MAT0315 - Prática como componente Curricular T2A
Prof. David Pires Dias - 2023 - Entrega até 02/10/23

O objetivo desta atividade é o de provar que um número é racional se, e somente se, possui representação decimal finita ou periódica, além de observar e refletir sobre como tal conceito aparece em livros didáticos da Educação Básica.

Habitualmente se define o conjunto dos racionais, $\mathbb{Q}$, como sendo aquele formado pelo elementos (números) da forma $\frac{a}{b}$, como a e b inteiros e $b \neq 0$, isto é, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$[1]. E ao se efetuar a divisão, utilizando o sistema decimal, atribui-se pelo menos uma nova representação a cada um desses números racionais, chamada de representação decimal.

Comumente, na educação básica, diz-se que *todo número racional possui representação decimal finita ou infinita e periódica* sem maiores explicações. Tal fato pode gerar questionamentos, como por exemplo:

I. A representação fracionária não é única, vide as frações equivalentes, a representação decimal é única?

II. Por que alguns racionais possuem representação finita e outros infinita e periódica? Existe alguma relação entre tais representações?

III. Todo número racional possui representação decimal finita ou periódica, mas e a recíproca, isto é, se um número possui representação decimal finita ou periódica, então é racional?

IV. Se a resposta da questão anterior é afirmativa, então por que não enunciá-la sempre e se não é porque existem exercícios que são resolvidos com tal recíproca?

Para tentar entender tais perguntas e discutir sobre como tratá-las vamos resolver antes alguns problemas

Problema 1 *Um número racional possui representaçao decimal finita se, e somente se, quando escrito na forma irredutível possui em seu denominador um inteiro cuja decomposição em primos possui apenas os fatores* 2 *e* 5.

<u>Sugestão:</u> Para $q \in \mathbb{Q}$ escreva $q = n, n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$, logo $q = \frac{n}{2^0 5^0} + \frac{n_1 n_2 \ldots n_k}{2^k 5^k}$. Reciprocamente temos $q = \frac{a}{b}$, com $b = 2^\alpha 5^\beta$, logo $q = \frac{a}{2^\alpha 5^\beta}$ e multplicando numerador e denominador por $5^{\alpha-\beta}$, se $\alpha \geqslant \beta$, ou $2^{\beta-\alpha}$ caso contrário, teremos a representação decimal finita.

Corolário 2 *Um número racional possui representação decimal infinita se, e somente se, quando escrito na forma irredutível possui em seu denominador um inteiro cuja decomposição em primos possui um fator diferente de* 2 *e* 5.

Problema 3 *Um número racional como o do corolário anterior, cuja representação decimal é infinita, é uma dízma periódica, isto é, possui representação decimal infinita e periódica a partir de algum termo de tal representação.*

[1] Cabe observar que já desta forma, dada pela própria definição, não existe unicidade na representação de cada elemento

Sugestão: Sabe-se a priori (corolário) que a representação é infinita, para $q = \frac{a}{b}$ efetua-se a divisão sempre por b, logo termos $r_0 \neq 0$ o resto da divisão de a por b, $r_1 \neq 0$ o resto da divisão de r_0 por b e assim sucessivamente, sempre com $0 < r_k < b$, Assim após b iterações desse processo teremos a certeza da repetição dos termos (note que tal repetição pode aparecer antes) e portanto a periodicidade da representação.

Problema 4 *(i) Uma dízima periódica é uma representação decimal de um número racional.*

(ii) Um número com representação decimal finita é a representação de um número racional.

Sugestão: Basta escrever a fração que da origem ao número. Cuidado com o rpocesso utilizado no caso da dízima periódica.

Unindo as informações dos problemas anteriores provamos que

Teorema 5 *Um número é racional se, e somente se, possui representação decimal finita ou infinita e periódica.*

Observação 6 *Um dos fato que causa bastante estranheza aos estudantes é o de que* $1 = 0,999\ldots$*, e uma consequência do entendimento disso é a de que todo número, cuja representação decinal é finita, possui também um representação infinita e periódica. Isto é, a representação decimal não é única nesses casos.*

No entanto a representação decimal infiita e periódica de um número racional é única e portanto podemos enunciar o teorma anterior de uma outra forma, a saber

Teorema 7 *Um número é racional se, e somente se, possui uma representação decimal infinita e periódica.*

;)