times m - m = 0.$$

Dessa forma $(\delta_s \times f_i - f_i)$ converge fracamente para 0 em $l_1(G)$.

Tome um subconjunto finito $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ de G , e B o fecho do convexificado de $\{(\delta_{s_j} \times f_i - f_i)_{1 \leq j \leq n} : i \in I\}$ em $l_1(G)^n$, temos pelo Teorema de Hanh Banach, V.1.5 [2], que 0 pertence a B e dessa forma podemos tomar uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nesse conjunto tal que para todo $s \in G$ vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_s \times f_n - f_n\|_1 = 0$.

Tomemos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $h_n = f_n^{1/2}$ função positiva de $l_2(G)$. Note que

$$\|h_n\|_2 = \left(\sum_{s \in G} h_n(s)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{s \in G} |f_n(s)| \right)^{1/2} = (\|f_n\|_1)^{1/2} = 1.$$

Como a desigualdade $|a - b|^2 \leq |a - b| |a + b| = |a^2 - b^2|$ é válida para a e b positivos, então para todo $t \in G$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_t h_n - h_n\|_2^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in G} |h_n(t^{-1}s) - h_n(s)|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in G} |f_n(t^{-1}s) - f_n(s)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_t \times f_n - f_n\|_1 = 0 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda_t h_n, h_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\langle \lambda_t h_n, h_n \rangle + \frac{1}{2} \|\lambda_t h_n - h_n\|_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\lambda_t h_n\|_2^2 + \|h_n\|_2^2) = 1. \end{aligned}$$

Dessa forma podemos definir a função $\phi_n : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dada por $\phi_n(t) = \langle \lambda_t h_n, h_n \rangle$. E esta será uma função positiva definida tal que $\phi(e) = 1$, ou seja, $\phi \in P_1(G)$. Além disso, ϕ tem suporte finito, já que h_n também o tem, e converge pontualmente para 1.

Seja $\phi \in P(G)$ então pelo lema (4.8) sabemos que $\phi\phi_n$ pertence a $P(G)$ e como ϕ_n tem suporte finito e o produto $\phi\phi_n$ é pontual então, $\phi\phi_n$ também tem suporte finito.

Pelo lema (4.9) sabemos que existe $\xi_n \in l_2(G)$ tal que $\phi\phi_n(s) = \langle \lambda_s \xi_n, \xi_n \rangle$ com $\|\xi_n\|_2 = 1$. E como ϕ_n converge pontualmente para 1 então, $\phi\phi_n$ converge pontualmente para ϕ .

Mas para todo $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{s_i}$ em $k(G)$, temos

$$\begin{aligned} \phi(f^* \times f) &= \sum_{s \in G} \phi(s)(f^* \times f)(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in G} \phi(s) \phi_n(s)(f^* \times f)(s) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda(f^* \times f) \xi_n, \xi_n \rangle \leq \| \lambda(f^* \times f) \| = \| \lambda(f) \|^2, \end{aligned}$$

mas como já sabemos que $\| \lambda(f) \| \leq \| f \|$ então, $\| \lambda(f) \| = \| f \|$, ou seja, λ é uma representação fiel de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ e por conseqüência $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C} \simeq G \rtimes_{\alpha r} \mathbb{C}$.

■

Teorema 4.13 *Se a representação regular λ , da C^* -álgebra $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$, é fiel então, o grupo G utilizado na construção de $G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}$ é mediável.*

Demonstração: Como a representação λ é fiel então, pela proposição (4.10) sabemos que $\overline{co(F)}^{w*} = S(G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C})$, onde

$$F = \{f \in S(G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C}) : f(x) = \langle \lambda(x) \xi, \xi \rangle, \xi \in l_2(G), x \in G \rtimes_{\alpha} \mathbb{C} \text{ e } \|\xi\|_2 = 1\}.$$

Com isso, sabemos que podemos aproximar $\mathbf{1}$, ou melhor o funcional definido por $\mathbf{1}$, por elementos do tipo $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \lambda_t \xi_i, \xi_i \rangle$ com $\xi_i \in l_2(G)$ e $\|\xi_i\|_2 = 1$. Podemos supor ainda $\xi_i \in K(G)$ já que $K(G)$ é denso, na norma, em $l_2(G)$. Tomemos $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{1/2} \xi_i$ (observe que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ e portanto $\|\eta\|_2 = \|\xi_i\|_2 = 1$) e dessa forma teremos

$$\langle \lambda_t \eta, \eta \rangle \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Mas para $\tilde{\eta}(t) = \overline{\eta}(t^{-1})$, temos

$$\langle \lambda_t \eta, \eta \rangle = \sum_{s \in G} \eta(t^{-1}s) \overline{\eta}(s) = \sum_{s \in G} \eta(s) \overline{\eta}(ts) \sum_{s \in G} \eta(s) \tilde{\eta}(s^{-1}t^{-1}) = \eta \times \tilde{\eta}(t^{-1})$$

ou seja, existe uma rede $(\eta_i)_{i \in I}$ em $k(G)$ que converge fraca* para $\mathbf{1}$ e com os elementos η com suporte finito.

