Trabalho 1 - Prof. David Pires Dias - 2023

A intenção deste trabalho é a de mostrar que a constante matemática e, também conhecida como número de Euler, é um dos muitos exemplos da necessidade de construção (formalização) dos números reais.

Utilizando a série de Taylor da função exponencial, pode-se observar que $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Sendo assim, a constante e pode ser vista como o limite de uma sequência de números racionais, já que $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, em que $s_n \in \mathbb{Q}$ são as somas parciais da série dada, isto porque são somas finitas de números racionais e portanto racionais.

No entanto, utilizando essa mesma série podemos demonstrar que e não é racional (mesmo sendo, nesse caso, obtida pelo limite de uma sequência de números racionais).

Para demonstar os fatos acima descritos vamos admitir que a série de Taylor, centrada na origem, da função exponencial é dada por $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, logo $e = e^1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Problema 1 *Verifique a afirmação anterior.*

Suponha, por absurdo, que e é racional, isto é, $e = \frac{p}{q}$, com p inteiro e q inteiro maior do que um[1].

Problema 2 *Prove que* $\alpha = q!\left(e - \sum\limits_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right)$ *é um número inteiro maior do que zero.*

Observe que para qualquer inteiro $n > q$ temos

$$\frac{q!}{n!} = \frac{1}{(q+1)(q+2)\dots(q+(n-q))} \leqslant \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$$

Problema 3 *Verifique que*

$$\alpha = q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^i} = \frac{1}{q} < 1.$$

Dos dois problemas anteriores concluímos que α é um inteiro maior que zero e menor do que 1, o que é um absurdo, portanto nossa suposição de que e é um número racional não é verdadeira, ou seja e é irracional.

[1] Podemos supor que $q > 1$, pois para $q = 1$ teríamos $e = p \in \mathbb{Z}$, além disso, não é difícil mostrar que $2 < e < 3$, isto é, $e \notin \mathbb{Z}$. Verifique!