MAT0315 - Prática como componente Curricular TBA
Prof. David Pires Dias - 2023 - Entrega até 02/10/23

Exercício 1 *I. Construa a série de Taylor da função* $f(x) = ln(x+1)$ *em torno de* $x = 0$.

II. Encontre o raio de convergência dessa série de potência.

III. Avalie o que ocorre nos extremos do intervalo de convergência.

IV. Observe que

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \dots \quad .$$

V. E que manipulando podemos obter

$$\frac{3}{2} ln(2) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \dots \quad .$$

Observação 1 *Cabe salientar que o exemplo anterior só ocorre pois, no extremo do intervalo de convergência a série não é absolutamente convergente, isto é, a série* $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é condicionalmente convergente e portanto não é comutativamente convergente.*

Exercício 2 *I. Defina as funções* s *e* c *pelas séries de potência dadas por*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad e \qquad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

II. Verifique, utilizando o raio de convergência, que ambas podem ser definidas em toda a reta real.

III. Prove que $s^2(x) + c^2(x) = 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

IV. Defina $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas pela séries de potência acima e verifique que:*

a) $s'(x) = c(x)$ *b)* $c'(x) = -s(x)$ *c)* $s(0) = 0$ *e* $c(0) = 1$

V. Suponha que existam funções S *e* C *definidas em* $\mathbb{R}$ *satisfazendo as condições do item anterior, prove que* $s(x)C(x) - S(x)c(x) = 0$ *e* $s(x)S(x) + c(x)C(x) = 1$ *e que portanto* $s = S$ *e* $c = C$.

VI. Prove que $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$.

Observação 2 *O exercício anterior exibe que as funções seno (s) e cosseno (c) são as únicas que satisfazem as propriedades do item IV (e que podem ser definidas por tais propriedades). Além disso, que a partir de algumas poucas propriedades podemos provar muitos outros resultados de trigonometria.*

;)