Como η pertence a esfera unitária de $l_2(G)$ podemos tomar $\gamma = |\eta|^2$ e teremos $\gamma \in S(G)$ que para cada $t \in G$ nos dá

$$\begin{aligned} \|\gamma - \lambda_t \gamma\|_1 &= \sum_{s \in G} ||\eta(s)|^2 - |\eta(t^{-1}s)|^2| \\ &= \sum_{s \in G} |\eta(s) - \eta(t^{-1}s)| |\eta(s) + \eta(t^{-1}s)| = |\langle \eta + \lambda_t \eta, \eta - \lambda_t \eta \rangle| \\ &\leq 2\|\eta - \lambda_t \eta\|_2 = 2 \left(2 + \langle \eta, \lambda_t \eta \rangle - \langle \lambda_t \eta, \eta \rangle \right)^{1/2} \\ &\leq 2\sqrt{2}|1 - \langle \lambda_t \eta, \eta \rangle|^{1/2} = 2\sqrt{2}|1 - \eta \times \tilde{\eta}(t)|^{1/2}. \end{aligned}$$

E assim dado $\epsilon > 0$, para todo $t \in G$ existe $\gamma \in S(G)$ tal que $\|\gamma - \lambda_t \gamma\|_1 < \epsilon$.

Tomemos a rede I de pares (C, ϵ) onde C é finito e $\epsilon > 0$. Para cada $i \in I$ escolhemos $\gamma_i \in S(G)$ tal que $\|\lambda_t \gamma_i - \gamma_i\|_1 < \epsilon$ para todo $t \in C$. Consideremos m_i estados de $l_\infty(G)$ dados por $m_i(f) = \sum_{s \in G} f(s) \gamma_i(s)$, $\forall f \in l_\infty(G)$. Então para cada $t \in C$ teremos

$$\begin{aligned} |m_i(\lambda_t^{-1} f - f)| &= \left| \sum_{s \in G} (f(ts) - f(s)) \gamma_i(s) \right| = \left| \sum_{s \in G} f(ts) \gamma_i(s) - f(s) \gamma_i(s) \right| \\ &= \left| \sum_{s \in G} f(s) \gamma_i(t^{-1}s) - f(s) \gamma_i(s) \right| = \left| \sum_{s \in G} f(s) (\gamma_i(t^{-1}s) - \gamma_i(s)) \right| \\ &\leq \sum_{s \in G} |f(s)| |\gamma_i(t^{-1}s) - \gamma_i(s)| \leq \|f\|_\infty \sum_{s \in G} |\gamma_i(t^{-1}s) - \gamma_i(s)| \\ &= \|f\|_\infty \|\lambda_t \gamma_i - \gamma_i\|_1 < \|f\|_\infty \epsilon. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que todo limite fraco* de rede formada pelos elementos m_i é um estado invariante à esquerda de $l_\infty(G)$, observemos que este limite existe já que a rede esta contida no conjunto dos estados de $l_\infty(G)$ que é compacto. Dessa forma encontramos um estado $m \in l_\infty(G)^*$ que é invariante à esquerda, e pela definição o grupo G é mediável. ■

Com isto, teorema (4.12) e (4.13), podemos concluir que a representação λ , da C^* -álgebra $G \rtimes_\alpha \mathbb{C}$, é fiel se, e somente se, o grupo G utilizado na construção do produto cruzado $G \rtimes_\alpha \mathbb{C}$ é mediável.

4.4 O Produto Cruzado de um Grupo Mediável Discreto por uma C^* -álgebra qualquer

O que vamos fazer nesta seção é extremamente parecido com o que foi desenvolvido na seção anterior com a dificuldade de que agora a C^* -álgebra do produto cruzado utilizado é uma C^* -álgebra A qualquer e por este motivo teremos que redefinir, ou melhor, estender algumas definições para este caso.

