MAT0315 - Lista 2 - Prof. David Pires Dias - 2023

Limite e continuidade de funções

1. Analise as demonstrações sobre limites, como as dos teoremas 1, 3, 4, 5 e 7 e seus corolários, do capítulo VI do livro [EL1] e depois, se pertinente, reinterprete-as para limites laterais, limites infinitos e limites no infinito tentando demonstrá-las. Observe também a demonstração do teorema 11 deste mesmo capítulo.

   Além disso, analise também algumas demonstrações, como as dos teoremas 2, 3, 5, 12, 14 e 17 e seus corolários, do capítulo VII desse mesmo livro ([EL1]).

2. Calcule os limites abaixo, se existirem, utilizando o rigor necessário (dado pela definição).

   (a) $\lim_{x\to 2} (5x-3)$ (c) $\lim_{x\to 4} (x^2-6)$ (e) $\lim_{x\to e} ln(x)$ (g) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x-4}$

   (b) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2$ (d) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+6}$ (f) $\lim_{x\to 0} e^x$ (h) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

3. Calcule os limites abaixo, se existirem, justificando sua resposta:

   (a) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)}{x}$ (i) $\lim_{x\to 0^-} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (m) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0^-}\frac{sen(x)}{x}$ (j) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x}$ (n) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (c) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ (g) $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (k) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{1+e^x}$ (o) $\lim_{x\to\infty} e^x$

   (d) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0^+} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (l) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ (p) $\lim_{x\to -\infty} e^x$

4. Encontre exemplos de funções com a seguintes propriedades (caso estas existam):

   (a) Limitada e convergente para $x\to\infty$.
   (b) Limitada e não convergente para $x\to\infty$.
   (c) Estritamente crescente e que não seja crescente.
   (d) Estritamente decrescente e que não seja decrescente.
   (e) Crescente e que não seja estritamente crescente.
   (f) Decrescente e que não seja estritamente decrescente.
   (g) Que seja crescente e decrescente ao mesmo tempo.
   (h) Que seja estritamente crescente e estritamente decrescente ao mesmo tempo.
   (i) Monótona e limitada que não converge para $x\to\infty$.
   (j) Monótona e limitada que converge para $x\to\infty$.

5. Sejam f e g duas funções com $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, lembrando que $a\in Dom'_f\cap Dom'_g$. Encontre exemplos de funções f e g deste tipo que satisfaçam as condições dadas nos itens abaixo:

   (a) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.
   (b) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.
   (c) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.
   (d) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=5$.
   (e) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$, para $\alpha\in\mathbb{R}_+$.
   (f) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$.

(g) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = -\infty$.

(h) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 0$.

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$.

(j) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \alpha$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação: O número a neste exercício pode ser qualquer $a \in \mathbb{R}$. Mas pode-se pensar também em exemplos com limites em que x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

6. Sabendo que o domínio de todas as funções abaixo é $I\!R$ encontre o conjunto dos pontos em que tais funções são contínuas (justifique):

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} xsen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

7. No exercício anterior, para as funções que não são contínuas em algum ponto, diga qual é a espécie de descontinuidade de tal função nesse ponto.

8. Resolva os exercícios 1, 2, 4, 5, 12 e 13 do capítulo VI e os exercícios 6, 12, 23, 28, 29 e 37 do capítulo VII do livro [EL1].

9. Resolva os exercícios 8 e 9 da pg 103, os exercícios 4, 5 e 15 da pg 111 e os exercícios 3, 4, 6, 8, 9, 10 e 11 do capítulo sobre limite e continuidade de [GA1].

Referências

[EL1] Lima, E. L. - Curso de Análise vol. 1, 10ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2000.

[GA1] Ávila, G. S. S. - Análise Matemática para a Licenciatura. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2001.