MAT0315 - Lista 0 - Prof. David Pires Dias - 2023

Funções, Famílias, Conjuntos (finitos e infinitos, enumeráveis e não-enumeráveis), Corpos Ordenados e Números Reais

1. Encontre $\bigcap\limits_{n\in N} A_n$ e $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$, nos seguintes casos:

   (a) $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$
   (b) $A_n =]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$
   (c) $A_n = [-\frac{n}{5}, 2n]$
   (d) $A_n = [-10n, 0]$
   (e) $A_n =]n-1, n[$
   (f) $A_n =]0, \frac{1}{n}[$

2. Encontre $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ e $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, nos seguintes casos:

   (a) $A_\lambda =]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[\;\;,\;\; \lambda \in]0,1[$
   (b) $A_\lambda =]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[\;\;,\;\; \lambda \in]0,1]$
   (c) $A_\lambda =]1-\frac{1}{\lambda}, 1+\frac{1}{\lambda}[\;\;,\;\; \lambda \in]0,2]$
   (d) $A_\lambda = [-\lambda, 10\lambda] \;\;,\;\; \lambda \in [-3,5]$

3. Seja $f : A \to B$ uma função qualquer e X,Y dois subconjuntos quaisquer de A. Demosntre que $f(X\cap Y) \subset f(X)\cap f(Y)$. Encontre um exemplo em que $f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$ não é válida. Demonstre que a igualdade é verdadeira sempre que a função f é injetora.

4. Exercícios similares ao anterior podem ser vistos nos exerccios 12, 13, 14, 15, 16 e 17 do captulo I do livro [EL1].

5. Demonstre que a composta de duas bijeções também é uma bijeção. E que a função inversa de uma função bijetora também é bijetora.

6. Demonstre que uma função possui inversa se, e somente se, é bijetiva.

7. Para as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo faça uma classificao quanto a injetividade, sobrejetividade, bijetividade e paridade (par e/ou ímpar).
   Obs.: Algumas delas podem ter o domínio menor que o descrito.

   (a) $x \mapsto x^4$
   (b) $x \mapsto e^x$
   (c) $t \mapsto \sqrt{t}$
   (d) $t \mapsto \frac{1}{t}$
   (e) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$
   (f) $x \mapsto arctg(x)$
   (g) $t \mapsto sen(t)$
   (h) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
   (i) $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

8. No exercício anterior encontre a função inversa as funções dadas e esboce seu gráfico (caso necessário, restrinja o domínio e/ou o contra-domínio a fim de obter uma função que possua inversa).

9. Explique com suas palavras porque a função $f(x) = x^2$ não possui função inversa, mas é normal nos depararmos com situações em que nos respondem que o inverso de x^2 é $\pm\sqrt{x}$.

10. Encontre uma bijeção entre os conjuntos, se for possível:

    (a) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$
    (b) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$
    (c) $\mathbb{R}$ e $]0,1[$
    (d) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$
    (e) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$
    (f) $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$
    (g) $\mathbb{N}$ e $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
    (h) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{1,2\}$
    (i) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\emptyset$
    (j) $\mathbb{R}$ e $]a,b[$
    (k) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$ (Conj. dos pares positivos.)

11. Demonstre que um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre X e uma parte própria de X. (esta também pode ser uma definição para conjuntos infinitos).

12. Defina com suas próprias palavras o que é um conjunto enumerável e um não-enumerável. Encontre alguns exemplos de tais conjuntos justificando rigorosamente suas respostas.

13. Obtenha uma decomposição de $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, em que A_i são conjuntos infinitos e dois-a-dois disjuntos.

14. Prove que:

    (i) $\sqrt{2}$ não é um número racional;

    (ii) $\sqrt{p}$, para p um número primo, também não é racional;

    (iii) $\sqrt[3]{5^2}$ não é um número racional.

    com base nas demonstrações anteriores, podemos afirmar que $\sqrt[m]{p^n}$, para p primo e $m \neq n$ naturais maiores do que 2, não é um numero racional?

15. Mostre que $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, conjunto dos números irracionais, não é corpo.

16. Demonstre que apesar de $\mathbb{C}$ ser corpo, este não é um corpo ordenado.

17. Demonstre que num corpo ordenado $\mathbb{K}$, temos

    (a) $x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$;

    (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = z = 0$;

    (c) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

18. Dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$, defina precisamente a completude de $\mathbb{K}$ (em outras palavras, defina o que quer dizer $\mathbb{K}$ ser completo). Utilizando tal definição prove que $\mathbb{Q}$ não é um corpo ordenado completo.

19. Prove que se um subconjunto A, de um corpo ordenado $\mathbb{K}$, possui mínimo, então este também é o ínfimo de A. Dê um exemplo de que a recíproca não vale.

20. Pense nos exercícios:

    (a) 9, 10, 11, 19 e 22 do capítulo II do livro [EL1];

    (b) 2, 3, 8, 11, 12, 14, 48, 50 e 57 do captulo III do livro [EL1].

    (c) do capítulo I de [GA1].

    Se quiser, puder e tiver tempo também pode resolver os exercícios 1, 4, 5, 10, 16, 27, 28, 29, 30, 32 e 33 do captulo III de [EL1] e alguns do capítulo I de [GA1].

Referências

[EL1] Lima, E. L. - Curso de Análise vol. 1, 10ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2000.

[GA1] Ávila, G. S. S. - Análise Matemática para a Licenciatura. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2001.