Definição 4.14 *Seja $\{A, G, \alpha\}$ um C^* -sistema dinâmico a aplicação $\phi : G \rightarrow A^*$ é denominada positiva definida se*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(s_i^{-1} s_j)(\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^* x_j)) \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; s_i e $s_j \in G$ e $1 \leq i, j \leq n$.

Definimos ainda o conjunto $P(G, A)$ como o conjunto de todas as ϕ positivo definidas desse C^* -sistema dinâmico e $P_1(G, A)$ como o conjunto das $\phi \in P(G, A)$ tais que $\|\phi(e)\| = 1$.

Sendo assim, podemos definir uma relação entre as $\phi \in P(G, A)$ e os funcionais lineares $\Phi \in (G \rtimes_{\alpha} A)^*$, como na seção anterior, da seguinte forma

$$\phi(t)(x) = \Phi(xu_t) \quad \forall t \in G \text{ e } \forall x \in A.$$

E com isto temos uma interessante bijeção entre $P_1(G, A)$ e $S(G \rtimes_{\alpha} A)$.

Lema 4.15 *A relação entre $\phi \in P_1(G, A)$ e $\Phi \in S(G \rtimes_{\alpha} A)$, indicada acima, é bijetiva.*

Demonstração: Para cada $\phi \in P_1(G, A)$ definimos Φ , um funcional linear sobre $k(G, A)$, por $\Phi(\sum_{i=1}^n x_i u_{s_i}) = \sum_{i=1}^n \phi(s_i)(x_i)$, temos então, para $f = \sum_{i=1}^n x_i u_{s_i} \in k(G, A)$

$$\begin{aligned} \Phi(f^* \times f) &= \Phi\left(\sum_{j=1}^n u_{s_j}^* x_j^* \times \sum_{i=1}^n x_i u_{s_i}\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{s_i}^* x_i^* x_j u_{s_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi(u_{s_i}^* x_i^* x_j u_{s_j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi(\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^*) u_{s_i^{-1}} x_j u_{s_j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi(\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^*) \alpha_{s_i^{-1}}(x_j) u_{s_i^{-1}} u_{s_j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi(\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^* x_j) u_{s_i^{-1}} u_{s_j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(s_i^{-1} s_j) (\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^* x_j)) \geq 0,
\end{aligned}$$

assim Φ é um funcional linear positivo, e analogamente ao que fizemos na seção anterior podemos mostrar que é contínuo. Temos também $\|\Phi\| = \|\phi(e)\| = 1$. Podemos então estendê-lo continuamente para $l_1(G, A)$ tornando-o uma funcional linear positivo de $l_1(G, A)$ com norma 1 e novamente estendê-lo a $G \rtimes_{\alpha} A$ continuamente de tal forma que $\Phi \in S(G \rtimes_{\alpha} A)$.

Ao contrário, dado $\Phi \in S(G \rtimes_{\alpha} A)$ definimos $\phi(t)(x) = \Phi(xu_t)$ e da mesma forma teremos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(s_i^{-1} s_j) (\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^* x_j)) = \Phi(f^* \times f) \geq 0$$

e portanto ϕ é positivo definida e ainda $\|\phi(e)\| = \|\Phi\| = 1$. Com isto concluímos que esta relação é bijetiva. ■

Lema 4.16 *Se $v \in P_1(G)$ e $\phi \in P_1(G, A)$ então o produto ϕv está em $P_1(G, A)$, onde $\phi v(t) = \phi(t)v(t)$, para todo $t \in G$.*

Demonstração: Observemos que $\phi v : G \rightarrow A^*$ está bem definida e também $\|\phi v(e)\| = \|\phi(e)v(e)\| = \|\phi(e)\| \|v(e)\| = 1$. Sejam $\{s_i\}$ um conjunto com n elementos de G e $\mathcal{A}$ a matriz com elementos $a_{ij} = \phi(s_i^{-1} s_j) (\alpha_{s_i^{-1}}(x_i^* x_j))$ e $\mathcal{B}$ uma outra matriz com elementos $b_{ij} = v(s_i^{-1} s_j)$.

Ambas as matrizes são positivas porque dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ um elemento de $\mathbb{C}^n$ temos

$$\langle \mathcal{A}\alpha, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(s_i^{-1} s_j) (\alpha_{s_i^{-1}}((\alpha_i x_i)^* (\alpha_j x_j))) \geq 0$$

e

$$\langle \mathcal{B}\alpha, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_i} v(\alpha_{s_i^{-1} s_j}) \geq 0.$$

Portanto, se tomarmos o produto pontual dessas matrizes (produto de Schur) como na seção anterior teremos uma matriz $\mathcal{M}$ também positiva, e portanto ϕv é uma função positivo definida e que pertence a $P_1(G, A)$.

