Trabalho 1 - Prof. David Pires Dias - 2023

Neste trabalho vamos utilizar um exemplo de sequência recorrente que servirá para elucidar vários aspectos distintos do que estamos estudando, tanto aspectos matemáticos quanto aspectos didático-pedagógicos. Vamos ao exemplo.

Exemplo 1 *Seja* $(a_n)_{n\in N}$ *a sequência em que* $a_1 = \sqrt{2}$ *e* $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Observe que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, etc. Tal propriedade fez com que essa sequência, ou melhor, uma referência ao limite dessa sequência fosse mencionada em alguns livros didáticos da educação básica ou mesmo revistas voltadas a professores de Matemática como sendo $\boxed{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}}$.

Já que há referência ao limite de $(a_n)_{n\in N}$, precisamos primeiro provar que ele existe, isto é, que a sequência é convergente.

Problema 1 (Convergência) *Demonstre que a sequência* $(a_n)_{n\in N}$ *é crescente e limitada e portanto convergente.*

Utilizando o fato que a sequência $(a_n)_{n\in N}$ converge, vamos calcular seu limite.

Problema 2 (Limite) *Prove que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Com a informação de que a sequência em questão converge para 2, alguns livros didáticos apresentam exercícios em que se pede a demonstração de que $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}} = 2$, muitas vezes tais exercícios apresentam sugestões, ou mesmo, soluções como a descrita a seguir.

Solução: Supondo $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}$, elevando ambos os membros ao quadrado teremos

$$x^2 = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}} = 2 + x,$$

logo $x^2 - x - 2 = 0$ e portanto $x = -1$ ou $x = 2$, mas como $x > 0$, temos $x = 2$, ou seja

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}} = 2.$$

$\blacksquare$

Observe que para resolver o exercício apresentado, como sugerido, o aluno precisa saber de antemão que a sequência $(a_n)_{n\in N}$ é convergente, isto é, que seu limite existe e é um número real. Caso contrário estaríamos introduzindo conceitos falaciosos durante a resolução em questão.

Problema 3 *Sem a discussão de que a sequência* $(a_n)_{n\in N}$ *é convergente o exercício anterior e sua solução podem sucitar uma série de equívocos conceituais em alunos da Educação Básica, descreva alguns deles e que problemas estes podem gerar.*

Um outro aspecto interesssante dessa sequência é o de que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \notin \mathbb{Q}$, mas seu limite $2 \in \mathbb{Q}$ (ou mais precisamente $2 \in \mathbb{N}$), ou seja, estamos portanto apresentando um exemplo de uma sequência de números irracionais que convergem para um racional.

Problema 4 *Prove que $a_n \notin \mathbb{Q}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

O que será que aconteceria se na sequência do Exemplo 1, ao invés de 2 tivéssemos outro número $a > 0$, isto é, se definíssemos $(x_n)_{n \in N}$, em que $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5 *Verifique se e para quais valores de a a sequência $(x_n)_{n \in N}$ é convergente e nesses casos calcule qual o seu limite.*