MAT0315 - Lista 1 - Prof. David Pires Dias - 2023

Sequências (reais infinitas)

1. Refaça algumas demonstrações do capítulo de sequências infinitas de [GA1] como, por exemplo, as dos Teoremas 2.5, 2.7, 2.8, 2.12, 2.22, e 2.25.

2. Encontre exemplos de sequências com as seguintes propriedades (caso estas existam):

   (a) Estritamente crescente e que não seja crescente.
   (b) Estritamente decrescente e que não seja decrescente.
   (c) Crescente e que não seja estritamente crescente.
   (d) Decrescente e que não seja estritamente decrescente.
   (e) Que seja crescente e decrescente ao mesmo tempo.
   (f) Que seja estritamente crescente e estritamente decrescente ao mesmo tempo.
   (g) Convergente que possua uma subsequência que no convergente.
   (h) Divergente que possua uma subsequência convergente.
   (i) Limitada e convergente.
   (j) Limitada e não convergente.
   (k) Monótona e limitada que não converge.
   (l) Monótona e limitada que converge.
   (m) Convergente com lim $inf \neq$ lim sup.
   (n) Divergente com lim $inf \neq$ lim sup.
   (o) Divergente com lim $inf =$ lim sup.
   (p) Ilimitada e de Cauchy.
   (q) Divergente e de Cauchy.
   (r) Convergente e que não é de Cauchy.

3. Sejam $(a_n)_{n\in N}$ e $(b_n)_{n\in N}$ duas sequências em que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Encontre exemplos de sequências deste tipo que satisfazem as condições abaixo:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 5$.
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$, para $\alpha \in I\!R_+$.
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = \infty$.
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = -\infty$.
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = 0$.
   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = 1$.
   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = \alpha$, para $\alpha \in I\!R$.

4. Resolva os exercícios:

   - 3, 4, 5, 6, 8, 9, 14, 15, 16 e 18 da primeira seção e os exercícios 2, 4, 5, 6, 14, 18, 19, 22 e 23 da segunda seção do capítulo sobre sequências infinitas de [GA1].
   - (Se ainda sobrar fôlego) 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 17, 18 e 21 do Captulo IV de [EL1].

Séries Numéricas

5. Demonstre o critério da série-p utilizando o critério da integral.

6. Defina precisamente o que é uma série absolutamente convergente e o que é uma série condicionalmente convergente.

7. Prove que se a série de termos positivos $\sum a_n$ é convergente, então

   - $\sum (a_n)^2$ converge.
   - $\sum (a_n)^k$, para $k > 1$, converge.

8. Resolva os exercícios 1, 3, 4, 6, 8, 9 e 11 da primeira seção, os exercícios 3, 4 e 9 da segunda seção, 9 e 10 da terceira e os exercícios 1, 2, 3, 7 e 9 da quarta seção do capítulos sobre séries infinitas de [GA1].

9. Decida se as séries de termos positivos abaixo so convergentes ou no (usando o critério que julgar necessrio), no se esquea de justificar suas respostas.

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{logn}{n}$

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{logn}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-23n+9}{4n^3\ \sqrt{n+7}-2n+cos^3n^2}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-sen^2 3n}{2^n+n^2+1}$

   (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(logn)^n}$

   (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}logn}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$, $0 < a < 1$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n}$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$, $a > 0$

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{2^{n^2}}$, $a > 0$

   (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!(1-cosn^2)}{2.5.8...(3n-1)}$

   (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!(2+senn^2)}{3.5.7...(2n-1)}$

   (q) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

   (r) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

   (s) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

   (t) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$

10. Decida se as séries abaixo so convergentes ou no, justificando completamente suas respostas:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(3n)}{n^2+1}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosn-senn}{n\sqrt{n}}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+cosn}{\sqrt{n}(2+\sqrt{n})}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n} sen\left(\frac{1}{n}\right)$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{logn}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n!)^{\frac{-1}{2}} n^2 sen\left(\frac{1}{3n}\right)$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-(-3)^n}{(2n)!-n!}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!senn}{1.3.5...(2n-1)}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}cosn$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!cosn}{(n!)^3}$

11. Tente demonstrar sozinho os critérios de convergência para séries de termos positivos (da razão, da raiz e comparação, por exemplo).

Referências

[EL1] Lima, E. L. - Curso de Análise vol. 1, 10ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2000.

[GA1] Ávila, G. S. S. - Análise Matemática para a Licenciatura. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2001.