■

Lema 4.17 *Toda função positiva definida $\phi \in P_1(G, A)$ com suporte compacto, finito, pode ser escrita como um produto interno $\langle \tilde{\pi}_u \times \lambda(x)\xi, \eta \rangle$, com ξ e η em $l_2(G, H_u)$, $x \in G \rtimes_{\alpha} A$ e $\tilde{\pi}_u \times \lambda$ a representação regular de $G \rtimes_{\alpha} A$.*

Demonstração: Seja $\Phi \in S(G \rtimes_{\alpha} A)$ e ϕ seu correspondente em $P_1(G, A)$ então tomemos $\psi = \phi(e)$ um funcional de A logo

$$\begin{aligned} |\phi(t)(\alpha_t(x))|^2 &= |\Phi(\alpha_t(x)u_t)|^2 = |\Phi(u_t x)|^2 \leq \Phi(u_t^* u_t) \Phi(x^* x) \\ &\leq \Phi(x^* x) = \phi(e)(x^* x) = \psi(x^* x), \end{aligned}$$

ou seja, ψ é um funcional positivo e pela construção de GNS temos a representação $(\pi_{\psi}, H_{\psi}, \xi_{\psi})$ de A . Pelo Teorema de Riesz para cada $t \in G$ existe um único $\xi_t \in H_{\psi}$ tal que

$$\phi(t)(\alpha_t(x)) = \langle \pi_{\psi}(x)\xi_{\psi}, \xi_t \rangle$$

a função $\eta : t \mapsto \xi_t$ tem suporte finito, já que Φ também tem, é fraca* contínua (G é discreto) e portanto pertence a $l_2(G, H_{\psi})$.

Tomemos $f_i \in k(G)$ e $y \in k(G, A)$, logo

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\pi}_{\psi} \times \lambda(y)(f_i \otimes \xi_{\psi}), \eta \rangle &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \pi_{\psi} \left(\alpha_{t_i^{-1}}(y(s_j)) \right) f_i(s_j^{-1} t_i) \xi_{\psi}, \xi_{t_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \pi_{\psi} \left(\alpha_{t_i^{-1}}((y \times f_i)(t_i)) \right) \xi_{\psi}, \xi_{t_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \phi(t_i)((y \times f_i)(t_i)) = \Phi(y \times f_i). \end{aligned}$$

E assim temos $\Phi(y \times f_i)$, para um y qualquer, contido em $(\tilde{\pi}_u \times \lambda, l_2(G, H_u))$ e tomando-se f_i uma aproximação da unidade teremos $y \times f_i \rightarrow y$ fortemente e por consequência

$$\Phi(y) = \lim_{f \text{ forte}} \Phi(y \times f_i) = \langle (\tilde{\pi}_u \times \lambda)(y)\xi, \eta \rangle.$$

■

Teorema 4.18 *Se G é um grupo mediável então a representação regular $\tilde{\pi}_u \times \lambda$, de $G \rtimes_\alpha A$, é fiel e como consequência $G \rtimes_\alpha A \simeq G \rtimes_{\alpha r} A$.*

Demonstração: Pela demonstração do Teorema 4.12 sabemos que para todo $n \geq 1$ existe $\phi_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ positivo definida com suporte finito e que converge pontualmente para **1**. Tomemos uma ϕ em $P(G, A)$ qualquer então, pelo lema 4.16, sabemos que $\phi_n \phi \in P(G, A)$, que $\phi_n \phi$ convergem pontualmente para ϕ e também $\phi_n \phi$ tem suporte finito. Mas por 4.17 sabemos que $\phi_n \phi$ pode ser escrita como $\langle \tilde{\pi}_u \times \lambda(x)\xi, \eta \rangle$ com ξ e $\eta \in l_2(G, H_u)$, ou seja, podemos aproximar pontualmente qualquer $\phi \in P(G, A)$ através de elementos da forma $\langle \tilde{\pi}_u \times \lambda(x)\xi, \eta \rangle$.

Com um caminho análogo ao da primeira parte da demonstração da Proposição 4.10 podemos concluir que $\tilde{\pi}_u \times \lambda$ é fiel, isto é, pelo que vimos acima dado o conjunto $E = \{f \in S(G \rtimes_\alpha A) : f(x) = \langle \tilde{\pi}_u \times \lambda(x)\xi, \eta \rangle, \xi, \eta \in l_2(G, H_u), x \in G \rtimes_\alpha A \text{ e } \|\xi\|_2 = \|\eta\|_2 = 1\}$ sabemos que $\overline{\text{co}\{E\}} = S(G \rtimes_\alpha A)$. Supondo que exista $x \in G \rtimes_\alpha A$, não nulo, tal que $\tilde{\pi}_u \times \lambda(x) = 0$, pelo Teorema de Hanh Banach existe $f \in \hat{S}(G \rtimes_\alpha A)$ tal que $f(x^*x) \neq 0$ e, como sabemos, existe $(\mu_i)_{i \in I} \subset E$ tal que $\mu_i \xrightarrow{w^*} f$ e assim $\mu_i(x^*x) \rightarrow f(x^*x)$, mas $\tilde{\pi}_u \times \lambda(x^*x) = 0$ logo $\mu_i(x^*x) = 0$ uma contradição, já que $f(x^*x) \neq 0$ e com isso mostramos que $\tilde{\pi}_u \times \lambda$ é fiel e portanto $G \rtimes_\alpha A \simeq G \rtimes_{\alpha r} A$.

■

Com o que acabamos de provar podemos dar exemplos de Produtos Cruzados Reduzidos, que não foram dados no capítulo anterior, mas que serão vistos agora de uma maneira mais simples.

Exemplo 4.19 : $\mathbb{Z}_n \rtimes_\alpha C(\mathbb{Z}_n) \simeq M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha r} C(\mathbb{Z}_n)$

Com o que foi visto em (3.16), sabemos que

$$\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} C(\mathbb{Z}_n) \simeq M_n(\mathbb{C}).$$

Mas como o grupo $\mathbb{Z}_n$ é mediável (compacto) então pelo teorema anterior podemos concluir que

$$\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha r} C(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} C(\mathbb{Z}_n) \simeq M_n(\mathbb{C})$$

Exemplo 4.20 : $\mathcal{A}_{\theta} = \mathbb{Z} \rtimes_{\tau_{\theta}} C(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z} \rtimes_{\tau_{\theta} r} C(\mathbb{T})$

Assim como no exemplo anterior, definimos $\mathcal{A}_{\theta}$, em (3.17), como sendo $\mathbb{Z} \rtimes_{\tau_{\theta}} C(\mathbb{T})$.

Mas como $\mathbb{Z}$ é mediável (comutativo) então pelo que foi visto em (4.18) sabemos que

$$\mathcal{A}_{\theta} = \mathbb{Z} \rtimes_{\tau_{\theta}} C(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z} \rtimes_{\tau_{\theta} r} C(\mathbb{T}).$$

Apêndice A

Integração de Funções a Valores Vetoriais

No decorrer deste trabalho o leitor já deve ter notado que muitas vezes estamos integrando funções cuja imagem não é necessariamente composta por valores escalares e sim, por valores vetoriais num espaço de Banach, Hilbert, etc.. Por este motivo destinamos este apêndice ao tratamento da integração de funções a valores vetoriais.

Existem alguns tipos diferentes de integrais, ou melhor algumas diferentes definições de integral, quando estamos tratando de funções cuja imagem está contida num espaço vetorial topológico. Podemos citar a que utiliza a definição de integral como limites de somas nestes espaços (assim como é definida a integral de Riemann para valores reais por exemplo), esta integral é também chamada de integral forte (ou Dunford 1), já que estas são obtidas através de limites fortes, como referência vide [7]. Também podemos citar a que iremos desenvolver aqui, chamada de integração fraca por estudar as integrais com o auxílio de funcionais lineares contínuos; para uma leitura mais aprofundada desse tipo de integração sugerimos [15]. Existem ainda outras definições como as de Bochner, Birkhoff e Dunford 2.

A teoria de integração que vamos desenvolver nesta sessão tratará das funções a valores em um espaço de Banach $\mathcal{A}$, mas pode ser generalizada a funções a valores em um espaço localmente convexo. A grande vantagem de trabalharmos particula-

rizando o contra-domínio dessas funções é o fato de que a integral fraca se torna equivalente a integral forte e abrangente em relação as integrais de Bochner e Birkhoff. Além disso, tratamos sempre da integração segundo uma medida de Radon μ (medida de Haar invariante à esquerda) sobre G grupo topológico localmente compacto e com funções f de G em $\mathcal{A}$ contínuas.

Definição A.1 (Integral de Pettis) *Uma função $f : G \rightarrow \mathcal{A}$, com G e $\mathcal{A}$ como acima, é dita fracamente integrável se $\phi \circ f \in L_1(G, \mu)$ para todo $\phi \in \mathcal{A}^*$. E ainda, se existir $a \in \mathcal{A}$ tal que*

$$\phi(a) = \int_G \phi \circ f d\mu \quad \forall \phi \in \mathcal{A}^*$$

então a é dita integral de f e escrevemos $a = \int_G f d\mu$.

Observe que, se existir, a é único já que $\mathcal{A}^*$ separa os pontos de $\mathcal{A}$. E ainda, as integrais assim definidas conservam várias das propriedades da integral para funções a valores escalares, propriedades essas como as algébricas da soma, do produto por escalar, etc.. Outra propriedade importante que é mantida é a da comutatividade da integral com funções lineares contínuas, vejamos.

Proposição A.2 *Sejam $f : G \rightarrow \mathcal{A}$ fracamente integrável e tal que $\int_G f d\mu$ existe, e T uma função linear contínua de $\mathcal{A}$ em um espaço de Banach $\mathcal{B}$ então, $\int_G T \circ f d\mu$ existe e satisfaz*

$$\int_G T \circ f d\mu = T \circ \int_G f d\mu.$$

Demonstração: Observe que $\phi \circ T \in \mathcal{A}^*$ sempre que $\phi \in \mathcal{B}^*$ e dessa forma

$$\phi \circ T \left(\int_G f d\mu \right) = \int_G \phi \circ T \circ f d\mu,$$

ou seja, $\int_G T \circ f d\mu$ existe e $\int_G T \circ f d\mu = T \circ \int_G f d\mu$.

■

Decorrem imediatamente da proposição anterior alguns resultados importantes como

Corolário A.3 *Seja $f : G \rightarrow B(H)$, G um grupo localmente compacto munido de uma medida de Radon μ , H um espaço de Hilbert e ξ um vetor de H então:*

$$\begin{aligned} i) \int_G f(s) d\mu(s) \xi &= \int_G f(s) \xi d\mu(s) \\ ii) \left(\int_G f(s) d\mu(s) \right)^* &= \int_G f(s)^* d\mu(s). \end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração destes fatos pode ser feita utilizando-se o auxílio das transformações lineares contínuas como

$$\begin{aligned} T_\xi : B(H) &\rightarrow H \\ a &\mapsto a\xi \end{aligned}$$

uma vez que T_ξ é linear e contínua, então por A.2

$$T_\xi \circ \int_G f(s) d\mu(s) = \int T_\xi \circ f(s) d\mu(s)$$

e assim,

$$\int_G f(s) d\mu(s) \xi = \int_G f(s) \xi d\mu(s).$$

A demonstração de *ii)* se faz da mesma forma tomando-se apenas uma outra transformação linear e contínua.

■

Teorema A.4 *Se $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach, μ uma medida de Radon sobre um grupo G localmente compacto e $f : G \rightarrow \mathcal{A}$ contínua e de suporte compacto então $\int_G f d\mu$ existe e pertence a $\mathcal{A}$. E ainda,*

$$\left\| \int_G f d\mu \right\| \leq \int_G \|f\| d\mu.$$

Demonstração: Devemos provar que existe a em $\mathcal{A}$ tal que

$$\phi(a) = \int_G \phi \circ f d\mu \quad \forall \phi \in \mathcal{A}^*$$

Tomemos $\Lambda = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \subset \mathcal{A}^*$ para um $n \in \mathbb{N}$ fixo qualquer. Seja E_Λ o conjunto de todos os a em $\mathcal{A}$ que satisfazem a igualdade acima para todos os ϕ_i de

Λ . Cada E_Λ é fechado, pela continuidade das ϕ_i , e também é compacto pois E_Λ é fechado e está contido em $\overline{\text{co}}(f(G))$ que é compacto, vide 3.25 de [16].

Se $E_\Lambda \neq \emptyset$ para todos os $E_\Lambda \subset \mathcal{A}^*$ possíveis, isto é, variando o índice n e os funcionais de E_Λ , então o conjunto de todos os E_Λ , subconjuntos finitos de $\mathcal{A}^*$, tem a propriedade da intersecção finita, ou seja, existe um $a \in \mathcal{A}$ satisfazendo a igualdade anterior para todo $\phi \in \mathcal{A}^*$. Portanto, basta mostrarmos que $E_\Lambda \neq \emptyset$ para um Λ qualquer.

Sejam $\phi_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, para $1 \leq i \leq n$ definimos $L = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ que é uma função de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^n$ e também $C = L(f(G))$. Seja $f : G \rightarrow \mathcal{A}$ podemos definir $m_i = \int_G \phi_i \circ f d\mu$, onde μ é uma medida de Radon que para K suporte compacto de f vale 1 (observe que μ existe por 2.16) e $1 \leq i \leq n$. Assim teremos $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ pertencente ao convexificado de C .

Seja $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ não pertencente ao convexificado de C então existem números reais $c_1, c_2, \dots, c_n$ (vide 3.4 de [16]) tais que

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i < \sum_{i=1}^n c_i t_i \quad \forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in C$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(f(s)) < \sum_{i=1}^n c_i t_i \quad \forall s \in G$$

integrando-se ambos os lados da igualdade e lembrando-se que $\mu(K) = 1$ teremos

$$\sum_{i=1}^n c_i m_i < \sum_{i=1}^n c_i t_i$$

e portanto $m \neq t$, ou seja m pertence ao convexificado de C . Como $C = L(f(G))$ e L é linear então, $m = L(x)$ com $x \in f(G) \subset \mathcal{A}$ e assim

$$\phi_i(x) = m_i = \int_G \phi_i \circ f d\mu \quad (1 \leq i \leq n),$$

ou seja, x pertence a E_Λ ($E_\Lambda \neq \emptyset$).

O que foi feito até o presente momento só comprova a existência deste tipo de integral para ϕ de A em $\mathbb{R}$, mas podemos observar que isto já implica na existência desta integral para valores complexos porque podemos tomar $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ com

$\phi = \phi_1 + i\phi_2$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são como no caso acima (de A em $\mathbb{R}$). Dessa forma $\phi \circ f : G \rightarrow \mathbb{C}$ com

$$\int_G \phi \circ f d\mu = \int_G \phi_1 \circ f d\mu + i \int_G \phi_2 \circ f d\mu.$$

E como as integrais $\int \phi_1 \circ f d\mu$ e $\int \phi_2 \circ f d\mu$ existem pelo que foi visto acima temos a existência da integral mesmo para o caso $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$.

Dessa maneira sabemos que de fato existe $a = \int_G f d\mu$ e pelo teorema de Hahn - Banach sabemos que existe um funcional $F \in \mathcal{A}^*$ tal que $F(a) = \|a\|$ e $|F(x)| \leq \|x\|$ para todo x em $\mathcal{A}$. Ou seja, $|F(f(t))| \leq \|f(t)\|$ para todo $t \in G$ e assim

$$\left\| \int_G f d\mu \right\| = \|a\| = F(a) = F\left(\int_G f d\mu\right) = \int_G F(f) d\mu \leq \int_G \|f\| d\mu$$

■

Para generalizarmos um pouco mais o teorema acima de tal forma que pudéssemos supor apenas a função f contínua e limitada, sem a necessidade do suporte compacto, enunciamos e demonstramos o próximo teorema.

Teorema A.5 *Seja A um espaço de Banach e μ uma medida de Radon sobre um grupo topológico localmente compacto G . Se $F : G \rightarrow A$ é contínua e limitada e f é uma função de $L_1(G, \mu)$ então, $\int_G f F d\mu$ ($f.F$ pontual, isto é, $f.F(s) = f(s)F(s)$ para todo $s \in G$) existe, pertence ao $\overline{\text{co}}(F(G))$ e também*

$$\left\| \int_G f.F d\mu \right\| \leq \sup_{s \in G} \|F(s)\| \int_G |f(s)| d\mu$$

Demonstração: Temos $f.F$ fracamente integrável pois, como $\phi \circ F$ é contínua e limitada temos $\phi \circ (f.F) = f.(\phi \circ F) \in L_1(G, \mu)$ para toda $\phi \in A^*$.

Como a medida μ é de Radon existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $K(G)$ que converge para f em $L_1(G, \mu)$ e também como F é limitada podemos tomar $M = \sup_{s \in G} \|F(s)\|$ e assim,

$$\int_G \|f_n(s)F(s) - f_m(s)F(s)\| d\mu(s) \leq M \int_G |f_n(s) - f_m(s)| d\mu(s) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

Então pelo teorema (A.4) a sequência $\left(\int_G f_n \cdot F d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em A e portanto existe um limite $r \in A$ para esta sequência.

Mas para todo $\phi \in A^*$ temos

$$\phi(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \left(\int_G f_n \cdot F d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \phi \circ (f_n \cdot F) d\mu$$

e

$$\int_G |\phi \circ (f_n \cdot F) - \phi \circ (f \cdot F)| d\mu \leq M \|\phi\| \int_G |f_n - f| d\mu \rightarrow 0,$$

ou seja, $r = \int_G f \cdot F d\mu$ com $r \in \overline{\text{co}}(F(G))$. E a desigualdade segue da desigualdade do teorema A.4 quando trocamos f por $f \cdot F$.

■

Outras propriedades semelhantes as de integração para funções a valores escalares também ocorrem quando estamos tratando desse tipo de integração, mas para não tornar este tópico muito extenso citaremos apenas mais uma delas referente ao Teorema de Fubini que será tratado pensando na integral dupla como uma iteração de duas integrais porque desta forma não precisaremos nos aprofundar ao ponto de trabalharmos mais detalhadamente com o produto de medidas, etc..

Teorema A.6 (Teorema de Fubini) *Sejam G um grupo topológico munido das medidas μ e ν de Radon, A um espaço de Banach e f uma função de $G \times G$ em A contínua e limitada. Então $\int_G \int_G f(s, t) d\mu(t) d\nu(s)$ e $\int_G \int_G f(s, t) d\nu(s) d\mu(t)$ existem e também vale*

$$\int_G \int_G f(s, t) d\mu(t) d\nu(s) = \int_G \int_G f(s, t) d\nu(s) d\mu(t).$$

Demonstração: A existência dessas integrais decorre de (A.5) já que $t \mapsto \int_G f d\mu(t)$ e $s \mapsto \int_G f d\nu(s)$ são funções contínuas e limitadas de G em A .

Sejam $a = \int_G \int_G f d\mu(t) d\nu(s)$, $b = \int_G \int_G f d\nu(s) d\mu(t)$, $p(s) = \int_G f d\mu(t)$ e também $q(t) = \int_G f d\nu(s)$ que pela definição de integral fraca e pelo Teorema de Fubini para funções a valores escalares satisfazem, para toda $\phi \in A^*$,

$$\begin{aligned}
\phi(a) &= \int_G \phi\left(\int_G f d\mu(t)\right) dv(s) = \int_G \phi(p(s)) dv(s) \\
&= \int_G \int_G \phi(f) d\mu(t) dv(s) = \int_G \int_G \phi(f) dv(s) d\mu(t) \\
&= \int_G \phi(q(t)) d\mu(t) = \int_G \phi\left(\int_G f dv(s)\right) d\mu(t) \\
&= \phi(b).
\end{aligned}$$

E pertanto,

$$\int_G \int_G f d\mu(t) dv(s) = \int_G \int_G f dv(s) d\mu(t).$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] C. Cerri, Certas deformações não-comutativas do toro e sua K -teoria, Tese de Doutorado, IME-USP, 1993.
- [2] J. B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer Verlag, 2^a ed., 1990.
- [3] K. R. Davidson, *C^* -Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, 1996.
- [4] J. Dixmier, *C^* -Algebras*, North Holland Mathematical Library, 1982.
- [5] S. Doplicher, D. Kastler e D. W. Robinson, Covariance algebras in field theory and statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.*, **3** (1966), 1 - 28.
- [6] R. S. Doran e V. A. Belfi, *Characterizations of C^* -álgebras (The Gelfand-Naimark Theorems)*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1986.
- [7] N. Dunford e J. T. Schwarz, *Linear Operator I*, Interscience New York, 1958.
- [8] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, 1995.
- [9] E. Hewitt e K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Spring Verlag, 2^a ed., 1963.
- [10] G. J. Murphy, *C^* -Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.
- [11] M. I. M. Oliveira, *C^* -álgebras associadas a homeomorfismos de espaços topológicos*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 1997.

- [12] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs (number 29), American Mathematical Society, 1988.
- [13] G. K. Pedersen, *C*- Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, 1979.
- [14] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer Verlag, 1989.
- [15] B. J. Pettis, On Integration in Vector Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 277-304.
- [16] W Rudin, *Functional Analysis*, MacGraw Hill, 1979.
- [17] G. Zeller-Meyer, Produits croisés d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. Math. Pures Appl.*, **47** (1968), 101 - 239.